Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 42

EXANA420 – EXANA429

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Octobre 2014

EXANA420 – Polytech, Umons, Mons, Juillet 2015.

Soient I_1 et I_2 les primitives définies par

$$I_1 = \int \frac{e^x}{\left(e^x + e^{-x}\right)}\,dx \qquad I_2 = \int \frac{1}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)}\,dx$$

En vous basant sur le calcul de $I_1 + I_2$ et de $I_1 - I_2$ déterminez I_1 et I_2

Solution proposée par Martin Scohier

$$I_1 = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx \qquad I_2 = \int \frac{1}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$I_1 + I_2 = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = x + C$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

On pose : $t = e^x + e^{-x} \Rightarrow dt = \left(e^x - e^{-x}\right)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x - e^{-x}}$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C$$

On a alors : $\begin{cases} I_1 + I_2 = x + C & \Rightarrow I_1 = x - I_2 + C \\ I_1 - I_2 = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C & \Rightarrow x - I_2 - I_2 = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C \end{cases}$

$$\Rightarrow -2I_2 = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) - x + C \Rightarrow I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C$$

Dès lors : $I_1 = x - I_2 + C = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C$

On peut simplifier I_1 car $\ln\left(e^x + e^{-x}\right) = \ln\left(e^{-x}.\left(e^{2x} + 1\right)\right)$

On obtient alors : $I_1 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\left(-x + \ln\left(e^{2x} + 1\right)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + 1\right)$

De même : $I_2 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^x\left(e^{-2x} + 1\right)\right) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\left(x + \ln\left(e^{-2x} + 1\right)\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{-2x} + 1\right)$

Conclusion : $\boxed{I_1 = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + 1\right) \qquad I_2 = -\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{-2x} + 1\right)}$

---

10 septembre 2015. Modifié le 31 aout 2016 (Paul Leroy)

EXANA421 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}(x\ln|x|)^3 & \text{si } x\in\mathbb{R}_0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

a) f est-elle paire, impaire? Justifier.

b) Que vaut la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? vers $-\infty$? Justifier.

c) Que vaut la limite de f lorsque x tend vers 0 par valeurs >0? Justifier.

d) f est-elle continue en $x=0$? Justifier.

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Combien le graphe de f possède-t-il de points au maximum? de minimum? Justifier et calculer leurs coordonnées.

g) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs abscisses. Justifier.

h) En utilisant l'approximation $\frac{1}{e}\approx 0.36$, esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points apparaissant dans les réponses précédentes.

---

a) La fonction est impaire puisque :

$$f(-x)=(-x.\ln|-x|)^3=-(x.\ln|x|)^3=-f(x)$$

On peut donc se contenter d'étudier la fonction pour $x\in\mathbb{R}^+$,

$$\text{soit }\begin{cases}f(x)=(x.\ln x)^3 & \text{si } x\in\mathbb{R}_0^+\\ f(0)=0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Le reste de la fonction s'obtient par symétrie centrale de centre $(0,0)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x.\ln x)^3=+\infty\times+\infty=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(x.\ln|x|)^3=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}(x.\ln x)^3=0\times-\infty$

On transforme et on applique l'Hospital :

$$\lim_{x\to0^+}(x.\ln x)^3=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)^3=\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)^3\xrightarrow{H}\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)^3=-\left(\lim_{x\to0^+}x\right)^3=0$$

d) Puisque la fonction est impaire, on a aussi : $\lim\limits_{x\to0^-}(x.\ln|x|)^3=0$

La limite de f en 0 existe et vaut $f(0)=0$ et donc f est continue en 0 e-f) $f'(x)=\left((x.\ln x)^3\right)'=....=3x^2\ln^2 x(\ln x+1)$

Cette dérivée est nulle pour $x=\dfrac{1}{e}$ et pour $x=1$ il est facile de montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$

Sur l'ensemble du domaine de f, on a donc :

	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{e}$		0		$+\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les coordonnées des extrémums sont

$$\min\equiv D=\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e^3}\right)\qquad \max\equiv D'=\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e^3}\right)$$

$f''(x)=\left(3x^2\ln^2 x(\ln x+1)\right)'=...=3x\ln x\left(2\ln^2 x+5\ln 5+2\right)=3x\ln x(2\ln x+1)(\ln x+2)$

Cette dérivée est nulle pour $x=1, x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et pour $x=\dfrac{1}{e^2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=0$

Sur l'ensemble du domaine de f, on a donc :

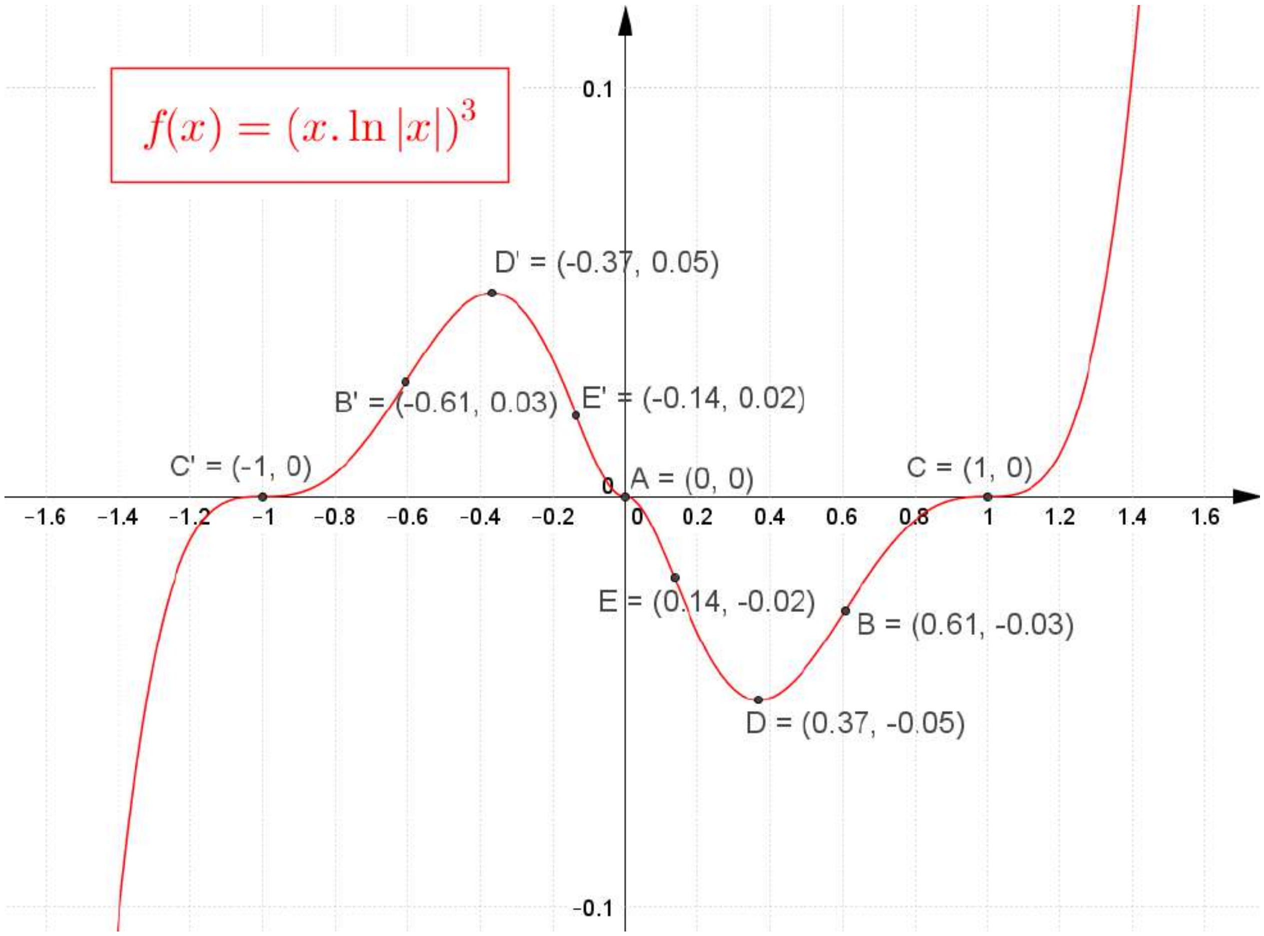
	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		$-\frac{1}{e^2}$		0		$\frac{1}{e^2}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+1$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	/	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\cap$	I	$\cup$	I	$\cap$	I	$\cup$	I	$\cap$	I	$\cup$	I	$\cap$	I	$\cup$	$+\infty$

Les points d'inflexion sont : $A=(0,0)$ et

$$C'=(-1,0)\qquad C=(1,0)$$

$$B'=\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{8e^{3/2}}\right)\quad B=\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{8e^{3/2}}\right)$$

$$E'=\left(-\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^6}\right)\qquad E'=\left(\frac{1}{e^2},-\frac{8}{e^6}\right)$$



21 janvier 2016

EXANA422 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\int x\arctan(3x)\,dx$

b) $\int_0^5 \left| x^4 - 1 \right| dx$

---

a) $I = \int x\arctan(3x)\,dx$

Par parties

$$f = \arctan(3x) \quad f' = \frac{3}{1+9x^2}, \qquad g' = x \quad g = \frac{x^2}{2} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\arctan(3x) - \underbrace{\frac{3}{2}\int \frac{x^2}{1+9x^2}}_{=I'}$$

Pour calculer I', on effectue la division euclidienne, et on obtient :

$$I' = \frac{3}{2}\int \frac{x^2}{1+9x^2} = \frac{3}{2}\left[\int \frac{1}{9}dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx\right] = \frac{x}{6} - \frac{1}{6}.\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+9x^2}\,d(3x)$$

$$= \frac{x}{6} - \frac{1}{18}\arctan(3x)$$

On remplace

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{x}{6} + \frac{1}{18}\arctan(3x) = \frac{1}{18}\left[\left(9x^2+1\right)\arctan(3x) - 3x\right] + k$$

b) Notons que $\left| x^4 - 1 \right| = 1 - x^4$ si $0 \leq x < 1$ et $\left| x^4 - 1 \right| = x^4 - 1$ si $x \geq 1$

$$I = \int_0^5 \left| x^4 - 1 \right| dx = \int_0^1 1 - x^4 dx + \int_1^5 x^4 - 1\,dx$$

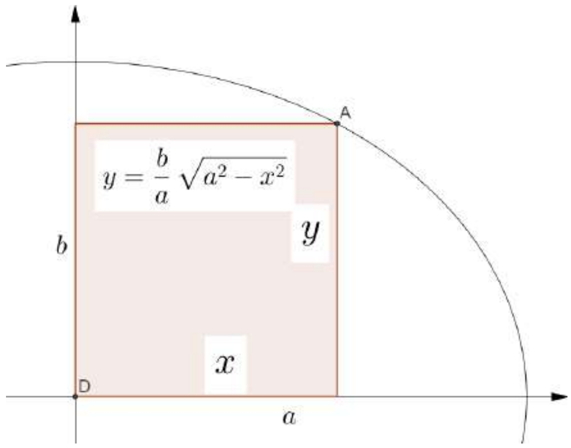
$$= \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{5} - x\right]_1^5 = \left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) - 0\right] + \left[\left(5^4 - 5\right) - \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right] = 621.6$$

---

21 janvier 2016

EXANA423 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Dans l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on inscrit un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Si on veut maximiser l'aire de ce rectangle, quelles doivent être les coordonnées de ses 4 sommets.



Travaillons sur le premier quadrant.

L'équation de l'éllipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ devient $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Si nous voulons maximiser le rectangle inscrit à l'ellipse, il suffit de maximiser le rectangle compris dans le premier quadrant. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de ce rectangle.

$$\mathcal{A}=x.y=x.\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

On dérive : $\mathcal{A}'=\frac{b}{a}\left[\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)\right]=\frac{b}{a\sqrt{a^2-x^2}}\left(a^2-2x^2\right)$

Cette dérivée est nulle si : $a^2-2x^2=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}a\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}b$

Les coordonnées des quatre sommets du rectangle sont alors:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a;\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)\ ;\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a;-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)\ ;\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a;\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)\ ;\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a;-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$$

---

21 janvier 2016

EXANA424 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 e^{-|x|}$ pour tout x réel.

a) f est-elle paire? impaire? Justifier.

b) Que vaut la limite de f lorsque que x tend vers $+\infty$? vers $-\infty$? Justifier.

c) Déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f.

d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? Justifier et calculer leurs coordonnées.

f) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs abscisses.

g) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points apparaissant dans les réponses précédentes.

---

a) La fonction est impaire puisque : $f(-x) = (-x)^3 e^{-|-x|} = -x^3 e^{-|x|} = -f(x)$

On étudiera donc la fonction : $f(x) = x^3 e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. Le reste de la fonction s'obtient par symétrie centrale de centre $A = (0,0)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x} \xrightarrow{H} \ldots \xrightarrow{H} \ldots \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{e^x} = 0$

On a appliqué trois fois consécutivement l'Hospital.

On en déduit aussi que $\lim\limits_{x\to-\infty} f = 0$

c) En vertu de b), il y a une asymptote horizontale : $AH \equiv y = 0$.

d) $f'(x) = (x^3 e^{-x})' = \ldots = x^2 e^{-x}(3-x)$

Cette dérivée est nulle pour $x = 0$ et $x = 3$.

$f''(x) = (x^3 e^{-x})'' = (x^2 e^{-x}(3-x))' = \ldots = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6) = xe^{-x}\left[x - (3-\sqrt{3})\right]\left[x - (3+\sqrt{3})\right]$

Cette dérivée est nulle pour $x = 0, x = 3-\sqrt{3}$ et $x = 3+\sqrt{3}$.

e-f) On construit le tableau récapitulatif

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{3}$		-3		$-3+\sqrt{3}$		0		$3-\sqrt{3}$		3		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
		$\cap$	I	$\cup$		$\cup$	I	$\cap$	I	$\cup$	I	$\cap$		$\cap$	I	$\cup$	

Les coordonnées des points particuliers sont :

Extrémums

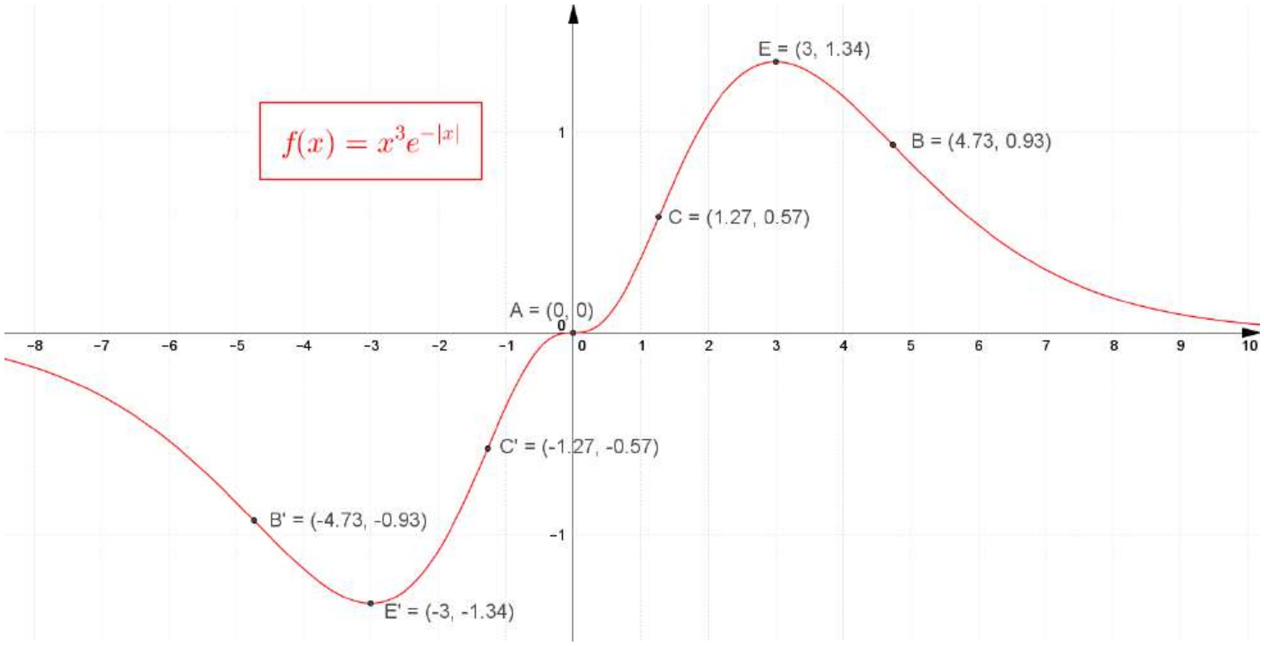
$$\max : E = (3;1.344) \quad \min : E' = (-3,-1.344)$$

Points d'inflexion

$$A = (0,0)$$

$$B = (3+\sqrt{3};0.933) \quad B' = (-3-\sqrt{3};-0.933)$$

$$C = (3-\sqrt{3};0.574) \quad C' = (-3+\sqrt{3};-0.574)$$



EXANA425 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

a) $\int_{10\pi}^{21\pi} \sin 5x\,(\cos 5x)^6\,dx$

b) $\int \frac{1}{1+e^{6x}}\,dx$

Notons que $(\cos 5x)' = -5\sin x$.

On a alors directement :

$$I = \int_{10\pi}^{21\pi} \sin 5x(\cos 5x)^6\,dx = -\frac{1}{35}\left[(\cos 5x)^7\right]_{10\pi}^{21\pi} = -\frac{1}{35}(-1-1) = \frac{2}{35}$$

Alternativement, si on remarque que $f(x) = \sin 5x(\cos 5x)^6$ est une fonction de période $\frac{2\pi}{5}$ et que $[10\pi, 21\pi]$ représente un intervalle de longueur $52 + \frac{1}{2}$ périodes, on a

$$I = \int_{10\pi}^{21\pi} \sin 5x(\cos 5x)^6\,dx = -\frac{52}{35}\left[(\cos 5x)^7\right]_0^{2\pi/5} - \frac{1}{35}\left[(\cos 5x)^7\right]_0^{\pi/5} = \frac{2}{35}$$

Solution proposée par Salma El Gueddari

On pose $t = e^{6x} \Rightarrow dt = 6e^{6x}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{6t}dt$

On obtient : $I = \int \frac{1}{1+e^{6x}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{t(1+t)}dt$

On décompose en fractions rationnelles :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6}\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{1}{1+t}dt\right) = \frac{1}{6}\left(\ln|t| - \ln|1+t|\right)$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| = \frac{1}{6}\ln\frac{e^x}{1+e^x} \text{ ou encore } \boxed{I = x - \frac{1}{6}\ln\left(e^x+1\right) + C}$$

Solution proposée par Xavier Mauquoy

En remarquant que $0 = e^{6x} - e^{6x}$, on peut réécrire l'expression de la manière suivante :

$$\int \frac{1}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+(e^{6x}-e^{6x})}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x$$

Par linéarité :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+(e^{6x}-e^{6x})}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \underbrace{\frac{1+e^{6x}}{1+e^{6x}}}_{=1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{e^{6x}}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{e^{6x}}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x \\
&= x - \int \frac{\frac{1}{6}(1+e^{6x})'}{1+e^{6x}}\,\mathrm{d}x \\
&= x - \frac{1}{6}\ln(1+e^{6x}) + C \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

en observant que $1 + e^{6x} \geq 0\,\forall x \in \mathbb{R}$, donc que le logarithme dans la dernière égalité est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. De manière plus générale, considérons :

$$\int \frac{A}{B+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

où $A, B, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a, par des arguments similaires :

$$\begin{aligned}
\int \frac{A}{B+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{A}{B}\int \frac{B}{B+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A}{B}\left(\int \frac{B+e^{\alpha x}-e^{\alpha x}}{B+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{A}{B}\left(x - \frac{1}{\alpha}\ln|B+e^{\alpha x}|\right) + C \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Finissons par la remarque suivante. Si une primitive est de la forme :

$$\int \frac{\hat{A}}{\hat{B}+\hat{C}e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x$$

avec $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on peut toujours la ramener sous la forme (1) :

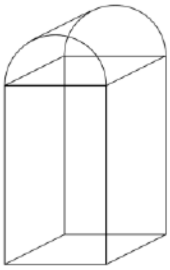
$$\begin{aligned}
\int \frac{\hat{A}}{\hat{B}+\hat{C}e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\hat{A}}{\hat{C}\left(\frac{\hat{B}}{\hat{C}}+e^{\alpha x}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{\hat{A}}{\hat{C}}}{\frac{\hat{B}}{\hat{C}}+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{A}{B+e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\hat{A}}{\hat{C}} \\
B &= \frac{\hat{B}}{\hat{C}}
\end{aligned}$$

EXANA426 – – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015

On veut construire une citerne ayant un volume $\mathcal{V}$ donné. Elle doit avoir la forme d'un parallèlipipède rectangle de hauteur h et à base carrée de côté c, surmonté d'un demi-cylindre de rayon $c/2$ $\left(\text{voir figure}\right)$. Pour quelles valeurs de c et de h l'aire totale de cette citerne est-elle minimum?



Aire de la citerne : $\mathcal{A} = \underset{\text{Aire du fond}}{c^2} + \underset{\text{Aire de la partie cylindrique du couvercle}}{\pi\frac{c}{2}c} + \underbrace{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{\text{Aire des deux parties latérales du couvercle}} + \underset{\text{Aire des quatre parties latérales}}{4ch}$

$$= c^2\left(1+\frac{3\pi}{4}\right)+4ch \qquad (1)$$

Volume de la citerne : $\mathcal{V} = \underbrace{c^2h}_{\text{Volume du parallélipipède}} + \underbrace{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 c}_{\text{Volume du courvercle}} = c^2h+\frac{1}{8}\pi c^3 \Rightarrow h = \dfrac{\mathcal{V}-\frac{1}{8}\pi c^3}{c^2}$

On remplace dans (1) : $\mathcal{A} = c^2\left(1+\frac{3\pi}{4}\right)+4c\dfrac{\mathcal{V}-\frac{1}{8}\pi c^3}{c^2} = c^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+\dfrac{4\mathcal{V}}{c}$

On dérive : $\mathcal{A}' = 2c\left(1+\frac{\pi}{4}\right)-\dfrac{4\mathcal{V}}{c^2}$

Cette dérivée est nulle si : $c^3\left(1+\frac{\pi}{4}\right)-2\mathcal{V}=0 \Rightarrow c = \sqrt[3]{\dfrac{2\mathcal{V}}{1+\frac{\pi}{4}}} = \boxed{2\sqrt[3]{\dfrac{\mathcal{V}}{4+\pi}}}$

---

21 janvier 2016

EXANA427- FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

La fonction arcth, appelée arctangente hyperbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arcth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction arcth, ses évenruelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Le cas échéant, déterminez l'équation de la tangente au(x) point(s) d'inflexion. Sur base des résultats obtenus, esquissez le graphe de $\operatorname{arcth}(x)$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-07/admission_analyse_ju15.pdf

 # Domaine de définition

L'argument de la fonction ln doit être défini et strictement positif, ce qui conduit aux conditions

$$1-x\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1+x}{1-x}>0$$

On étudie ces conditions à l'aide d'un tableau de signes, par exemple, soit

x		-1		1	
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	$\nexists$	-

et on trouve que $dom_f =]-1;1[$.

 # Asymptotes.

Il n'y a pas d'asymptote horizontale ni oblique, vu le domaine de définition.

On se limite donc à étudier l'existence possible d'asymptotes verticales :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x}{1-x}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x}{1-x}=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^+}\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

Il existe donc deux asymptotes verticales en $x=\pm 1$.

Extrema et Points d'inflexion

On calcule successivement les deux premières dérivées de la fonction à étudier

$$(\text{arcth})'(x) = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2},$$

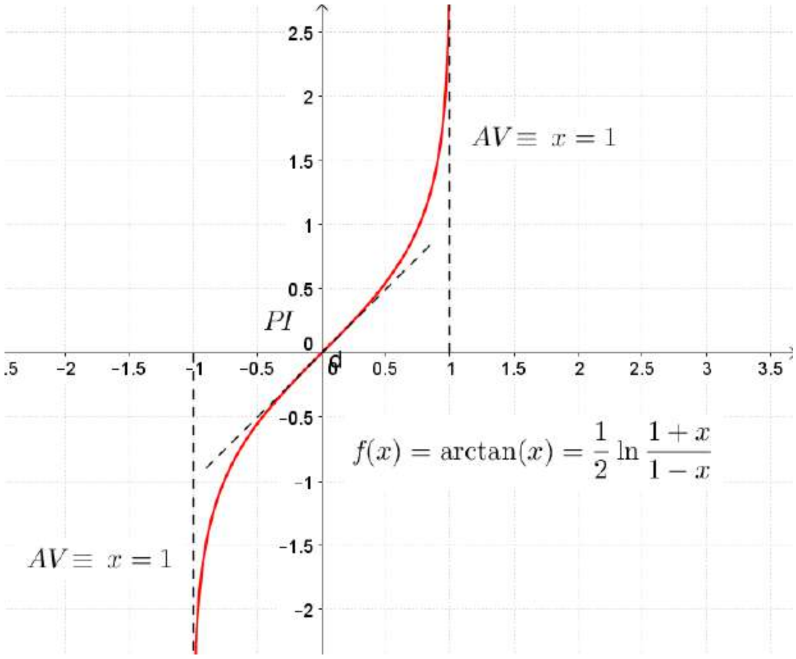
$$(\text{arcth})''(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = (-1)\left(1-x^2\right)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

L'étude de signe de ces dérivées donne

x		-1		0		1	
$(\text{arcth})'(x)$	$\nexists$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$\nexists$
$(\text{arcth})''(x)$	$\nexists$	$\nexists$	-	0	$+$	$\nexists$	$\nexists$
$\text{arcth}(x)$	$\nexists$	A.V.	$\nearrow$	P.I.	$\nearrow$	A.V.	$\nexists$
		$(-\infty)$	$\cap$	$(0,0)$	$\cup$	$(+\infty)$	

On accorde pour l'existence d'un point d'inflexion et son positionnement.
L'équation de la tangente au point d'inflexion est

$$\mathcal{T}(x) = \text{arcth}(0) + x\,\text{arcth'}(0) = x.$$



EXANA428 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Calculez

i. $\int \tan x \, dx$

ii. $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} dx$

iii. $\int \sin^4 x \, dx$

iv. $\int_0^1 \left(1-x^3\right) dx$

v. $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-07/admission_analyse_ju15.pdf

i. $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$
la dernière égalité reposant sur la substitution $t = \cos x$.

ii. $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -t^{-1} + C = \frac{-1}{1+e^x} + C$, où la substitution $t = 1 + e^x$ a été utilisée.

iii. En utilisant les formules de Carnot, on trouve successivement que

$$\begin{aligned}\sin^4 x = \sin^2 x\left(1-\cos^2 x\right) = \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{\sin^2 2x}{4} \\ = \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 4x}{8} &= \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

iv. $\int_0^1 (1-x^3)\, dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

v. En procédant par parties, on trouve
$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = -x\cos x|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x|_0^{\pi/2} = 1$

---

21 janvier 2016

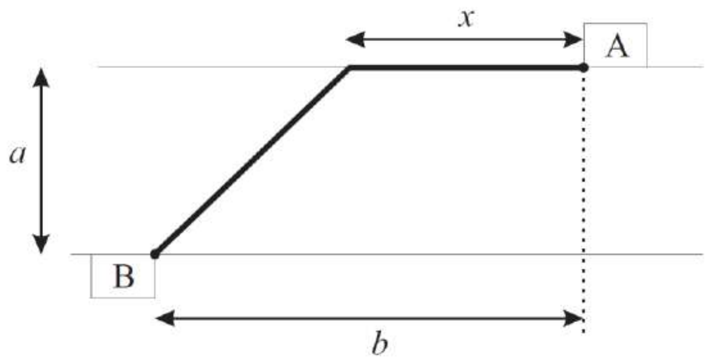
EXANA429 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Une entreprise installée sur les deux rives d'un fleuve supposé rectiligne (voir dessin) souhaite relier par fiblre optique ses deux bâtiments A et B. Le tracé prévu est composé de deux segments rectilignes. Une partie du câble traverse le fleuve et l'autre est posée sur la berge. La pose du câble coûte α Euros. Le coût par mètre est double, soit 2α Euros par mètre, lorsque le câble est posé dans le fleuve. Les parmètres a et b sont des données du problème et représentent la largeur de la rivière ainsi que la distance entre les deux implantations projetée le long de la berge.

On souhaite minimiser le coût de l'installation.

a) Déterminez la longueur x du câble à poser sur la berge pour minimiser le coût dans le cas où $a = 30$ m et $b = 240$ m.

b) Montrez que le câble doit relier les deux implantations A et B en ligne droite lorsque $a \geq \sqrt{2}b$



Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Fonction objectif

Coût $= f(x) = \alpha x + 2\alpha\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$

Le **domaine utile** de cette fonction est l'intervalle fermé $[0\,;b]$. En effet :

- $x \geq 0$: Pour $x = 0$ le coût est celui du câble posé dans le fleuve en ligne droite entre A et B :

  $f(0) = 2\alpha\sqrt{a^2 + b^2}$

  Pour $x < 0$ la longueur du câble posé dans le fleuve est plus grande et on y rajoute en plus un segment de câble sur la berge ; le coût est donc supérieur.

- $x \leq b$: Pour $x = b$ le coût est celui d'un câble de longueur a dans le fleuve, perpendiculaire aux berges, et un câble de longueur b sur la berge :

  $f(b) = 2\alpha a + \alpha b$

  Pour $x > b$ la longueur du câble posé dans le fleuve est plus grande et on y rajoute un plus long segment de câble sur la berge ; le coût est donc supérieur.

Optimisation

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha.\left(1 + \frac{2}{2\sqrt{a^2+(b-x)^2}}.2(b-x)(-1)\right) \\ &= \alpha.\frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2} - 2(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+(b-x)^2} = 2(b-x) \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + (b-x)^2 = 4(b-x)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(b-x)^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad b - x = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Par conséquent, $x_{opt} = b - \frac{a}{\sqrt{3}}$, mais seulement lorsque $a \leq \sqrt{3}b$ pour que $x_{opt} \geq 0$.

i. Avec $a = 30$ m et $b = 240$ m, on trouve

   $x_{opt} = 240 - \frac{30}{\sqrt{3}} = 222{,}7$ m

ii. Lorsque $a \geq \sqrt{3}b$, la fonction f ne possède pas de minimum entre $x = 0$ et $x = b$: elle est monotonement croissante sur $[0\,;b]$. Sa valeur minimale est donc réalisée en l'extrémité gauche de cet intervalle, et le câble doit relier les deux implantations A et B en ligne droite.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.

http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-07/admission_analyse_ju15.pdf

Le câble est composé de deux morceaux rectilignes de longueurs x et $\sqrt{a^2+(b-x)^2}$ (par application du théorème de Pythagore). Etant donné que l'un coûte α (€/m) et que l'autre coûte 2α (€/m), nous pouvons écrire la fonction coût suivante

$$\mathcal{C}(x) = \alpha\left(x + 2\sqrt{a^2+(b-x)^2}\right).$$

En écrivant ces relations, on admet que $x \geq 0$ car une longueur est toujours positive. De toute façon, le bon sens indique que la solution optimale doit nécessairement correspondre à une valeur de x positif.

On perçoit également que la solution optimale doit correspondre à une valeur de x inférieure à b. En effet, aux deux solutions $x = b \pm \delta$, où $\delta > 0$, on peut associer les coûts

$$\mathcal{C}(b-\delta) = \alpha\left(b - \delta + 2\sqrt{a^2+\delta^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}(b+\delta) = \alpha\left(b + \delta + 2\sqrt{a^2+\delta^2}\right),$$

et on constate que $\mathcal{C}(b+\delta) > \mathcal{C}(b-\delta)$. Il n'y a donc aucun intérêt à choisir une valeur de x supérieure à b.

Nous allons donc rechercher le coût minimum d'installation pour une valeur de x dans l'intervalle $[0;b]$. Etant donné que la fonction est continue et continument dérivable sur cet intervalle, le minimum de la fonction se trouve, soit aux bornes du domaine, soit au(x) point(s) stationnaire(s) de la fonction $\mathcal{C}(x)$, c'est-à-dire, ceux qui annulent la dérivée première.

La dérivée de la fonction coût s'écrit

$$\mathcal{C}'(x) = \alpha\left(1 + \frac{-2(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}\right).$$

La (Les) ordonnée(s) $x^\star$ annulant $\mathcal{C}'(x)$ satisfait (satisfont)

$$\frac{2(b-x^\star)}{\sqrt{a^2+(b-x^\star)^2}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2(b-x^\star) = \sqrt{a^2+(b-x^\star)^2}$$

soit

$$4(b-x^\star)^2 = a^2 + (b-x^\star)^2 \qquad \text{et} \qquad b - x^\star \geq 0$$

dont la seule solution est $\sqrt{3}(b-x^\star) = +a$, donc

$$x^\star = b - \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Pour les raisons énoncées ci-dessous, cette solution n'a de sens que si $x^\star \geq 0$, c'est-à-dire, si $a \leq b\sqrt{3}$. Dans le cas contraire, le point stationaire $x^\star$ de $\mathcal{C}(x)$ se trouve en dehors de l'intervalle $[0;b]$, si bien que l'optimum se trouve aux bornes du domaine. On peut alors calculer les valeurs du coût d'installation, aux deux bornes de l'intervalle, soit $\mathcal{C}(0) = 2\alpha\sqrt{a^2+b^2}$ et $\mathcal{C}(b) = 2\alpha\left(a + \frac{b}{2}\right)$. On vérifie facilement que $\mathcal{C}(0) \leq \mathcal{C}(b)$ lorsque $a > b\sqrt{3}$, et donc que le minimum se trouve en $x = 0$. En effet, puisque α, a et b sont des grandeurs positives, on a successivement

$$2\alpha\sqrt{a^2+b^2} \leq 2\alpha\left(a+\frac{b}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2 \leq a^2 + ab + \frac{b^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3b}{4} \leq a \quad \Leftarrow \quad b\sqrt{3} < a.$$

On pourrait également démotrer que $\mathcal{C}(0) \leq \mathcal{C}(b)$ en établissant que $\mathcal{C}'(x) > 0$ lorsque $a > b\sqrt{3}$.

En résumé, lorsque $a \leq b\sqrt{3}$, il existe un optimum en $x^\star = b - \frac{a\sqrt{3}}{3}$ qui se trouve dans l'intervalle $[0;b]$. Lorsque $a \geq b\sqrt{3}$, le minimum de la fonction coût se trouve à la borne inférieure de l'intervalle $[0,b]$, soit en $x^\star = 0$.

i. Lorsque $a = 30$m et $b = 240$m, on tombe sous la première condition et $x^\star = 222.7$m.

ii. Lorsque $a \geq b\sqrt{3}$, le minimum de la fonction coût se trouve en $x^\star = 0$. Cela signifie que la longeur du fibre optique posé sur la berge est nulle, et donc que le câble relie les deux implantations en ligne droite, ce qui établit le résultat énoncé.