Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 6

EXANA060 – EXANA069

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Octobre 03

EXANA060 – Bruxelles, septembre 2002.

Dans l'espace euclidien R^3 muni du repère orthonormé *Oxyz* soient .

- S la surface plane située dans le plan *z = 0* et délimitée par les 2 courbes d'équations respectives.

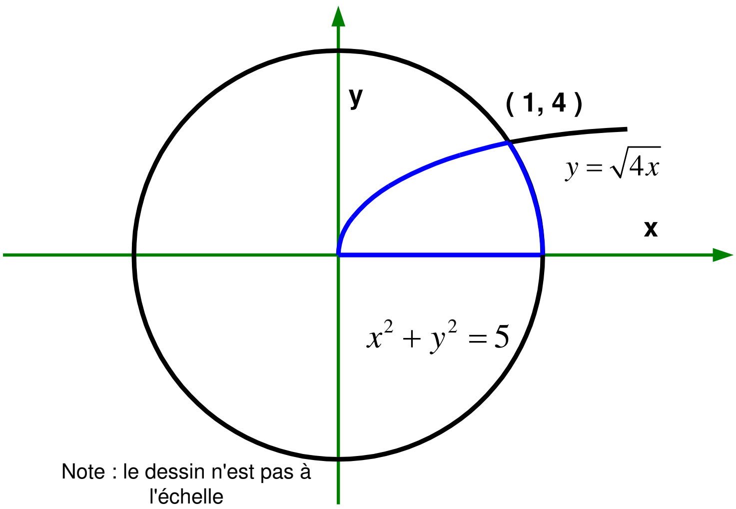
$$x^2 + y^2 = 5 \quad , \quad y = \sqrt{4x}$$

et l'axe des x.

- D le solide engendré par la rotation de S (d'un tour complet) autour de l'axe *Ox*.

a) Faire un croquis de S

b) Calculer le volume de D.



b) Points d'intersection des deux courbes.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \sqrt{4x} \end{cases} \rightarrow \; .4x = 5 - x^2 \;\rightarrow\; x^2 + 4x - 5 = 0 \;\rightarrow\; (x+5)(x-1) = 0$$

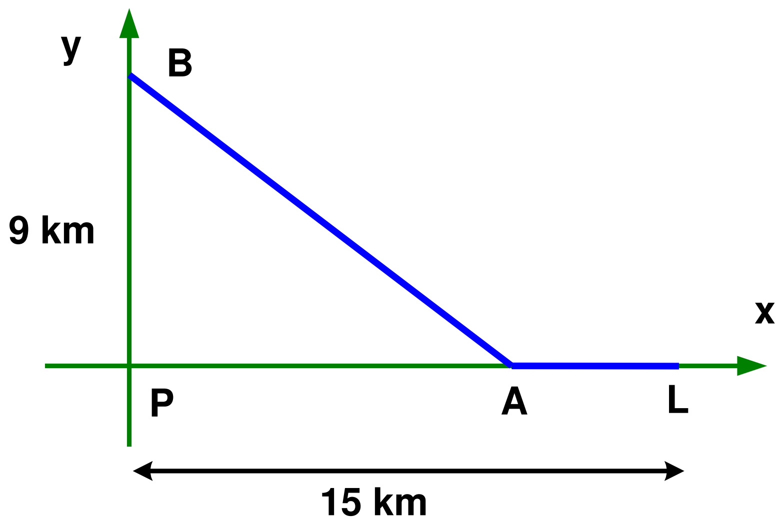
$$\rightarrow \quad x = 1 \quad \text{car } x > 0.$$

$$D = 2\pi\left[\int_0^1 4x\,dx + \int_1^{\sqrt{5}} (5 - x^2)\,dx\right] = 2\pi\left[\left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^1 + \left[5x - \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}\right]$$

$$= 2\pi\left[2 + 5\sqrt{5} - \frac{5^{\frac{3}{2}}}{3} - 5 + \frac{1}{3}\right] = \frac{4\pi}{3}\left[5^{\frac{3}{2}} - 4\right] = 30{,}0769$$

EXANA061 – Bruxelles, septembre 2002.

Un bateau est au mouillage à 9 km du point P le plus proche de la côte supposée rectiligne.
Un messager doit parvenir au plus vite à une localité située sur celle-ci à 15 km du point P.
Etant donné qu'un messager parcourt 5 km à l'heure à pied et 4 km à l'heure en canot, en quel point de la berge doit-il accoster pour arriver au plus vite à cette localité ?



Dans un repère Oxy, soient B le point où se trouve le bateau, P le point de la côte le plus proche du bateau, A le point d'accostage, L le point de la localité.

	Distance	Temps
En canot	$BX = \sqrt{x^2+9^2}$	$t_{BX} = \dfrac{\sqrt{x^2+9^2}}{4}$
A pied	$AL = 15 - x$	$t_{AL} = \dfrac{15-x}{5}$

$\rightarrow$ Temps total : $t = \dfrac{\sqrt{x^2+9^2}}{4} + \dfrac{15-x}{5}$

Le temps sera minimal si sa dérivée est nulle.

$$t' = \frac{1}{4}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9^2}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{x^2+9^2}}{20.\sqrt{x^2+9^2}}$$

$\rightarrow \;\; 5x - 4\sqrt{x^2+9^2} = 0 \;\rightarrow\; 25x^2 = 16x^2 + 16.9^2 \;\rightarrow\; x = 12$

C'est bien un minimum car si $x < 12, t' > 0$ et $x > 12, t' > 0$

EXANA062 – Bruxelles, septembre 2002.

Soit la fonction f de R dans R définie par

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et préciser les domaines de définition de $f'(x)$ et $f''(x)$

d) Déterminer une équation cartésienne

   a. de la tangente à C au point d'abscisse 2
   b. des asymptotes (éventuelles) de C

e) Établir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant

   a. les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale).
   b. les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
   c. les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
   d. les points d'inflexion de C, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C.

f) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c).

$$a)\ f'(x)=\left(\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}\right)'$$
$$=\frac{1}{3}\left((x+2)(x-1)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\left[(x-1)^2+2(x+2)(x-1)\right]$$
$$=(x+1)(x+2)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}}\right)'=\left((x+1)(x+2)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)'$$
$$=(x+2)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}+(x+1)\left(-\frac{2}{3}\right)(x+2)^{-\frac{2}{3}-1}(x-1)^{-\frac{1}{3}}+(x+1)(x+2)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left[3(x+2)(x-1)-2(x+1)(x-1)-(x+1)(x+2)\right]$$
$$=-2(x+2)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{(x+2)(x-1)\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}}$$

Domaines :

$f'(x)$ $\quad \Re\setminus\{-2;1\}$ $\qquad\qquad$ $f''(x)$ $\quad \Re\setminus\{-2;-1\}$

$b.1)$ Tangente en $x=2$

$x=2 \ \rightarrow\ y=\sqrt[3]{(2+2)(2-1)^2}=\sqrt[3]{4}=1.59$

Pente : $f'(2)=\dfrac{2+1}{\sqrt[3]{(2+2)^2(2-1)}}=1.19$

$\rightarrow\ y-1.59=1.19(x-2)\quad\rightarrow\quad y=1.19x-0.79$

$b.1)$ Asymptotes

Pas d'asymptotes horizontale ou verticale

Asymptote oblique : $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{x}=1$

$p=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}-x\right]=0$

$\rightarrow$ L'asymptote : $y=x$

c.1) Racines

$f(x)$	$x=-2$	$x=1$
$f'(x)$	$x=-1$	
$f''(x)$	Pas de racine	

Signes de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^{-\frac{2}{3}}$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^{-\frac{1}{3}}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$/$	$+$	0	$-$	$/$	$+$	$+$

$\rightarrow$ Maximum en : $\left(-1; \sqrt[3]{4}\right)$

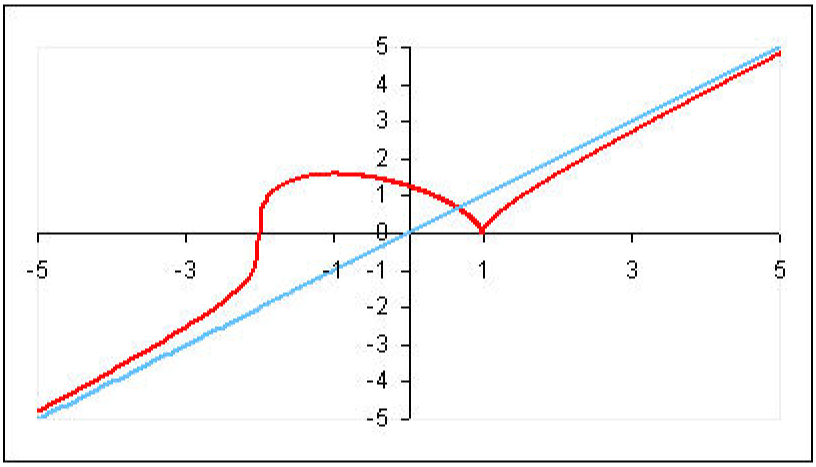
Signes de $f''(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$(x+2)^{-\frac{5}{3}}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^{-\frac{4}{3}}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$/$	$-$	$/$	$-$	$-$

$\rightarrow$ Point d'inflexion en : $(-2; 0)$

Tableau des variations

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$/$	$+$	0	$-$	$/$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$/$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x))$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$
Conca		$\cap$	I		$\cap$			$\cap$	



EXANA063 – Louvain, juillet 2000, série 1.

a) Calculez la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\sqrt[3]{1-x}\right)$$

b) Calculer :

$$\int_1^e \frac{\sin^2(\ln x)}{x}\,dx$$

c) Donner une formule de récurrence pour :

$$\int x^p e^x dx \qquad p \text{ entier positif}$$

Appliquer la formule trouvée à $p = 1$, 2 , 3 et éventuellement à un entier quelconque

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-\sqrt[3]{1-x}\right)$

Sans faire de calcul, on peut directement dire que la limite est $-\infty$.

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-\sqrt[3]{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\left(\dfrac{1-x}{-x}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{-x^3}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\left(1-0\right)=-\infty$

b) $I = \int_1^e \frac{\sin^2(\ln x)}{x} dx$

Soit $t = \ln x \rightarrow x = e^t \rightarrow dx = e^t dt$ et $\begin{cases} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$

$\rightarrow I = \int_0^1 \sin^2 t dt$

$u = \sin t \rightarrow u' = \cos t$

$v' = \sin t \rightarrow v = -\cos t$

$\rightarrow I = [-\sin t \cos t]_0^1 + \int_0^1 \cos^2 t dt = [-\sin t \cos t]_0^1 + \int_0^1 dt - \int_0^1 \sin^2 t dt$

$\rightarrow 2I = \left[-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^1 + [t]_0^1 \rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^1 + [t]_0^1\right) = -\frac{\sin 2}{4} + \frac{1}{2} = 0.2727$

c) $I = \int x^p e^x dx$

$u = x^p \;\rightarrow\; u' = px^{p-1}$

$v' = e^x \;\rightarrow\; v = e^x$

$\rightarrow I = e^x x^p - p\int x^{p-1}e^x dx$

$u = x^{p-1} \;\rightarrow\; u' = (p-1)x^{p-2}$

$v' = e^x \;\rightarrow\; v = e^x$

$\rightarrow I = e^x x^p - pe^x x^{p-1} + p(p-1)\int x^{p-2}e^x dx$

Et ainsi de suite.

$I = e^x x^p - pe^x x^{p-1} + p(p-1)e^x x^{p-2} - .... + (-1)^{n+1}.p(p-1)(p-2)..(p-n)\int x^{p-n-1}e^x dx$

Que l'on peut réécrire comme suit :

$$I = e^x\left[x^p + p!\left(-\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} - \frac{x^{p-3}}{(p-3)!} + ...\right)\right]$$

$$= e^x\left[x^p + p!\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^i \frac{x^{p-i}}{(p-i)!}\right] + C$$

Ou encore, plus simplement : $I = e^x \sum_{i=0}^{i=p}(-1)^i \frac{p!x^{p-i}}{(p-i)!}$

Exemples

$\underline{\underline{p=1}}$ $\quad I = e^x\left[x^1 + 1!(-1)^1\frac{x^0}{0!}\right] = e^x(x-1) + C$

$\underline{\underline{p=2}}$ $\quad I = e^x\left[x^2 + 2!\left((-1)^1\frac{x^1}{1!} + (-1)^2\frac{x^0}{0!}\right)\right] = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

$\underline{\underline{p=3}}$ $\quad I = e^x\left[x^3 + 3!\left((-1)^1\frac{x^2}{2!} + (-1)^2\frac{x^1}{1!} + (-1)^3\frac{x^0}{0!}\right)\right]$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

$\underline{\underline{p=5}}$ $\quad I = e^x\left[x^5 + 5!\left((-1)^1\frac{x^4}{4!} + (-1)^2\frac{x^3}{3!} + (-1)^3\frac{x^2}{2!} + (-1)^4\frac{x^1}{1!} + (-1)^5\frac{x^0}{0!}\right)\right]$

$$= e^x(x^5 - 5x^2 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

Voir aussi : EXANA017

EXANA064 – Louvain, juillet 2000, série 1.

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^3 - 3x^2}$$

a) Donnez le domaine de f
b) Donnez les équations des asymptotes de f
c) Esquissez le graphe de f sans calculer de dérivée, mais en sachant que la dérivée de f s'annule une seule fois en $x \approx 0.9$
d) Calculez la dérivée de f et montrer qu'elle n'a qu'une seule racine dans son domaine de définition.

a) $\text{dom } f =]-\infty, 0[\bigcup]0, 3[\bigcup]3, +\infty[$

ou bien : $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

b) AV : $x = 0$ et $x = 3$

AH : $y = 1$

c) Pour aider, on remarquera aussi que :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f = +\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f = -\infty$,

Le graphique est donné plus bas.

d) $$f'(x) = \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-3)} \right)' = \frac{-3x^3 + 2x^2 - 6x + 6}{x^3(x-3)^2}$$

On sait que cette dérivée est nulle pour $x \approx 0.9$

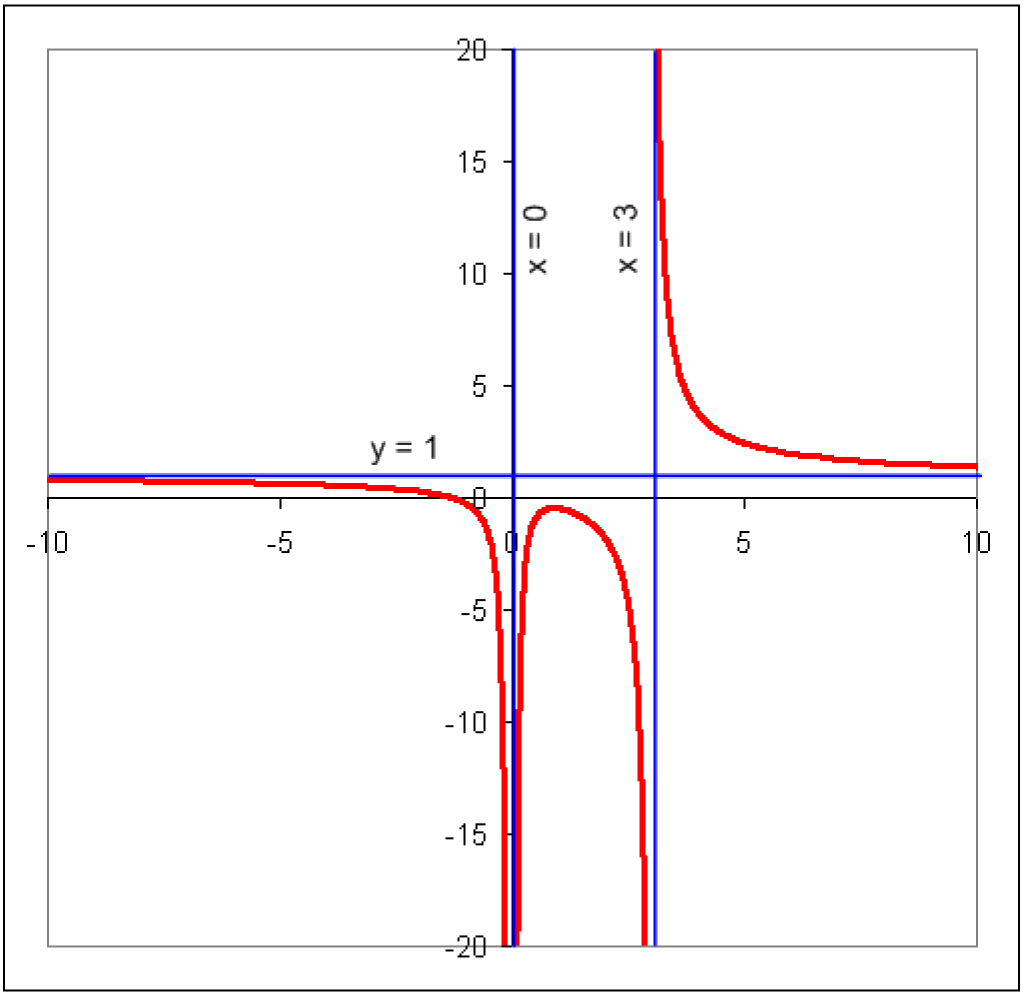
Factorisons le numérateur N

Horner :

	3	2	1	0
	-3	2	-6	6
0.9		-2.7	-0.63	5.967
	-3	-0.7	-6.63	≈ 0

$\rightarrow N \approx -(x - 0.9)(3x^2 + 0.7x + 6.63)$

Le second facteur à un Δ négatif, donc 0.9 est la seule racine réelle.



Corrigé le 3 avril 2006 (Sabine Bouzette)

EXANA065 – Louvain, juillet 2000, série 1.

Déterminer a pour que les courbes :

$$y = \ln x$$

et

$$y = a\sqrt{x}$$

soient tangentes.
Calculer ensuite l'aire du pseudo-triangle formé par ces deux courbes et l'axe des x.

a) Soit (x_1, y_1) les coordonnées du point de tangence.

Les deux courbes sont tangentes si en ce point les coefficients angulaires de leur tangente respective sont égaux; donc si les dérivées sont égales :

$$\rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{a}{2\sqrt{x_1}} \;\rightarrow\; a = \frac{2}{\sqrt{x_1}}$$

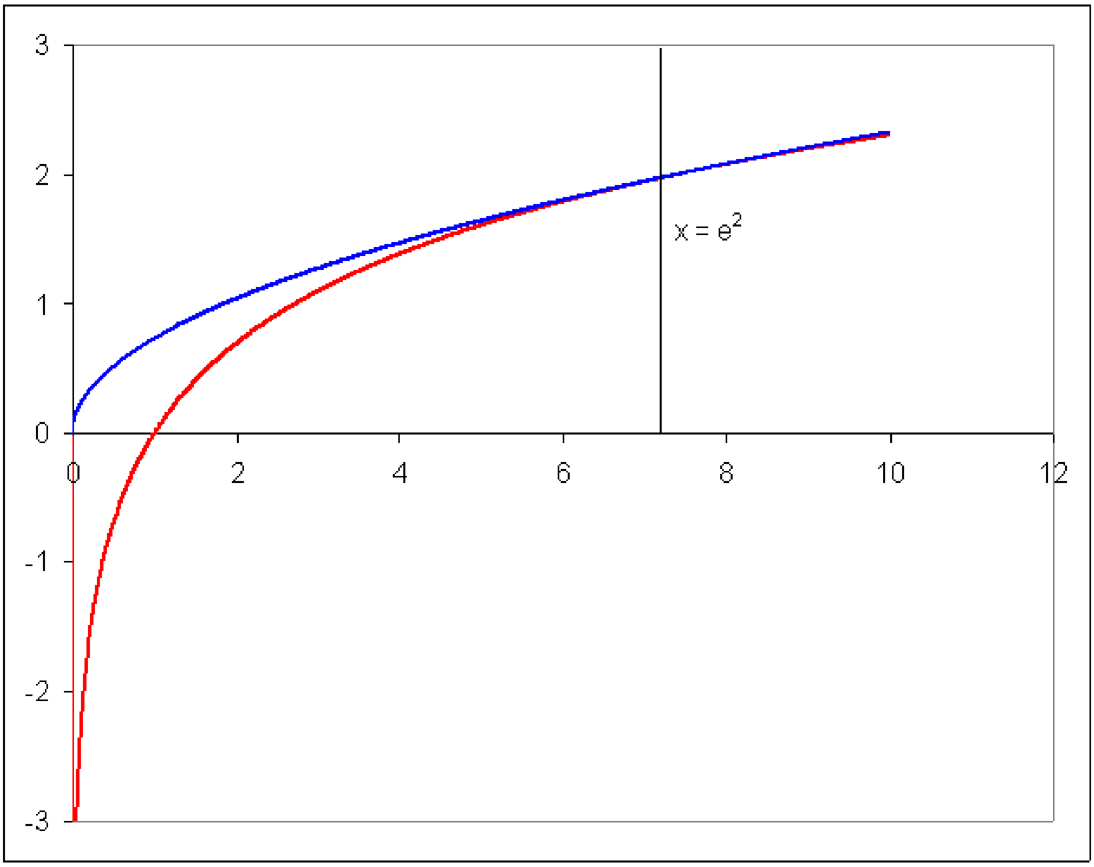
Mais le point appartient aux deux courbes : $\rightarrow \ln x_1 = \frac{2}{\sqrt{x_1}}\sqrt{x_1}$

$$\rightarrow x_1 = e^2 \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{2}{e}}$$

Le graphique représente les deux courbes.

b) L'aire du pseudo-triangle est donné par :

$$\int_0^{e^2} \sqrt{x}\,dx - \int_1^{e^2} \ln x\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e^2} - \left[x\ln x - x\right]_1^{e^2} \approx 5$$


3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
10
12
x = e2

EXANA066 – Louvain, juillet 2000, série 2.

a) Calculez les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

b) Calculez :

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$$

c) Calculez :

$$\int x^3 \sin\left(x^2\right)dx$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2|x|}$$

$$\text{Donc : }\begin{cases}\text{si } x\to+\infty & \lim\to+\frac{1}{2}\\ \text{si } x\to-\infty & \lim\to-\frac{1}{2}\end{cases}$$

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_0^1\frac{x+1}{(1+x)^3}dx-\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx=\int_0^1\frac{d(x+1)}{(1+x)^2}-\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}$

$$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right]_0^1=\left[-\frac{2x+1}{2(x+1)^2}\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

c) $I = \int x^3 \sin x^2 \; dx = \frac{1}{2}\int x^2 \sin x^2 \; dx^2$

Soit $t = x^2 \;\rightarrow\; I = \frac{1}{2}\int t \sin t \; dt$

$u \;= t \qquad\qquad u' = 1$

$v' = \sin t \qquad v \;= -\cos t$

$\rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-t\cos t + \int \cos t \; dt\right) = \frac{1}{2}\left(-t\cos t + \sin t\right)$

$\rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-x^2 \cos x^2 + \sin x^2\right) + C$

EXANA067 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2000, série 2.

On considère la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

a) Donnez le domaine de f.

b) Donner les équations des asymptotes de f.

c) Esquissez le graphe de f sans calculer de dérivée, mais en sachant que la dérivée de f s'annule en $x = 0.7$ et en $x = 2.8$.

d) Sans calcul supplémentaire, esquissez le graphe de

$$g(x) = \frac{x^2(x-1)}{x-2}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. (Utiliser le fait que $g(x) = f(x)^2$ sur le domaine de f)

a) Domaine : $\text{Dom}_f = -\infty,1] \cup]2,+\infty$

b) Asymptotes : $\boxed{AV \equiv x = 2}$

$$AO \equiv y = mx + p$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 1$$

$$p = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1\right)}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{x-1}{x-2}-1\right)}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1}.\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x-1}{x-2}-1\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1-x+2)}{x-2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{AO \equiv y = x + \frac{1}{2}}$$

c) La dérivée de f s'annule en $x \approx 0.7$. Or $f = 0$ pour $x = 0$ et $x = 1$.

De plus, entre 0 et 1, f est positive $\rightarrow$ Un maximum en $x \approx 0.7$

Coordonnées du maximum $= (0.7;0.336)$

La dérivée de f s'annule en $x \approx 2.8$

On a $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\rightarrow$ Un minimum en $x \approx 2.8$

Coordonnées du minimum $= (2.8;4.2)$

Le graphique est donné plus bas.

d) $g(x)$ a un maximum en $x \approx 0.7$ $\rightarrow$ $M:(0.7;0.113)$

$g(x)$ a un minimum en $x \approx 2.8$ $\rightarrow$ $m:(2.8;17.64)$

De plus, $f(x)$ et $g(x)$ ont la même asymptote : $x = 2$

avec $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x) = -\infty$

Il est dés lors facile de tracer $g(x)$.

Bien que ce ne soit pas demandé dans la question, donnons le calcul des dérivées.

$$f'(x)=\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)'=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+x\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}\cdot\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\left(\frac{x-1}{x-2}-\frac{x}{2(x-2)^2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\frac{2(x-1)(x-2)-x}{2(x-2)^2}=\boxed{\frac{2x^2-7x+4}{2(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{2x^2-7x+4}{2(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(4x-7)(x-2)^2-(2x^2-7x+4).2(x-2)}{(x-2)^4}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{2x^2-7x+4}{2(x-2)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}\cdot\frac{x-1-x+2}{(x-1)^2}\right]$$

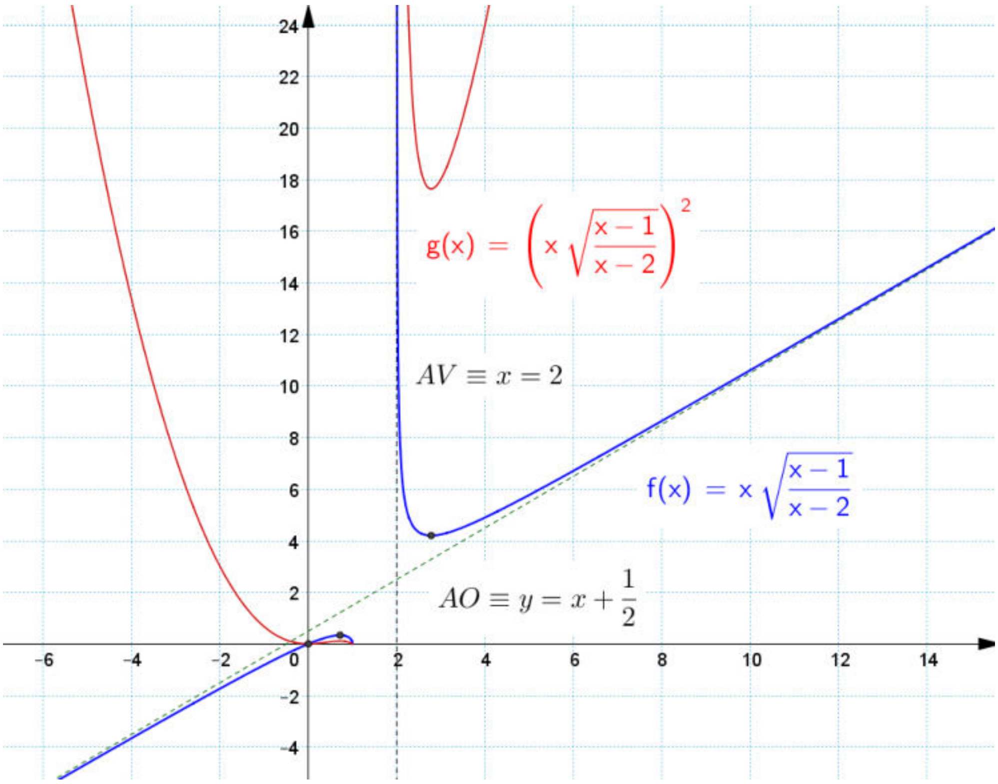
$$=\frac{1}{4(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\left[\frac{\cancel{4x^2}-7x-8x+14\cancel{-4x^2}+14x+8}{(x-2)}\cdot\frac{x-2}{x-1}\right.$$

$$\left.+\frac{2x^2-7x+4}{(x-1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\left[\frac{-x+6}{x-1}++\frac{2x^2-7x+4}{(x-1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\left(2(6-x)(x-1)+2x^2-7x+4\right)$$

$$=\boxed{\frac{7x-8}{4(x-1)^2(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}$$



Modifié le 31 juillet 2011 (Olivier Tohane). Modifié le 6 juillet 2020

EXANA068 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2000, série 2.

a) Calculer le volume obtenu en faisant tourner autour de l'axe des x la surface déterminée par

$$y^2 \le x \exp\left(-x^2\right) \quad \text{et} \quad 0 \le x \le a$$

b) Déterminer a pour que ce volume soit égal à $\frac{\pi}{4}$

---

a) $V = \pi \int_0^a x e^{-x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^a e^{-x^2} d\left(-x^2\right) = -\frac{\pi}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^a = -\frac{\pi}{2} \left(e^{-a^2} - 1 \right)$

b) $V = \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \left(e^{-a^2} - 1 \right) \to e^{-a^2} - 1 = -\frac{1}{2} \to e^{-a^2} = \frac{1}{2} \to -a^2 = -\ln 2$

$\to a = \sqrt{\ln 2} \approx 0.83255$

Modifié le 26 juin 2012

EXANA069 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2000.

$a)$ Calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

$b)$ Calculer :

$$\int \cos 3x \sin x \, dx$$

$c)$ Calculer :

$$\int \sin(5x)\, e^{kx}\, dx \ , \quad k \ \text{entier positif}$$

$$a) \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{(1+x-1)\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{3}{2}$$

b) $I = \int \cos 3x \sin x \, dx$

Rappel : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\to I = \int \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\sin x \, dx = 4\int \cos^3 x \sin x \, dx - 3\int \cos x \sin x \, dx$$

$$= -\cos^4 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \cos^2 x\left(\frac{3}{2}-\cos^2 x\right) + C$$

c) $I = \int_0^{\pi/2} \sin(5x) e^{kx}\, dx$

$$u = \sin 5x \rightarrow u' = 5\cos 5x$$

$$v' = e^{kx} \rightarrow v = \frac{1}{k} e^{kx}$$

$$\rightarrow I = \left[\frac{1}{k} \sin 5x\, e^{kx} \right]_0^{\pi/2} - \frac{5}{k} \int_0^{\pi/2} \cos 5x\, e^{kx}\, dx$$

$$u = \cos 5x \rightarrow u' = -5\sin 5x$$

$$v' = e^{kx} \rightarrow v = \frac{1}{k} e^{kx}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{k}\left[\sin 5x\, e^{kx} \right]_0^{\pi/2} - \frac{5}{k}\left(\frac{1}{k}\left[\cos 5x\, e^{kx} \right]_0^{\pi/2} + \frac{5}{k} \int_0^{\pi/2} \sin(5x) e^{kx}\, dx \right)$$

$$= \left[\frac{1}{k} \sin 5x\, e^{kx} - \frac{5}{k^2} \cos 5x\, e^{kx} \right]_0^{\pi/2} - \frac{25}{k^2} I$$

$$\rightarrow I = \frac{k^2}{25+k^2} \frac{1}{k} \left[e^{kx} \left(\sin 5x - \frac{5}{k} \cos 5x \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{k}{25+k^2} \left(e^{\frac{k\pi}{2}} - \frac{5}{k} \right)$$

Modifié le 8 juin 2011 (Fabienne Zoetard)