Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 50

EXANA500 – EXANA509

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Octobre 2018

EXANA500 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

Chaque matin, un voyageur de commerce prend sa Tesla S pour visiter ses clients.
Son véhicule est équipé d'une batterie de 60 kWh de capacité et, à 100 km/h, elle consomme 20 kWh pour effectuer 100 km. La recharge coûte à son entreprise 0.2 euro/kWh. La tournée d'aujourd'hui va l'amener à faire 250 km et il n'y aura pas de borne de recharge sur sa route.

La veille, un ami lui explique que la consommation d'une voiture (énergie/km) augmente linéairement avec sa vitesse, car les forces de frottement augmentent, elles, avec le carré de la vitesse. Il lui suggère donc de rouler plus lentement pour consommer moins, donc faire gagner de l'argent à son patron! Il en parle à ce dernier qui le remercie pour son attention, mais lui rappelle qu'il doit aussi prendre en compte son salaire qui coûte 64 euro/heure à l'entreprise.

Quelle est la vitesse optimale à laquelle doit rouler notre voyageur de commerce?

Solution proposée par Martine Devillers

Soit v la vitesse à laquelle roule le voyageur de commerce $(v>0)$.

Pour effectuer 250 km à 100 km/h, il utilise $20\text{ kWh}.\dfrac{250\text{ km}}{100\text{ km}} = 50$ kWh de batterie.

Pour effectuer 250 km à v km/h, il utilise $50\text{ kWh}.\dfrac{v\text{ km/h}}{100\text{ km/h}} = \dfrac{v}{2}$ kWh de batterie.

Capacité de la batterie : $\dfrac{v}{2} \le 60 \Leftrightarrow v \le 120$

Coût de la consommation : $\dfrac{v}{2}\text{ kWh} \times 0.2\text{ €/kWh} = \dfrac{v}{10}$ €

Coût de la prestation : $\dfrac{250}{v}\text{h } \times 64\text{ €/h} = \dfrac{16000}{v}$ €

La fonction $C(v)$ qui donne le coût total est :

$C(v) = \dfrac{v}{10} + \dfrac{16000}{v}$ à minimiser sur $]0,120]$

$C'(v) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{16000}{v^2} \Rightarrow \dfrac{1}{10} = \dfrac{16000}{v^2} \Rightarrow v = 400 \; (v>0)$

v		-400		0		120		400	
$C'(v)$	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$C(v)$	↗	max	↘	↘	↘	↘	↘	min	↗

Conclusion : Le voyageur doit rouler à 120 km/h pour minimiser les coûts.

$$C(120) = \frac{436}{3} = 145\,\frac{1}{3}\text{ €}$$

Le 14 octobre 2018

EXANA501 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 1.

Soient les fonctions $f(x) = x+1+\dfrac{x}{e^x}$ et $g(x) = 1-x+e^x$

1) Faitez le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$. Ne pas faire le calcul des asymptotes.

En déduire le signe de $g(x)$.

2) Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Démontrez que $\forall x : f'(x) = e^{-x} g(x)$

4) Etablir le tableau de variation de f.

5) Démontrez que $f(x) = 0$ admet une solution unique réelle α tel que $-1 < \alpha < 0$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $g'(x) = -1+e^x$ TS :

x		0	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	2	$\nearrow$

$\Rightarrow \forall x : 2 \le g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f = -\infty + \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty + \dfrac{\infty}{\infty} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

3) $f'(x) = 1 + \dfrac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = 1 + \dfrac{1-x}{e^x} = \dfrac{e^x+1-x}{e^x}$

$= e^{-x}\left(e^x+1-x\right) = e^{-x} g(x)$

4) Signe de $f'(x)$ = signe de $g(x)$ TS :

x			
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $f(-1) = \dfrac{-1}{e^{-x}} = -e^x < 0$ et $f(0) = 1 > 0$

Théorème des valeurs intermèdiaires

$$\begin{cases} f(x) \text{ est continue sur } [a,b] \\ f(a).f(b) < 0 \\ \exists c \in \left]a,b\right[\text{ tel que } f(c) = 0 \end{cases}$$

On applique ce théorème à l'intervalle $[-1,0]$ pour en déduire qu'il existe $\alpha \in \left]-1,0\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme la fonction est strictement croissante, la valeur de α est unique.

Le 7 octobre 2019

EXANA502 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 1.

1) Calculer $\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

2) Dériver la fonction $f(x) = 2+3\int_4^x f(t)\,dt$

3) Déteminer l'intervalle de croissance de la fonction $f(x) = x.\exp\sqrt{-x}$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $I = \int_1^9 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ On pose $u = \sqrt{t} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \Rightarrow I = 2\int_1^3 e^u\,du = 2e^3 - 2e$

2) $f'(x) = 3\left(F(x) - F(4)\right)' = 3f(x)$

3) $f'(x) = e^{\sqrt{-x}} - \frac{xe^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} = \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{-x}}\right).e^{\sqrt{-x}}$

est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}_0^-$, donc f est croissante sur son domaine $\mathbb{R}^-$

Le 7 octobre 2019

EXANA503 - EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 1.

Lors d'un soirée étudiant-e-s ingénieur-e-s, la question suivante est posée : quelle est l'angle d'ouverture 2θ optimal pour un cornet de frites? Il ne s'agit pas de discuter de la facilité d'attraper des frites dans le fond du sachet, mais bien de minimiser la surface de carton pour réaliser un cornet de volume V. A cette heure tardive, il n'est pas question de faire le calcul exact, mais bien de trouver l'expression analytique qui permettra de calculer l'angle optimal. Chaque fois que nécessaire, vous pouvez supposer que $\pi = 3$.

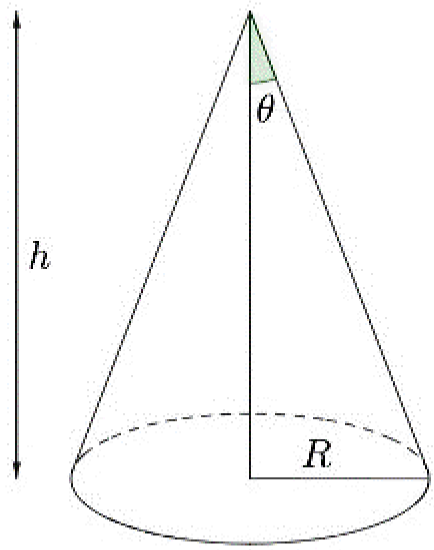
Le barman, qui est un as en géométrie et en trigonométrie, vous donne les éléments suivants. Un cornet pouvant être assimilé à un cône non tronqué, son volume est donné par l'expression :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

où $h = L\cos\theta$ est la hauteur du cône (ou profondeur du sachet), et $R = L\sin\theta$ le rayon de la base (ou de l'ouverture du sachet). L est la longueur de l'arête du cône (distance entre la pointe et le bord du sachet). La surface développée du cône (ou surface nécessaire pour réaliser le cornet) est donné par l'expression

$$S = \pi RL$$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



$R = L\sin\theta,\ h = L\cos\theta,\ \ V = \frac{\pi}{3}hR^2 = \frac{\pi}{3}L^3\cos\theta\sin^2\theta = L^3\cos\theta\sin^2\theta.$

On cherche le minimum de la surface du cornet pour un volume V donné.

Exprimons la surface S en fonction de la constante V et de l'inconnue θ :

$$S(\theta) = \pi RL = \pi L^2\sin\theta = \pi\sin\theta\left[\frac{V}{\cos\theta\sin^2\theta}\right]^{\frac{2}{3}} = \pi V^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\left(\cos^2\theta\sin\theta\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Pour trouver le minimum de la surface, on dérive S en fonction de θ.

$$S'(\theta) = \pi V^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\cos^2\theta\sin\theta\right)^{-\frac{4}{3}}\left(2\cos\theta(-\sin\theta) + \cos^2\theta\cos\theta\right)$$

$$= \ldots = \frac{\pi V^{\frac{2}{3}}}{3}\frac{\cos\theta\left(2-3\cos^2\theta\right)}{\left(\cos^2\theta\sin\theta\right)^{\frac{4}{3}}} = V^{\frac{2}{3}}.\frac{\cos\theta\left(2-3\cos^2\theta\right)}{\left(\cos^2\theta\sin\theta\right)^{\frac{4}{3}}}$$

Pour $\theta \in \left]0, 90°\right[$, cette dérivée s'annule pour $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta = 35.26°$

TS :

θ	0		35.26°		90°
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	min	$\nearrow$	

L'angle d'ouverture 2θ optimal est d'environ 70°

EXANA504 - EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 2.

On considère $f : \left]0, \infty\right[: x \to f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

1) Soit : $g : \left[0, \infty\right[: x \to g(x) = x^2 e^x - 1$. Etudier la variation de g.

2) Démontrer qu'il existe $a \in \left]0, +\infty\right]$, a unique tel que $g(a) = 0$

3) Etudier le signe de $g(x)$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

5) Démontrer que $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $g'(x) = xe^x(x+2) > 0$ sur $\left[0, +\infty\right[\Rightarrow g$ est toujours croissante.

2) $g(0) = -1, \ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Dès lors, il existe $a \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $g(a) = 0$.

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires a est unique.

3) TS :

x	0		a	
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x + \dfrac{1}{x}\right) = 1 + \dfrac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty + \dfrac{1}{\infty} = +\infty$

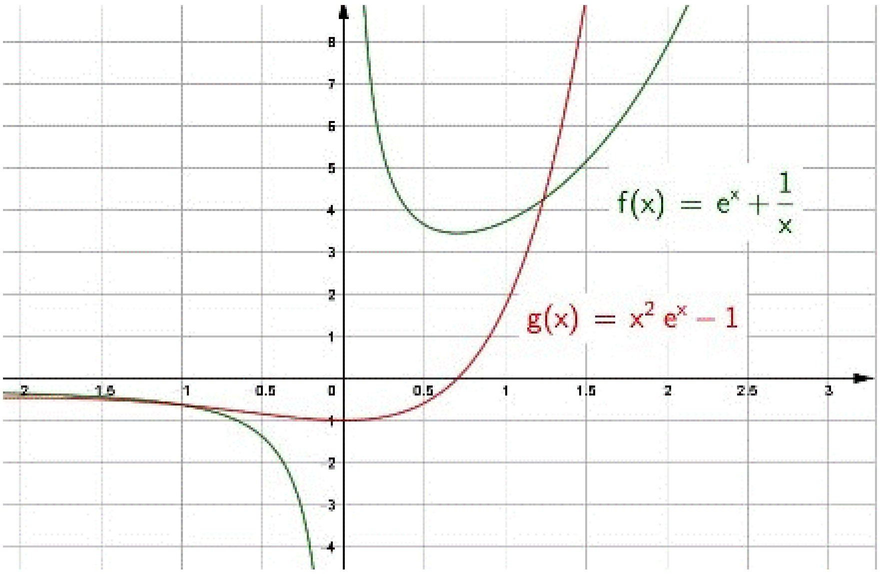
5) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 e^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

6) TS :

x	0		a	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$

7) $m = f(a) = e^a + \dfrac{1}{a}$

Or $g(a) = 0 \Rightarrow g(a) = a^2 e^a - 1 = 0 \Rightarrow e^a = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow= m = f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$



Le 7 octobre 2019

EXANA505 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 2.

1) Représenter dans le plan Oxy, l'ensemble de tous les points vérifiant les inégalités suivantes :

$y+2x-2\geq 0, \qquad 2y+x\leq 4, \qquad 4y\geq 4x-8$

Quel est le point (x,y), vérifiant les trois inégalités et d'ordonnée minimale?

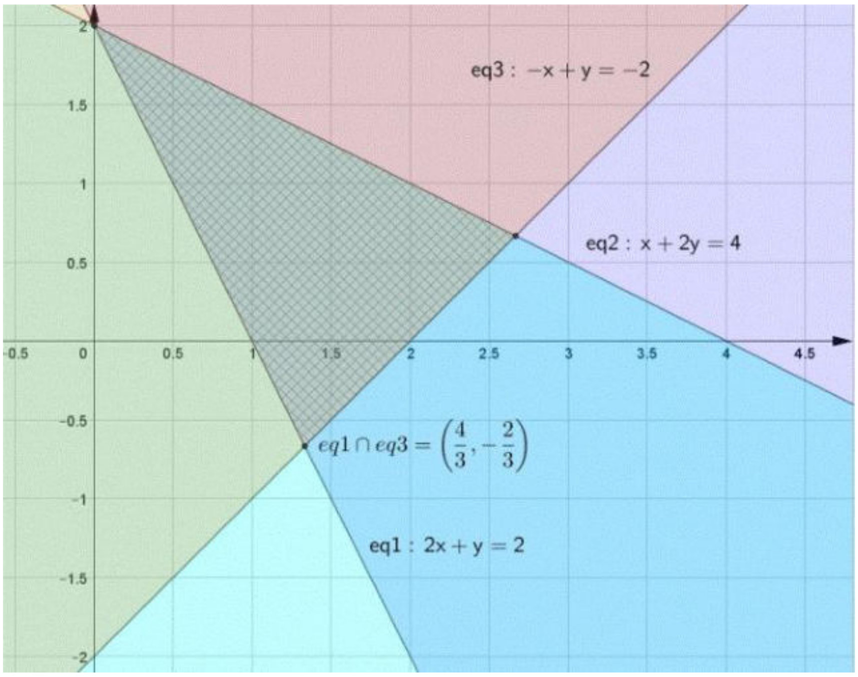
2) Calculer : $I=\int_0^2 x\sqrt{5+x^2}\,dx$

3) Soit $f(x)=\ln\left(2+e^{x-3}\right)$.

a) démontrer que f admet une fonction réciproque.

b) soit g, la fonction réciproque de f, calculer le nombre dérivé : $g'(\ln 3)$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



2) $I=\int_0^2 x\sqrt{d+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 2x\left(5+x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{2}\frac{\left(5+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right]_0^2=\frac{1}{3}\left[9^{\frac{3}{2}}-5^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{27-5\sqrt{5}}{3}$

3) $f'(x)=\dfrac{e^{x-3}}{2+e^{x-3}}$ est strictement positive donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et donc elle admet une fonction réciproque $g(x)$.

$g'(\ln 3)=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3$ car si $f(x)=\ln 3$ alors $e^{x-3}=1$ et donc $x=3$

Le 7 octobre 2019

EXANA506- EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 2.

Vous faites partie d'un groupe d'étudiant-e-s ingénieur-e-s qui participe à un projet solaire en Afrique. Un village isolé proche de l'équateur sera équipé de panneaux photovoltaïques pour assurer le fonctionnement d'un petit dispensaire. Vous avez choisi de calculer le nombre de panneaux nécessaires pour alimenter un réfrigérateur qui permet de conserver de nombreux médicaments.

Voici les données du problème :

- Le réfrigérateur a besoin d'une énergie de 2000 (watt.heure) par 24 heures.
  Un-e autre collègue s'occupe de dimmensionner les batteries qui stockeront l'excès d'énergie photovoltaïque le jour pour le restituer la nuit.
- Les panneaux photovoltaïques - de 1.5 (m^2) chacun - seront posés horizontalement sur le toit du dispensaire. Entre 6h et 18h, la perpendiculaire aux panneaux forme un angle θ compris respectivement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ avec les rayons de soleil.
- Hors saison des pluies - où un groupe électrogène prendra le relais - le rayonnement solaire est de 1000 (W/m^2) lorsque le soleil est au zénith.
- Seule la composante du rayonnement perpendiculaire aux panneaux est convertie en énergie électrique.
- L'installation complète (panneaux, onduleur, batteries) a un rendement énergétique de 20%.

Dans un premier temps, faites vos calculs sans tenir compte de l'effet de l'atmosphère qui atténue le rayonnement surtout à l'aurore et au crépuscule.

L'effet d'atténuation du rayonnement solaire dû à l'épaisseur de l'atmosphère peut être approximé par un facteur supplémentaire de la forme $\cos\theta$. Votre conclusion est-elle modifié par cet effet supplémentaire?

Solution proposée par Martine Devillers

Par m^2 : $1000 \cos\theta \; [W/m^2]$

Par panneau : $1000\cos\theta \times 1.5 = 1500\cos\theta$

Rendement par panneau entre 6h et 18h, sachant que θ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$:

$$1500\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = 1500[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 3000\,[W.h]$$

Rendement final, avec installation complète : $\frac{1}{5}\times 3000 = 600\,[W.h]$

Nombre de panneaux : $\frac{2000}{600} = 3.33 \Rightarrow \boxed{4 \text{ panneaux}}$

Avec un facteur supplémentaire, on a

$$1500\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1500}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = 750\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 750\pi\,[W.h]$$

Rendement final : $\frac{750\pi}{5} = 150\pi\,[W.h]$

Nombre de panneaux : $\frac{2000}{150\pi} = 4.24 \Rightarrow \boxed{5 \text{ panneaux}}$

Pour tenir compte de l'atténuation, on peut utiliser cette approche plus conservative, en prenant un coefficient $\cos^2\theta$:

$$1500\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta.\cos^2\theta \, d\theta = 1500\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta = \ldots = 1500\left[\frac{3\sin\theta}{4} + \frac{\sin 3x}{12}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= 1500\,\frac{4}{3} = 2000\,[W/h]$$

Rendement final : $\frac{2000}{5} = 400\,[W/h]$

Nombre de panneaux : $\frac{2000}{400} = \boxed{5 \text{ panneaux}}$

EXANA507- EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(x)=e^{x}-x-1$$

1) Etudier les variations de g.
2) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3) En déduire que pour tout x sur l'intervalle $[0,+\infty[$, $e^{x}-x>0$.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$$

4) Prouver que f est strictement croissante sur $[0,1]$.

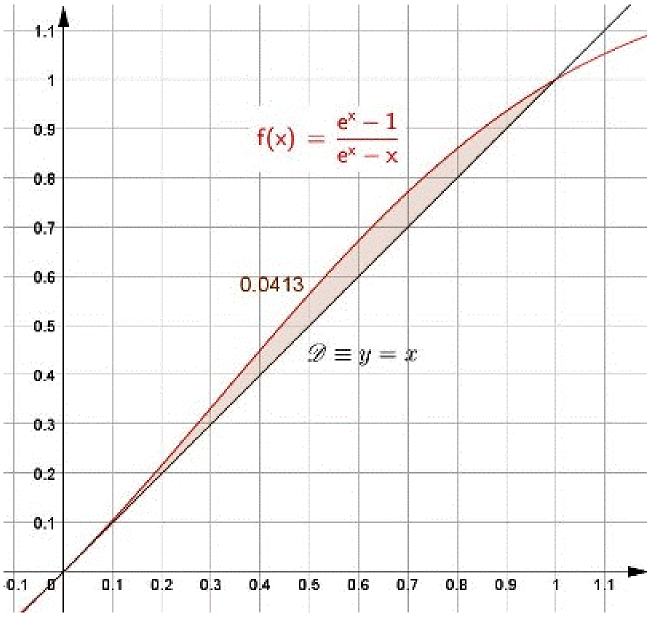
Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f.

5) Montrer que pour tout x de $[0,1]$,

$$f(x)-x=\frac{(1-x)g(x)}{e^{x}-x}$$

6) Etudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0,1]$.
7) Déterminer une primitive de f sur $[0,1]$.
8) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



1) $g'(x)=e^x-1$ TS :

x		0	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

2) $\forall x, g(x)\geq 0 \Rightarrow e^x-x-1\geq 0 \Rightarrow e^x-x\geq 1>0$

3) $\forall x>0,\ e^x-x>0$

4) $f:[0,1]\to f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}$$

Numérateur de $f'(x)=e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1$

$$=-xe^x+2e^x-1$$

$$=\underbrace{e^x}_{>0}\underbrace{(1-x)}_{>0}+\underbrace{(e^x-1)}_{>0}>0$$

Puisque $f'(x)>0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[0,1]$

5) $f(x)-x=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}-x=\dfrac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x}=\dfrac{e^x-xe^x+x^2-1}{e^x-x}$

$$=\frac{(1-x)(e^x-x-1)}{e^x-x}=\frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$$

6) $\mathcal{D}\equiv y=x$

$f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}>0$ car

x	0 $\quad$ 1
$1-x$	$+$
$g(x)$	$+$
e^x-x	$+$

Donc $\forall x\in[0,1]: x\leq f(x)$.

7) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x-x}\,dx=\ln(e^x-x)+k$

8) $Aire=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx=\ln(e-1)-\frac{1}{2}$

EXANA508 - EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

1) Soit la fonction

$$f(x) = x + x^5$$

Cette fonction est-elle bijective?

2) Calculer l'intégrale définie :

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$$

3) Chercher les valeurs extrêmes de la fonction

$$f : [-1,2] \to \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 3x + 8$$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $f'(x) = (x + x^5)' = 1 + 5x^4 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc f est une bijection.

2) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx = \left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right) - (0+0) = \frac{3}{2}$

3) $f'(x) = 3x^2 - 3$

x		-1		1		2
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f			$\searrow$	min	$\nearrow$	

$f(1) = 6$ est le minimum

$f(-1) = f(2) = 10$ est le maximum

Le 7 octobre 2019

EXANA509 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Vous travaillez pour l'agence spatiale européenne qui souhaite envoyer une mission vers mars. Les astronautes voyageront dans une navette, mais il est toutefois nécessaire de prévoir une solution de secours si l'atterissage sur Terre devait se passer de la navette. La solution d'une capsule d'atterisage est choisie, comme pour la mission Apollo.

Lors de sa rentrée dans l'atmosphère, la capsule est freinée par le frottement de l'air qui stabilise la vitesse de la capsule $[v]$ à $100\,[\mathrm{m/s}]$. Cette vitesse est bien sûr trop élevée pour envisager un atterissage. La vitesse au moment de l'impact doit être au maximum de $10\ [\mathrm{m/s}]$. Les capsules Apollo utilisaient un parachute pour ralentir la capsule avant de toucher le sol. Pour valider cette solution, vous êtes en charge de vérifier que la décélération ressentie par les astronautes ne dépassera pas $10\ [\mathrm{m/s^2}]$ au moment de l'ouverture des parachutes, et décider de quand commander leur ouverture. Voici les données du problème :

- La masse (m) de la capsule est de $1000\ [\mathrm{kg}]$ et l'accélération est bien sûr donnée par la formule bien connue :

$$v' = F/m\ [\mathrm{m/s^2}],$$

- La force de gravité terrestre est donnée par :

$$F_g = gm\,[\mathrm{N}],$$

- La force exercée par l'air sur la capsule seule, ou bien équipée de parachutes, est proportionnelle à la vitesse (v) suivant la formule :

$$F_f = \alpha v\,[\mathrm{N}],$$

  la valeur de α étant bien sûr différente avec ou sans parachute. Que vaut α lorsque la capsule à atteint sa vitesse d'équilibre sans parachute $(v = -100\,[\mathrm{m/s}])$? Le vecteur force étant dirigé vers le haut, et le vecteur vitesse vers la bas, α est forcément négatif.
- Après l'ouverture du parachute en $t = 0$, la vitesse suit une évolution due à l'intégration des équations précédentes :

$$v(t) = v(t=0) + \int_0^t v'\,dt = A + B\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\quad [\mathrm{m/s}]$$

  Vous aurez à déterminer A, B, et τ pour $t > 0$. Vous aurez besoin de l'équation qui donne l'altitude en fonction du temps : $x(t)$ que vous obtiendrez en intégrant $v(t)$.

Calculer dans un premier temps la décélération maximale subie par les astronautes à l'ouverture des parachutes. La décélération dure-t-elle plus que quelques secondes?

La capsule est équipée d'un altimètre GPS. Vous devez ensuite proposer une altitude d'ouverture du parachute qui permettra à la capsule d'avoir atteint la vitesse adéquate au moment de toucher le sol. L'altitude du sol est supposée égale à zéro (niveau de la mer). Un collègue vous souffle à l'oreille qu'en attendant 5 fois le temps τ, la vitesse sera stabilisée car on peut supposer $\exp(-5) = 0.01$.

Solution proposée par Martine Devillers

Prenons le sens positif vers le haut. La force de gravité F_g est orienté vers le bas et la force de frottement F_f est orientée vers le haut.

Lorsque la vitesse est stabilisée à $v_1 = -100\ [\text{m/s}]$, la capsule est en MRU, et donc en vertu du principe d'inertie, nous savons que la résultante des forces est nulle :

$$\overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_{f,1}} = \vec{0} \Rightarrow -F_g + F_{f,1} = 0 \Rightarrow -mg + \alpha_1 v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{mg}{v_1} = \frac{100\times 10}{-100} = -10\ [\text{kg/s}]$$

Après ouverture des parachutes, la vitesse doit se stabiliser à $v_2 = -10\ [\text{m/s}]$, ce qui correspond à $\alpha_2 = \dfrac{mg}{v_2} = \dfrac{1000\times 10}{-10} = -1000\ [\text{kg/s}]$

Au moment de l'ouverture des parachutes, la force de frottement passe brusqement à $F_{f,2} = \alpha_2 v_1$. La résultante des forces est alors : $\vec{R} = -mg + \alpha_2 v_1$.

Ce qui correspond à une décélération de :

$$v' = \frac{R}{m} = -g + \frac{\alpha_2 v_1}{m} = -10 + \frac{-1000\times -100}{1000} = 90\ [\text{m/s}^2].$$

Revenons à la situation après l'ouverture des parachutes. La vitesse est donnée par

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v'\,dt = A + B\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

or
$$\left.\begin{array}{l} \text{à } t=0 \Rightarrow v(0) = -100 = A + B \\ \text{à } t = 5\tau \Rightarrow v(5\tau) = -10 = A + B\,e^{-5} \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{100}{100} \text{ et } B = -\frac{1000}{11}$$

<u>Détermination de τ</u>

A l'instant $t = 0$, la décélération doit être inférieure à 90 $[\text{m/s}^2]$

$$\frac{dv}{dt} = B\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \le 90 \Rightarrow \tau = -\frac{B}{90} = -\frac{-\frac{1000}{11}}{90} = \frac{100}{99} \simeq 1\,[\text{s}]$$

On vérifie que la vitesse se stabilise après 5 s puisque $5\times\tau = 5\times 1 = 5\,[\text{s}]$

<u>Détermination de l'altitude</u>

On cherche $x(0)$ sachant que $x(5\tau) = 0$

$$\text{Or } x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt = x(0) + \int_0^t \left(A + B\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = x(0) + \left[At - B\,\tau\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^t$$

$$= x(0) + At - B\,\tau\,e^{-\frac{t}{\tau}} + B\,\tau \Rightarrow x(0) = x(t) - At + B\,\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow x(0) = -5A\,\tau - \frac{99}{100}B\,\tau = -5\left(-\frac{100}{11}\right)\frac{100}{99} - \frac{99}{100}\left(-\frac{1000}{11}\right)\frac{100}{99} \simeq \boxed{137\,[m]}$$