Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 5

EXANA050 – EXANA059

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXANA050 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Etudier et représenter la fonction :

$$f(x) = |\,x-3\,| - \frac{2}{x-1}$$

<u>Premier cas:</u> $x > 3 : f(x) = x - 3 - \frac{2}{x-1}$

Asymptote horizontale : N'existe pas.

Asymptote oblique : $y = x - 3$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x(x-1)}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-3 - \frac{2}{x-1}\right) = -3$$

Asymptote verticale : N'existe pas $\left(\text{car } x = 1 \text{ n'est pas dans le domaine considéré: } x \geq 3\right)$

Zéros de $f(x)$

$$f(x) = x - 3 - \frac{2}{x-1} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \quad \left(\text{On ne retient pas la solution } x = 2 - \sqrt{3}\right)$$

Dérivée première :

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} \qquad f'(x) > 0 \;\; \forall x \geq 3$$

$$\lim_{x \xrightarrow[>]{} 3} f'(x) = \frac{3}{2}$$

<u>Deuxième cas:</u> $x<3: f\left(x\right)=-x+3-\dfrac{2}{x-1}$

Domaine de définition : $x\neq 1$

Asymptote horizontale : N'existe pas. $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty$

Asymptote oblique : $y=-x+3$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x\left(x-1\right)}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x-1}\right)=3$$

Asymptote verticale : $x=1$

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 1\\ >}} f\left(x\right)=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\longrightarrow 1\\ <}} f\left(x\right)=+\infty$$

Continuité en $x=3$

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 3\\ <}} f\left(x\right)=+-\frac{2}{2}=-1$$

Zéros de $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=x-3-\frac{2}{x-1}=0 \;\rightarrow\; x^2-4x+5=0$$

$\rightarrow$ pas de solutions réelles : $\Delta<0$

Dérivée première

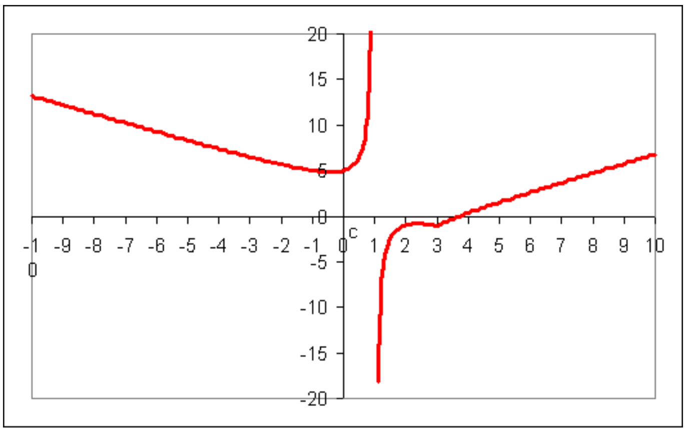
$$f'\left(x\right)=-1+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{\left(x-1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=0 \quad \text{pour } x=1-\sqrt{2} \quad \left(x<3\right)$$

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 3\\ <}} f'\left(x\right)=-\frac{1}{2}$$

Tableau des variations

x	-∞		1-$\sqrt{2}$			1			$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		-	0	+		/		+	0	-		+	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	↘	Min	↗	$+\infty$	/	$-\infty$	↗	Max	↘	-1	↗	$+\infty$



EXANA051 – Bruxelles, juillet 2001.

Soit la fonction f de R dans R définie par :

$$f(x)=\min(\sin x,\cos x)$$

ou min (a,b) est le plus petit des deux nombres réels a et b.

a) Tracer le graphe de f
b) Calculer :

$$\int_0^{54\pi} f(x)\,dx$$

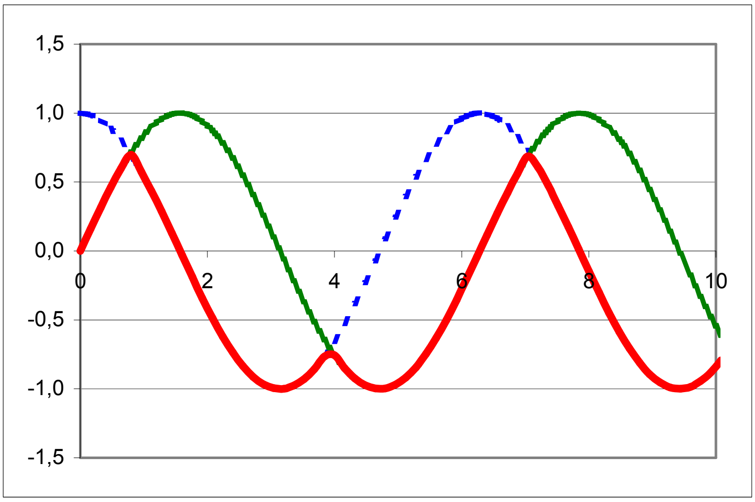
a) On observe que :

$$0<x<\frac{\pi}{4} \quad \to \quad \sin x<\cos x$$

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4} \quad \to \quad \cos x<\sin x$$

$$\frac{5\pi}{4}<x<2\pi \quad \to \quad \sin x<\cos x$$

La fonction : $f(x)=\min(\sin x,\cos x)$ a donc le graphe suivant :



b) La période de la fonction est de 2π $\to$

$$\int_0^{54\pi}\min(\sin x,\cos x)\,dx=27\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos x\,dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{0}\sin x\,dx\right]$$

$$=27\left[\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos x\,dx\right]=27\left[-\left[\cos x\right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\right]$$

$$=27\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=-54\sqrt{2}$$

EXANA052 – Bruxelles, juillet 2001.

Dans l'espace euclidien R^2 muni du repère orthonormé Oxy, soient le point $A = (0,1)$ et C la parabole d'équation :

$$y = x^2$$

La distance d de A à C est par définition :

Le minimum de $\left|\overrightarrow{AP}\right|$ pour $P \in C$

c) Calculer d et déterminer un point B appartenant à C tel que

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

d) Déterminer un point E appartenant à C tel que la droite AE est perpendiculaire à la tangente à C au point E.

$a)\ d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

On calcule le minimum en calculant le zéro de la dérivée.

$$d' = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

$a.1)\ d' = 0$ si $x = 0$ (C'est donc l'origine O) $\rightarrow\ d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$

$a.2)\ d' = 0$ si $4x^2 - 2 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

Ce qui est la distance cherchée. B a donc pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$b)$ Soit le point $E : (x_E; y_E)$. L'équation de la droite AE est : $y = \frac{y_E - 1}{x_E}x + 1$

Son coefficient angulaire est donc : $m_{AE} = \frac{y_E - 1}{x_E}$

Le coefficient angulaire de la tangente au point E est donné par la dérivée : $m_t = 2x_E$

Pour que la droite et la tangente soient perpendiculaire, il faut que : $m_{AE} = -\frac{1}{m_t}$

$\rightarrow\ 2x_E = -\frac{x_E}{y_E - 1} \ \rightarrow$

$b.1)\ x_E = 0$ C'est l'origine O

b.2) $2(y_E - 1) = -1 \ \rightarrow\ y_E = \frac{1}{2}$ C'est le point B déterminé au point a.

EXANA053 – Bruxelles, juillet 2001.

Soit la fonction f de R^+_0 dans R définie par :

$$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$$

et C la courbe d'équation $y=f(x)$ (C est le graphe de f)

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Déterminer une équation cartésienne
   a. de la tangente à C au point d'abscisse e (ln e = 1)
   b. des asymptotes (éventuelles) de C.

g) Établir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant
   a. Les racines de f, f' et f' (Pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale).

      Indication numérique :

      Pour $|x|\leq 1$ une valeur approchée des racines non entières de e^x est donné par $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

   b. Les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
   c. Les extrema de f, les domaines de croissances et de décroissance de f.
   d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C.

h) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats de c).

i) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de R_0 dans R définie par :

$$g(x)=\frac{|x|\,f(|x|)}{x}$$

$a)\ f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2} \qquad f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$

$b.1)$ <u>Tangente au point C</u> $\quad x_C = e \ \rightarrow \ y_C = \dfrac{2}{e} \quad et \quad f'(x_E) = -\dfrac{1}{e^2}$

$$(y - y_C) = f'(x_C)(x - x_C) \rightarrow \left(y - \frac{2}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}(x - e)$$

$$\rightarrow \ y = -\frac{x}{e^2} + \frac{3}{e}$$

$b.2.a)$ <u>Asymptote vertical</u> $\quad x = 0$

$b.2.b)$ <u>Asymptote horizontal</u> $\quad y = 0$

$c.1)$ <u>Racines</u>

$a)\ f(x) \qquad \ln x + 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1}{e} = e^{-1} = 1 - 1 + \dfrac{(-1)^2}{2} + \dfrac{(-1)^3}{6} = \dfrac{1}{3} = 0.3$

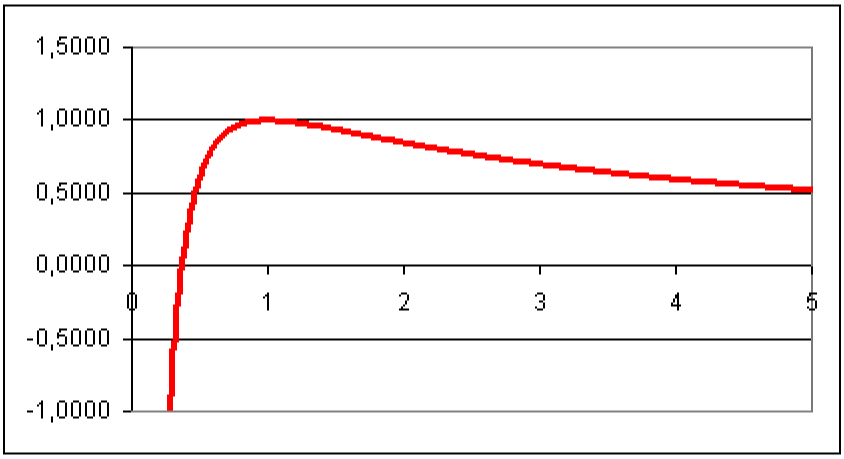
$b)\ f'(x) \qquad \ln x = 0 \qquad x = 1$

$c)\ f''(x) \qquad 2\ln x - 1 = 0 \qquad x = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} = 1.6$

$c.2)$ <u>Tableau des variations</u>

x	0		0.3		1		1.6		$+\infty$
$f'(x)$	∴	+	+	+	0	−	−	−	0
$f''(x)$	∴	−	−	−	−	−	0	+	0
$f(x)$	$-\infty$	−	0	+	1	+	0.91	+	0
		↗	Racine	↗	Maximum	↘	Inflexion	↘	
Concavité		∩	∩	∩	∩	∩		∪	

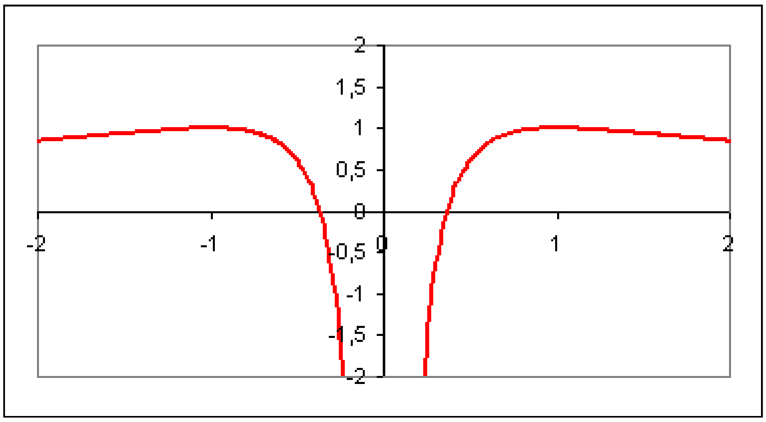
$d)$ <u>Courbe</u>



e) Si $x > 0$ $\quad g(x) = \dfrac{|x|\, f(|x|)}{x} = f(x)$

Si $x < 0$ $\quad g(x) = \dfrac{|x|\, f(|x|)}{x} = -f(-x)$

Pour $x < 0$, $g(x)$ est donc symétrique de $f(x)$ par rapport à l'axe des y.



EXANA054 – Bruxelles, septembre 2001.

Calculer :

a)

$$\int \sin(\ln x)\, dx$$

b)

$$\int_{-2}^{2} f(x)$$

où $f(x) = \max\left(|x|, x^2\right)$

et $\max(a, b)$ est le plus grand des deux nombres réels a et b.

$a)\ I = \int \sin(\ln x)\, dx$

Soit $y = \ln x \rightarrow dy = \dfrac{dx}{x} \rightarrow dx = x\, dy = e^y\, dy$

$\rightarrow I = \int \sin y\, e^y dy$

Par parties : $\begin{matrix} u = \sin y & u' = \cos y \\ v' = e^y & v = e^y \end{matrix}$

$\rightarrow I = e^y \sin y - \int e^y \cos y\, dy$

Par parties : $\begin{matrix} u = \cos y & u' = -\sin y \\ v' = e^y & v = e^y \end{matrix}$

$\rightarrow I = e^y \sin y - e^y \cos y - \int \sin y\, e^y dy = e^y \sin y - e^y \cos y - I$

$\rightarrow 2I = e^y\left(\sin y - \cos y\right) \rightarrow I = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$

$b)\ I = \int_{-2}^{2} \max\left(|x|, x^2\right) = 2\int_{0}^{2} \max\left(|x|, x^2\right)$

$= 2\left[\int_0^1 x\, dx + \int_1^2 x^2\, dx\right] = 2\left[\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^2\right]$

$= 2\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3}\right] = \dfrac{17}{3}$

EXANA055 – Bruxelles, septembre 2001.

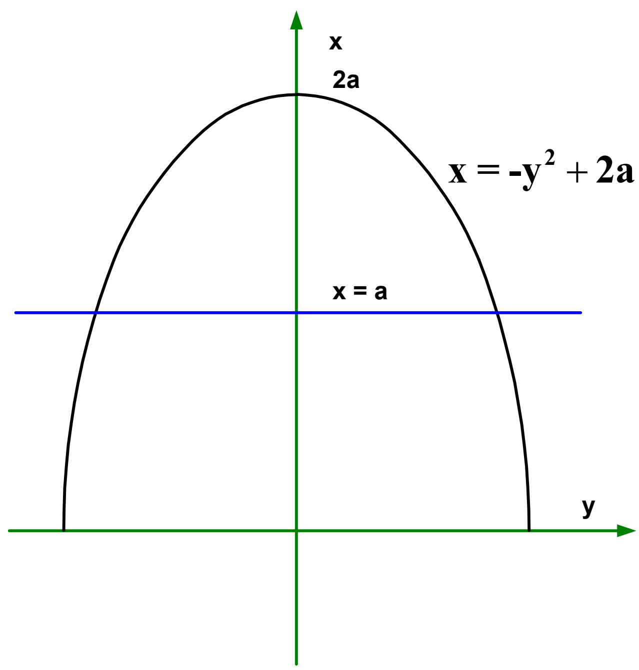
Dans l'espace euclidien R^2 muni du repère orthonormé Oxyz soient

- S la surface plane située dans le plan z = 0 et délimitée par les courbes d'équation respectives :

$$x = a \quad , \quad x = -y^2 + 2a \quad , \quad a > 0$$

- D le solide engendré par la rotation de S (d'un tour complet) autour de l'axe Oy.

a) Faire un croquis de S
b) Calculer l'aire de S
c) Calculer le volume de D



$b)$ $x=-y^2+2a \;\rightarrow\; y=\sqrt{2a-x}$

$$S=2\int_a^{2a}\sqrt{2a-x}\,dx$$

Soit $t=2a-x \;\rightarrow\; dt=-dx$

$x=a \;\rightarrow\; t=a$

$x=2a \;\rightarrow\; t=0$

$$S=-2\int_a^0 y^{\frac{1}{2}}\,dy=-\frac{4}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_a^0=\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

$c)$ Dans le repère (y, x), la droite et la parabole se coupe aux points $(-\sqrt{a}, a)$ et $\left(\sqrt{a}, a\right)$ (Attention, les axes x et y ont été inversés)

Volume engendré par la parabole $D_P=\pi\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} x^2dy=2\pi\int_0^{\sqrt{a}}\left(2a-y^2\right)^2 dy$

Volume engendré par la droite (c'est un cylindre) : $D_d=\pi a^2.2\sqrt{a}$

$$\rightarrow D=D_p-D_d=2\pi\left[\int_0^{\sqrt{a}}\left(2a-y^2\right)^2 dy-a^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$=2\pi\left[\int_0^{\sqrt{a}}\left(4a^2-4ay^2+y^4\right)dy-a^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$=2\pi\left[\left[4a^2y-\frac{4ay^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{a}}-a^{\frac{5}{2}}\right]=2\pi\left[4a^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}a^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$=\frac{56\pi}{15}a^{\frac{5}{2}}$$

EXANA056 – Bruxelles, septembre 2001.

Soit la fonction f de R dans R définie par

$$f(x) = \frac{4|x|}{1+x^2}$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

a) La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifier.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier en utilisant la définition de la dérivée.

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

d) Déterminer une équation cartésienne
   a. de la tangente à C au point d'abscisse –1
   b. des asymptotes (éventuelles) de C

e) Établir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant
   a. les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale).
   b. les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
   c. les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
   d. les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f.

f) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c).

g) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de R dans R définie par

$$g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$

$a)$ Rappelons la définition de la continuité d'une fonction.

Soit $f:\Re \to \Re : x \to f(x)$. La fonction f est continue en le réel a,

si et seulement si : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ce qui implique que la limite à gauche et à droite sont égale.

Ici la fonction est continue en 0 puisque : $\lim_{x\to 0} \frac{4|x|}{1+x^2} = 0$

$b)$ Par définition la dérivée d'une fonction est : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Une fonction est dérivable en a, si et seulement si $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est réelle.

Ici les limites à gauche et à droite sont différentes.

La fonction n'est donc pas dérivable au point 0 en tant que tel, mais admet une dérivée à gauche et à droite.

$c)$ $\underline{x>0}$

$$f'(x) = \frac{4(1+x^2)-4x.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \quad \to \quad f'(0) = 4$$

$$f''(x) = \frac{-8x(1+x^2)^2 - 4(1-x^2).2.(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4} = \frac{8x.(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$\underline{x<0}$

$$f'(x) = -\frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \quad \to \quad f'(0) = -4$$

$$f''(x) = -\frac{8x.(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$d.1)$ Tangente

$x=-1$ est un zéro de la dérivée première. La tangente est donc simplement $y = f(-1) = 2$

$d.2)$ Asymptote

Asymptote horzontale : $\lim_{x\to\infty} \frac{4|x|}{1+x^2} = 0 \to x = 0$

Pas d'asymptote verticale ou oblique.

e) Racines

$f(x)\quad x=0$

$f'(x)\quad x=1 \qquad x=-1$

$f''(x)\quad x=-\sqrt{3}=-1.7 \qquad x=\sqrt{3}=1.7$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-4\,\vert\,4$	$+$	0	$-$	0

Signe de $f''(x)$

x	$-\infty$		-1.7		0		1.7		$-\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$

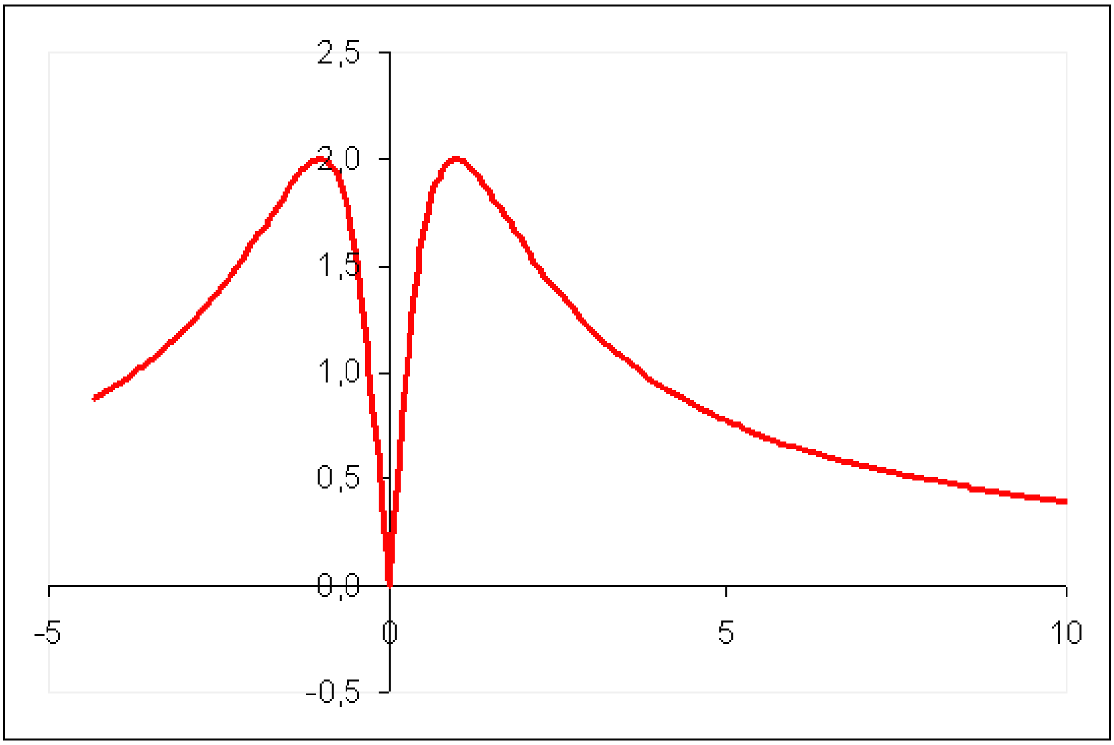
Extréma — Deux maximums en $(-1,2)$ et $(1,2)$

Points d'inflexion — Deux points d'inflexion en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ et $(\sqrt{3},\sqrt{3})$

Tableau des variations

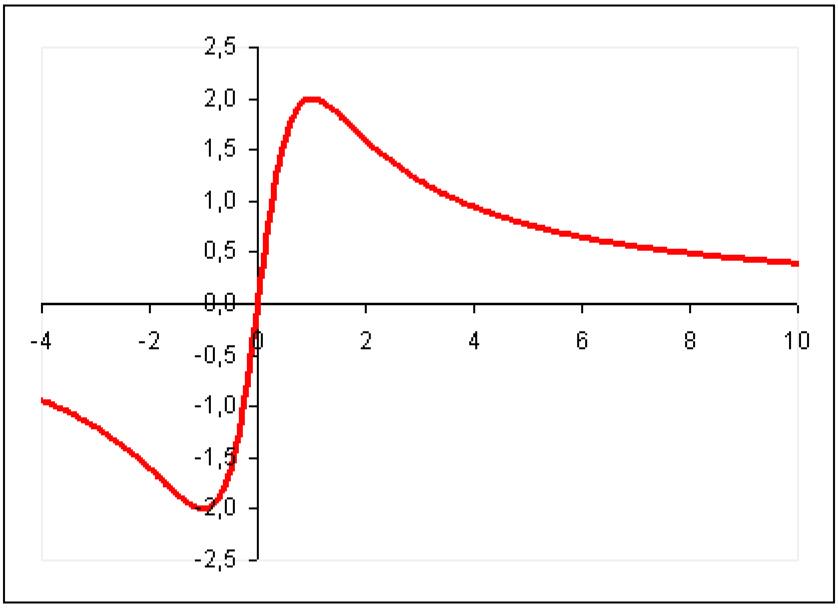
Note : La fonction est symétrique par rapport à l'axe de *y*.

x	$-\infty$		-1.7		-1		0		1		1.7		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-4\,\vert\,4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	I	↗	M	↘	0	↗	M	↘	I	↘	0
Concavité		∪			∩				∩			∪	



g) Le graphe de $g(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$ s'obtient facilement, si on note que la fonction est impair : $g(-x)=-g(x)$.

Le point $(0,0)$ est donc un centre de symétrie.



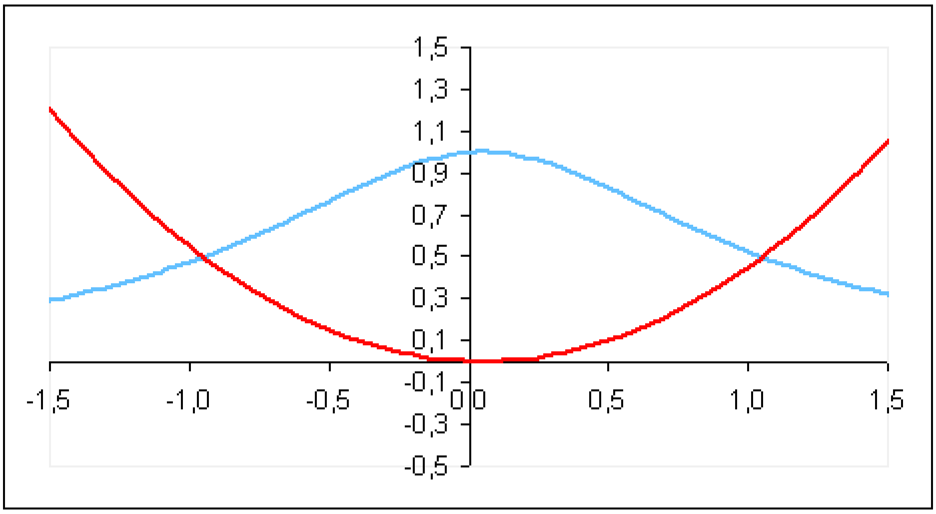
EXANA057 – Bruxelles, juillet 2001.

Dans l'espace euclidien R^2 muni du repère orthonormé Oxy, soit D la région plane délimité par les deux courbes d'équations respectives ?

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad y = \frac{x^2}{2}$$

a) Faire un croquis de D.

b) Calculer l'aire de D



Intersections des deux courbes :

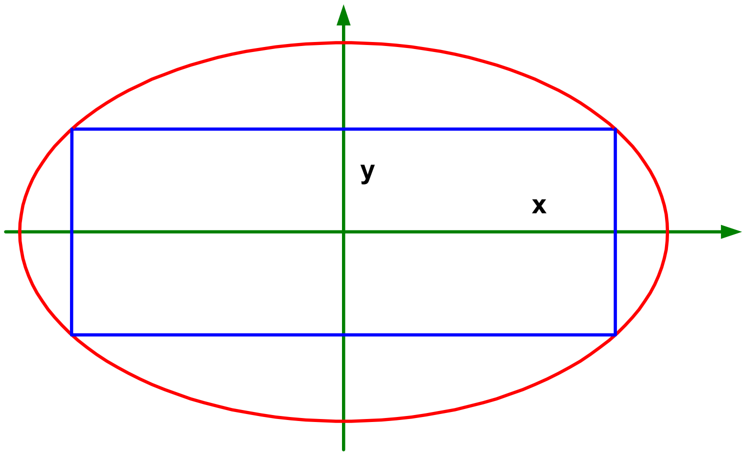
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \quad \rightarrow \quad x^4 + x^2 - 2 = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$D = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\left[\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx - \int_{0}^{1} \frac{x^2}{2}\, dx \right]$$

$$= 2\left[\text{arc tan } x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1.2375$$

EXANA058 – Bruxelles, juillet 2001.

On inscrit à une ellipse un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de l'ellipse.
Trouver les longueurs des côtés de ce rectangle qui soient tels que l'aire du rectangle soit maximum.



Vu la symétrie de la figure, on peut faire le raisonnement sur le premier quadrant.
Dans ce quadrant, l'équation de l'éllipse est :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a \text{ et } b \text{ étant les axes}) \quad \rightarrow \quad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

La surface S est donnée par :

$$S=x.y=bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Elle sera maximale si : $S'=0$

$$S'=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+bx\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)=\frac{a^2b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-bx^2}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$\rightarrow \quad a^2b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-bx^2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}.a$$

Longueur du rectangle : $L=2x=\sqrt{2}\;a$

Largeur du rectangle : $y=b\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.b \quad \rightarrow l=2y=\sqrt{2}\;b$

EXANA059 – Bruxelles, juillet 2002.

Soit la fonction f de R dans R définie par

$$f(x) = \ln | \ln | x | |$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

c) Déterminer le domaine de définition de f (C'est à dire le plus grand A possible).

d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

e) Déterminer une équation cartésienne
   a. de la tangente à C au point d'abscisse e (ln e = 1)
   b. des asymptotes (éventuelles) de C

f) Établir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant
   a. les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale).
   b. les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
   c. les extrema de f , les domaines de croissance et de décroissance de f.
   d. les points d'inflexion de C, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C.

g) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du d).

a) Domaine de définition : $x \in \Re \setminus \{-1, 0, 1\}$

b) Dérivées

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln|x|}$$

$$f''(x) = -\frac{\ln|x| + 1}{x^2 \ln^2|x|}$$

c.1) Tangente Si $x = e \quad \rightarrow \quad y = 0$ (C'est un zéro de $f(x)$)

$$\rightarrow \; y - 0 = f'(e)(x - e) \quad \rightarrow \quad y = \frac{x - e}{e}$$

c.2) Asympotes

Asymptotes verticales en : $x = -1; \quad x = 0; \quad x = 1$

Pas d'asymptote horizontale ou oblique.

d) Racines

$$f(x): \quad \ln\big| \ln|x| \big| = 0 \rightarrow \begin{cases} \ln|x| = 1 \rightarrow \begin{cases} x = e \\ x = -e \end{cases} \\ \ln|x| = -1 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{e} \\ x = -\dfrac{1}{e} \end{cases} \end{cases}$$

$f'(x)$: Pas de racine, donc pas d'extrema

$$f''(x): \ln|x| + 1 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{e} \\ x = -\dfrac{1}{e} \end{cases} \text{ donc points d'inflexion en } \begin{cases} \left(\dfrac{1}{e}, 0\right) \\ \left(-\dfrac{1}{e}, 0\right) \end{cases}$$

Signes de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln\lvert x\rvert$	$+$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	/	$+$	/	$-$	/	$+$	$+$

Signes de $f''(x)$ Le signe de $f''(x)$ est le signe de $-\left(\ln\lvert x\rvert+1\right)$

x	$-\infty$		-1		-0.37		0		0.37		1		∞
$-\left(\ln\lvert x\rvert+1\right)$	$-$	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$	$-$

Tableau des variations

Note : La fonction est symétrique par rapport à l'axe des y.

x	$-\infty$		-2.7		-1		-0.37		0		0.37		1		2.7		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	/	$\nearrow$	0	$\nearrow$	/	$\searrow$	0	$\searrow$	/	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Conca		$\cap$		$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cap$