

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 7

EXANA070 – EXANA079

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Octobre 03

EXANA070 – EPL, UCL, LLN, septembre 2000.

On considère la fonction définie par

$$f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$$

- Donnez la plus petite période de f .
- Calculer f' et situer les extrema avec précision.
- Situer les points d'inflexion de manière approximative.
- Esquissez le graphe de f sur une période.

a) Période : $p = 2\pi$

b) $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$

Les extrema sont donnés par : $f'(x) = 0$

$$\rightarrow \cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x) \rightarrow \begin{cases} 2x = \pi - x + 2k\pi \\ 2x = -\pi + x + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

c) Les points d'inflexion sont donnés par $f''(x) = 0$

$$\rightarrow -2 \sin x - 4 \sin 2x = 0 \rightarrow \sin x = -2 \sin 2x \rightarrow \sin x = -4 \sin x \cos x$$

c.1 $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

c.2 $1 = -4 \cos x \rightarrow \cos x = -\frac{1}{4} \rightarrow x = \pm 1.823 + k\pi$

d) Le graphique est donné ci-dessous.

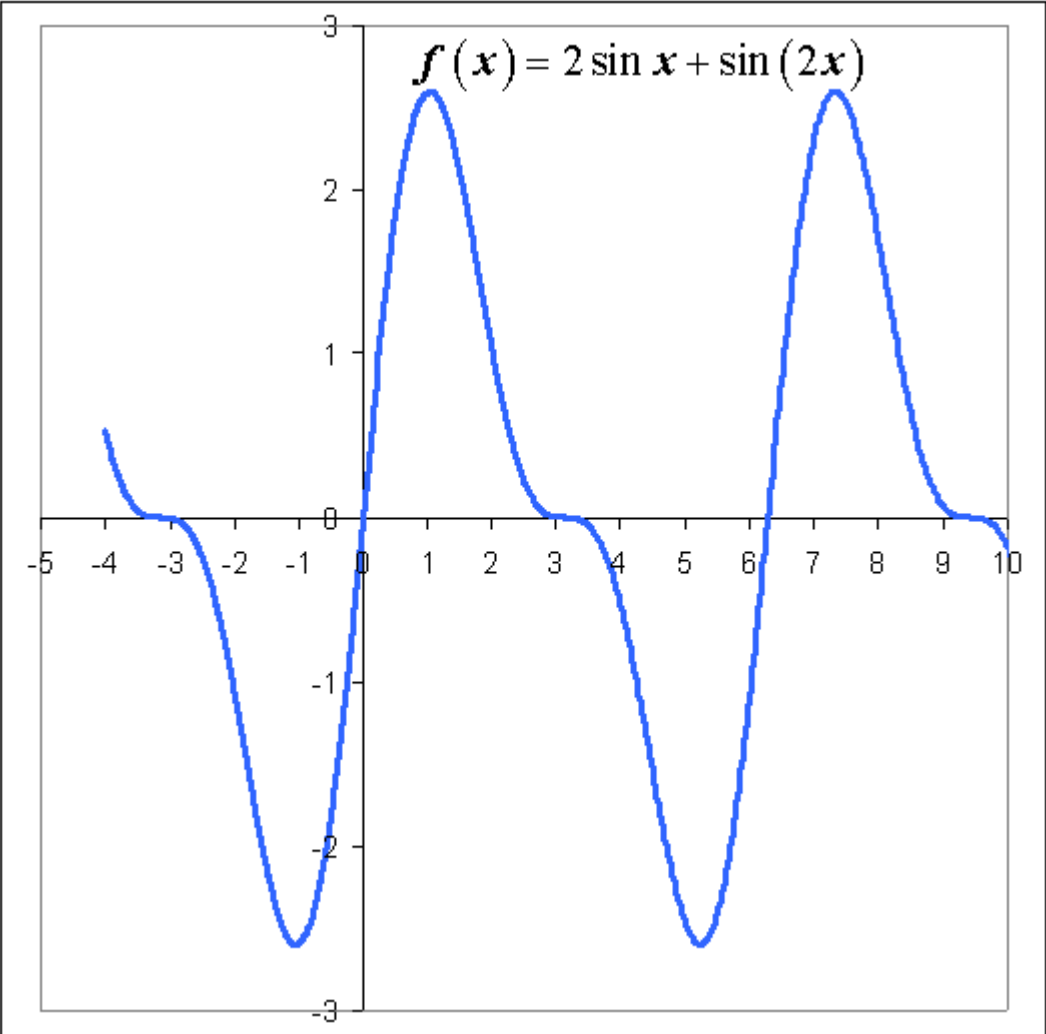
On remarquera que

d.1 $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow y \approx 2.6$ Maximum

d.2 $x = -\frac{\pi}{3} \rightarrow y \approx -2.6$ Minimum

d.3 $f(\pi) = f'(\pi) = f''(\pi) = 0$

Donc, la tangente au point d'inflexion est l'axe des x .



EXANA071 – EPL, UCL, LLN, septembre 2000.

Les courbes $y = x^2$ et $y = e^{-x+1}$ se coupent en un point P dont l'abscisse est un entier.

a) Déterminer l'abscisse a de ce point P .

b) On considère la fonction définie

$$\text{par } f(x) = x^2 \quad \text{si } 0 \leq x \leq a$$

$$\text{et par } f(x) = e^{-x+1} x^2 \quad \text{si } a \leq x$$

$$\text{Calculer : } \int_0^b f(x) dx \quad \text{pour } a \leq b$$

c) Déterminer la valeur de b pour que : $\int_0^b f(x) dx = 1$

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 \\ y = e^{-x+1} \end{cases} \rightarrow 2 \ln a = -a + 1 \rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I &= \int_0^b f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^b e^{-x+1} dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[-e^{-x+1} \right]_1^b = \frac{4}{3} - e^{-b+1} \end{aligned}$$

$$\text{c) } I = \int_0^b f(x) dx = 1 \rightarrow \frac{4}{3} - e^{-b+1} = 1 \rightarrow b = \ln 3 + 1$$

EXANA072 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série1.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$

b) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$

c) $\int \ln[(1+x)^2] dx$

d) $\int \cos x e^{\sin x} dx$

a) Appliquons l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\text{b) } I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx^4}{1+x^8}$$

$$\text{Soit } t = x^4 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} [\arctan t]_0^1 \approx 0.196$$

$$\begin{aligned} \text{c) } I &= \int \ln[(1+x)^2] dx = 2 \int \ln(1+x) dx = 2 \int \ln(1+x) d(1+x) \\ &= 2[(1+x) \ln(1+x) - (1+x)] = 2(1+x)[\ln[1+x] - 1] + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } I = \int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

EXANA073 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série1.

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x}$$

- Donner le domaine et la période de f
- Donner les asymptotes de f
- Situez les extrema avec précision (abscisses et ordonnées)
- Donnez le graphe de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$
- Sans calculer des dérivées, donnez les graphes de

$$\left| \frac{1 + \sin x}{\sin x} \right|$$

et de

$$\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\sin x} \right|$$

a) $\text{dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

Période : $p = 2\pi$

b) Asymptotes : $x = k\pi$

c) $f'(x) = \frac{\cos x \sin x - (1 + \sin x) \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x) = 0$ si $\cos x = 0 \quad x = k \frac{\pi}{2}$

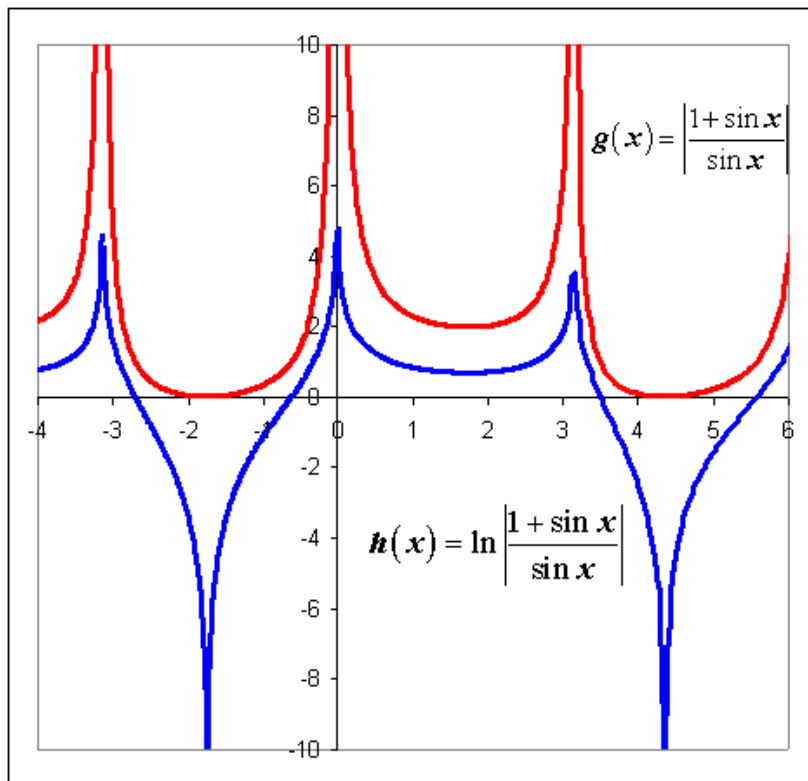
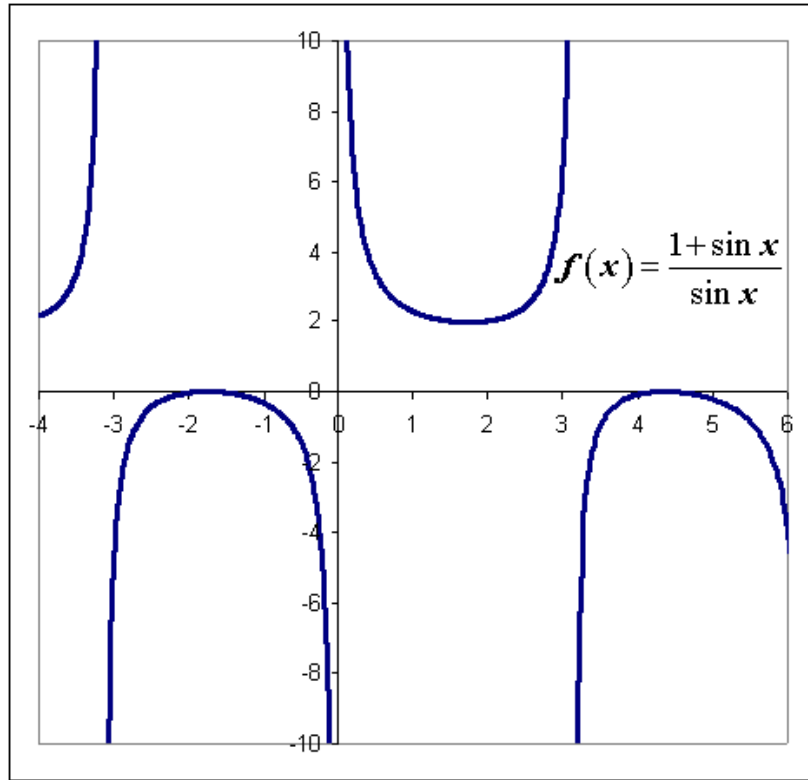
Si k est pair, on a un minimum, car $f'(x) < 0$ avant $k \frac{\pi}{2}$ et > 0 après

Dans ce cas, $f(x) = 2 \rightarrow$ Minimum $m : \left(k \frac{\pi}{2}, 2 \right)$

Si k est impair, on a un maximum, car $f'(x) > 0$ avant $k \frac{\pi}{2}$ et < 0 après

Dans ce cas, $f(x) = 0 \rightarrow$ Maximum $M : \left(k \frac{\pi}{2}, 0 \right)$

d) et e) Les graphes sont donnés ci-dessous.



EXANA074 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série 1.

Combien de mazout me reste-t-il ? C'est la question qu'une ménagère anxieuse pose à son chauffagiste. Celui-ci sait que la cuve est un cylindre de rayon R , de longueur L et de volume $1000 \pi \cong 3142$ litres. Sa jauge indique h (mètres). Pour avoir un calcul simple, le chauffagiste, malin, a installé une cuve de rayon $R = \frac{1}{2}$ (mètre) et de longueur $L = 4$ (mètres).

a) Donnez le volume V du mazout en fonction de α (cf. fig) :

$$V = f(\alpha)$$

b) En hiver, les quantités V , h et α diminuent malheureusement assez vite avec le temps et on a :

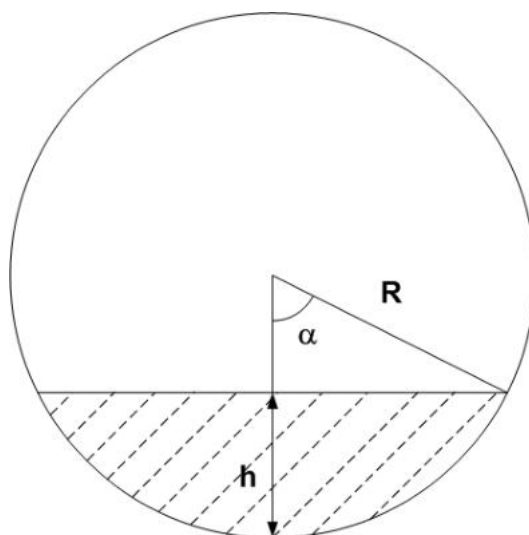
$$V(t) = f(\alpha(t))$$

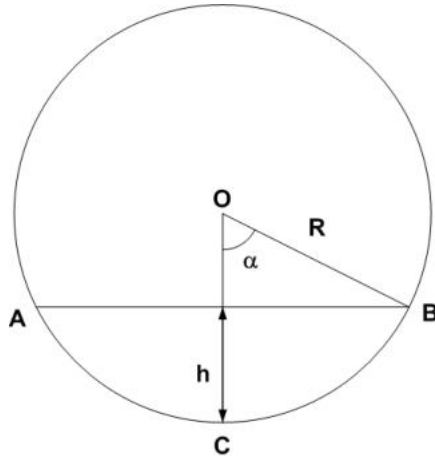
En supposant que la consommation correspond à un débit $V'(t) = -10^{-3}$ (mètres cube par heure), donnez la vitesse angulaire $\alpha'(t)$ en fonction de α

c) Exprimez ensuite la hauteur h en fonction de α et donnez la vitesse de descente $h'(t)$ du mazout en mètres par heure au moment où $\alpha = \pi/2$ (c.à.d. $h = R$). Donnez ensuite cette valeur de $h'(t)$ en centimètres par jour.

d) Exprimez α en fonction de h et donnez le volume V restant en fonction de h (pour une valeur quelconque de h) :

$$V = g(h)$$





a) Aire du secteur ACB : $A_s = \alpha R^2$

$$\text{Aire du triangle AOB} : A_T = |AB| \frac{R-h}{2} = R^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\text{car : } |AB| = 2R \sin \alpha \quad \text{et} \quad R-h = R \cos \alpha$$

$$\text{Volume de mazout : } V = f(\alpha) = (A_s - A_T) L$$

$$\rightarrow V = \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) LR^2$$

$$\text{Dans le cas présent : } V = \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

b) On a : $V'(t) = f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ (dérivée d'une composée de fonction)

$$\text{Or } f'(\alpha) = (1 - \cos 2\alpha) LR^2 \rightarrow \alpha'(t) = \frac{V'(t)}{(1 - \cos 2\alpha) LR^2}$$

$$\text{Dans le cas présent : } \alpha'(t) = -\frac{10^{-3}}{1 - \cos 2\alpha}$$

$$\text{c) } h = R(1 - \cos \alpha) \rightarrow h'(t) = R \sin \alpha \cdot \alpha'(t) = \frac{V'(t) \sin \alpha}{(1 - \cos 2\alpha) LR}$$

$$\text{Dans le cas présent, avec } \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad h'(t) = -\frac{1}{4} 10^{-3} \text{ m}^3 / h$$

$$\rightarrow h'(t) = -0,6 \text{ cm / jour}$$

Note : Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le niveau se trouve juste à mi-hauteur. La variation de volume étant petite (24 litres/jour), ces 24 l correspondent au volume d'un parallépipède rectangle dont la hauteur H vaut :

$$0,024 = 2RLH \rightarrow 0,024 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot H \rightarrow H = 0,006 \text{ m} = 0,6 \text{ cm}$$

$$d) V = R^2 L \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Or } \cos \alpha = \frac{R-h}{R} \quad \alpha = \arccos \frac{R-h}{R} \quad \sin \alpha = \frac{1}{R} \sqrt{2Rh-h^2}$$

$$V = R^2 L \left(\arccos \frac{R-h}{R} - \frac{R-h}{R} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{2Rh-h^2} \right)$$

$$= R^2 L \arccos \frac{R-h}{R} - (R-h) L \sqrt{h(2R-h)}$$

$$\text{Dans le cas présent : } V = \arccos(1-2h) - 2(1-2h) \sqrt{h(1-h)}$$

EXANA075 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série2.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{2x^2} - 4x}$

b) $\int \frac{1-x+x^2}{1+x} dx$

c) $\int x \ln(1+x^2) dx$

d) $\int \tan^2 x dx$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{2x^2} - 4x} = 1$ C'est immédiat.

b)
$$\begin{aligned} \int \frac{1-x+x^2}{1+x} dx &= \int \frac{1+2x+x^2-3x}{1+x} dx = \int \frac{(1+x)^2}{1+x} dx - 3 \int \frac{x}{1+x} dx \\ &= \int (1+x) dx - 3 \left[\int dx - \int \frac{dx}{1+x} \right] \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 - 3x + 3 \ln(x+1) \\ &= 3 \ln(x+1) + \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x^2) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[(1+x^2) \ln(1+x^2) - (1+x^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(1+x^2) (\ln(1+x^2) - 1) \right] + C \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C \end{aligned}$$

EXANA076 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série2.

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

- Donner le domaine et la période de f
- Donner les asymptotes.
- Calculer la dérivée f' et analysez son signe.
- Situez les extrema avec précision (abscisses et ordonnées)
- Donnez le graphe de f .

a) $\text{dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}$

b) Asymptotes

b.1) Asymptotes horizontales :

$$x = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$x = -1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$x = -2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty \end{cases}$$

b.2) Asymptote verticale

$$y = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$c) f'(x) = -\frac{3x^2 + 6x + 2}{x^2(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{\left(x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}$$

Le signe de $f'(x) = 0$ est le signe du numérateur car le dénominateur est toujours positif

x	$-\infty$	-2	$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$+\infty$						
$f'(x)$	0	$-$	$/$	$-$	0	$+$	$/$	$+$	0	$-$	$/$	$-$	0

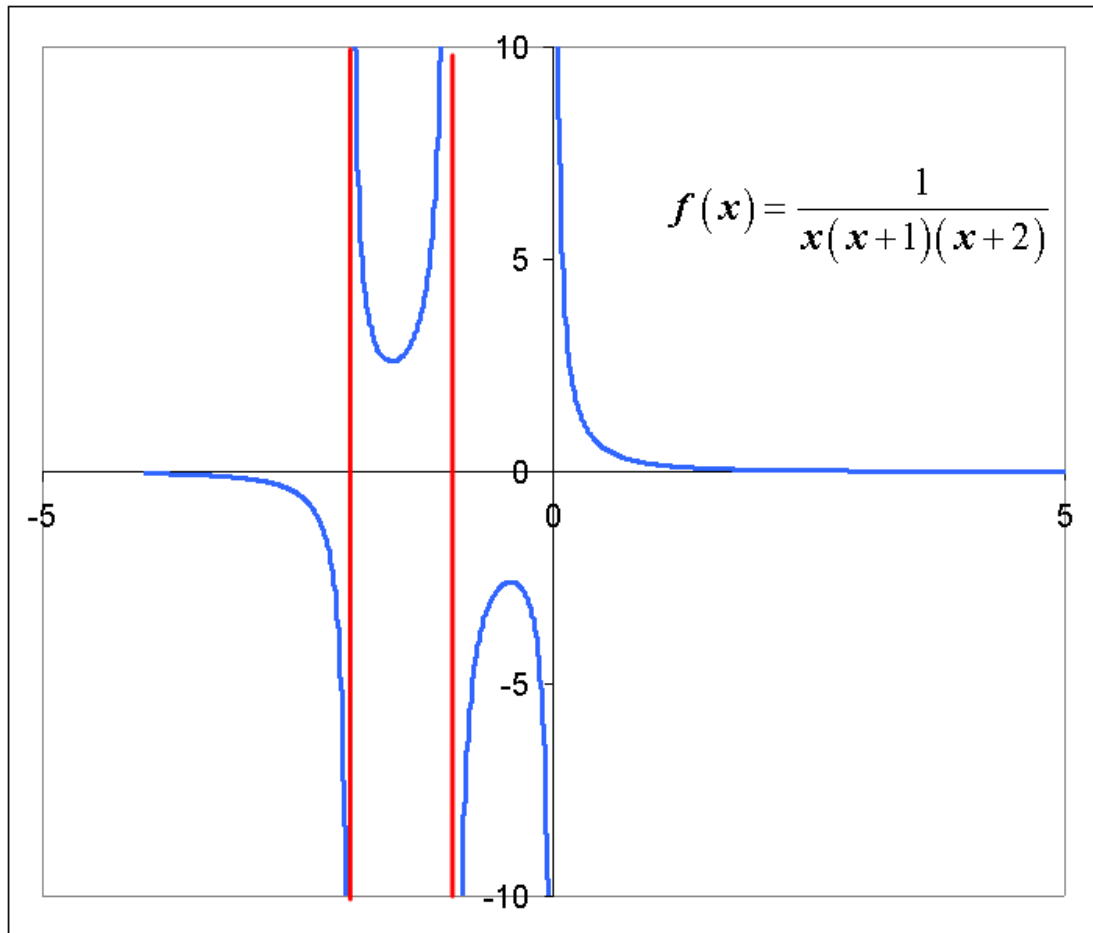
d) Extrema

d.1 Minimum : $m\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}; 2.598\right)$

d.2 Maximum: $M\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{3}; -2.598\right)$

e) Le graphe est donné ci-dessous. Pour aider à le tracer, voici le tableau signe de $f(x)$

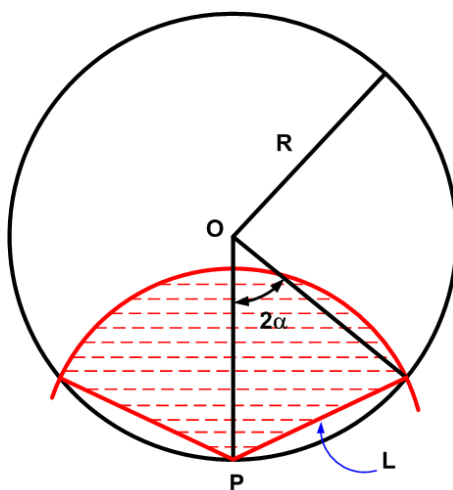
	-2	-1	0				
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$f(x)$	$-$	$/$	$+$	$/$	$-$	$/$	$+$

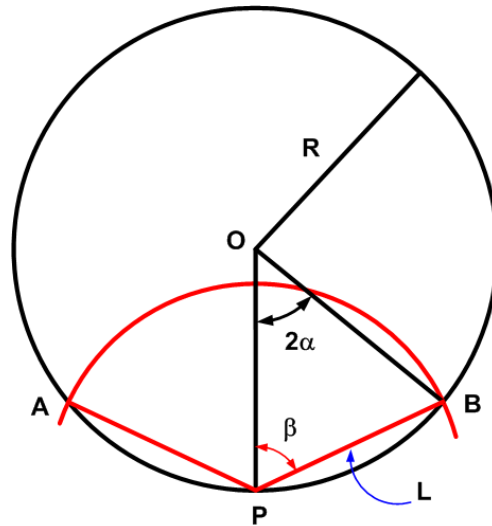


EXANA077 – EPL, UCL , LLN, juillet 2001, série 2.

On considère un disque de centre O et de rayon R . On considère ensuite le secteur circulaire hachuré de centre P et de rayon L ($0 \leq L \leq 2R$) où P est un point du cercle (circonférence) de centre O (cf.fig.)

- Donnez l'aire S du secteur hachuré en fonction de L ($S = g(L)$) et en fonction de α ($S = f(\alpha)$).
- Donnez la fonction $\varphi(\alpha)$ telle que
$$f'(\alpha) = 2 \sin \alpha \varphi(\alpha)$$
- Sachant que $\varphi(\alpha)$ est une fonction décroissante α dans $[0, \pi/2]$, déterminer si le maximum de S est obtenu pour une valeur L_0 de L telle que $L_0 < R\sqrt{2}$, $L_0 = R\sqrt{2}$ ou $R\sqrt{2} < L_0$
- Montrez que $\varphi(\alpha)$ est une fonction décroissante dans $[0, \pi/2]$.





a) Le triangle OPB est isocèle, et soit β l'angle OPB. On a :

$$\sin \alpha = \frac{L}{2R} \quad (1) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Aire du secteur circulaire est :

$$S = \frac{2\beta}{2\pi} \cdot \pi L^2 = \beta L^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) L^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{L}{2R} \right) L^2 = g(L)$$

Pour obtenir $S = f(\alpha)$, on utilise (1)

$$\rightarrow S = f(\alpha) = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin^2 \alpha \quad (2)$$

b) Dérivons (2) $\rightarrow S' = 2 \sin \alpha \cdot 2R^2 [(\pi - 2\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha]$

Par identification avec : $f'(\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \varphi(\alpha)$

On déduit que : $\varphi(\alpha) = 2R^2 [(\pi - 2\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha]$

c) Si $S = f(\alpha)$ passe par un maximum, c'est que sa dérivée s'annule.

Or dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \alpha$ est toujours positif (sauf en 0 qui est une valeur triviale, car alors $L = 0$), donc $\varphi(\alpha)$ doit s'annuler entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

En effet :

$$\text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha) = 2\pi R^2 > 0$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(\alpha) = -2R^2 < 0$$

Et puisque par hypothèse $\varphi(\alpha)$ est décroissante, il n'y a qu'une seule racine.

$$\text{D'autre part, si } L_0 = R\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi(\alpha) = \sqrt{2}R^2(\pi - 1) > 0$$

$$\text{Donc, il faut : } \alpha > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{L_0}{2R} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow L_0 > \sqrt{2}R$$

d) Montrons que $\varphi(\alpha)$ est bien une fonction décroissante. Pour cela, il suffit de montrer que sa dérivée est toujours négative.

$$\varphi'(\alpha) = -2R^2 [3 \cos \alpha + (\pi - 2\alpha) \sin \alpha]$$

Dans l'intervalle considéré, étudions le signe des termes du deuxième facteur :

$$\begin{cases} 3 \cos \alpha > 0 \\ \pi - 2\alpha > 0 \\ \sin \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(\alpha) < 0 \Rightarrow \varphi(\alpha) \text{ est une fonction décroissante.}$$

EXANA078 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x} \right)$

b) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

d) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{x(1+x)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$

b) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x d(\tan x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$

$$\text{c) } I = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Soit } x = \sin y \rightarrow \begin{cases} dx = \cos y dy \\ \sqrt{1-x^2} = \cos y \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int \cos^2 y dy$$

$$u = \cos y \rightarrow u' = -\sin y$$

$$v' = \cos y \rightarrow v = \sin y$$

$$\rightarrow I = \cos y \sin y + \int \sin^2 y dy = \cos y \sin y + \int dy - \int \cos^2 y dy$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}(\cos y \sin y + y) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C$$

$$\text{d) } I = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx$$

$$\text{Soit } t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = \sqrt{2} dt$$

$$\rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan t = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + C$$

Modifié le 25 avril 2014 (Jean Perbal)

EXANA079 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x-3}$$

- Donner le domaine f
- Calculer les limites de f quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow \infty$
- Donnez les asymptotes s'il y en a
- Calculez la dérivée f'' . Donnez les zéros de f'' . Spécifiez dans lequel (lesquels) des intervalles suivants la dérivée f'' s'annule :

$$] 0, 1], [1, e], [e, 3], [3, 9], [9, 16], [16, \infty [$$

- Donnez le graphe de f en situant fort approximativement les extrema (spécifier le signe de leurs ordonnées) éventuels

a) $\text{dom}_f =] 0, 3 [\cup] 3, \infty [$

b) Limites

b.1) x tend vers 0 par valeurs positives. Appliquons l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$$

b.2) x ne peut tendre que vers $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

c) Asymptote verticale : $x = 3$

$$d) f'(x) = \frac{\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)(x-3) - x \ln x}{(x-3)^2} = \frac{-3 \ln x + x - 3}{(x-3)^2}$$

Les zéros de la dérivée sont donnés par : $-3 \ln x + x - 3 = 0$

Avec une machine à calculer suffisamment puissante, on peut calculer le(s) point(s) d'intersection des courbes : $y = 3 \ln x$ et $y = x - 3$

→ On trouve deux zéros $x \approx 0.42368$ et $x \approx 9.86784$.

Cependant, comme vous n'êtes pas sensé avoir ce genre de machine, il nous faut procéder autrement.

Compte tenu des intervalles proposés, calculons le signe de f' pour les points suivants :

x	0.1	1	e	2.9	3.1	9	16	100
$f'(x)$	+	-	-	-	-	-	+	+

→ La dérivée s'annule dans les intervalles : $] 0, 1]$ et $[9, 16]$

e) Le graphique est donné ci-dessous.

Les coordonnées des extrema sont :

$$M : (0.424, 0.1412) \quad m : (9.868, 3.289)$$

