

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 8**

EXANA080 – EXANA089

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Avril 04

## EXANA080 – Louvain, septembre 2001.

Esquissez très sommairement le graphe de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = e^{-x} |\sin x|$$

a) Calculer la valeur de :

$$A = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

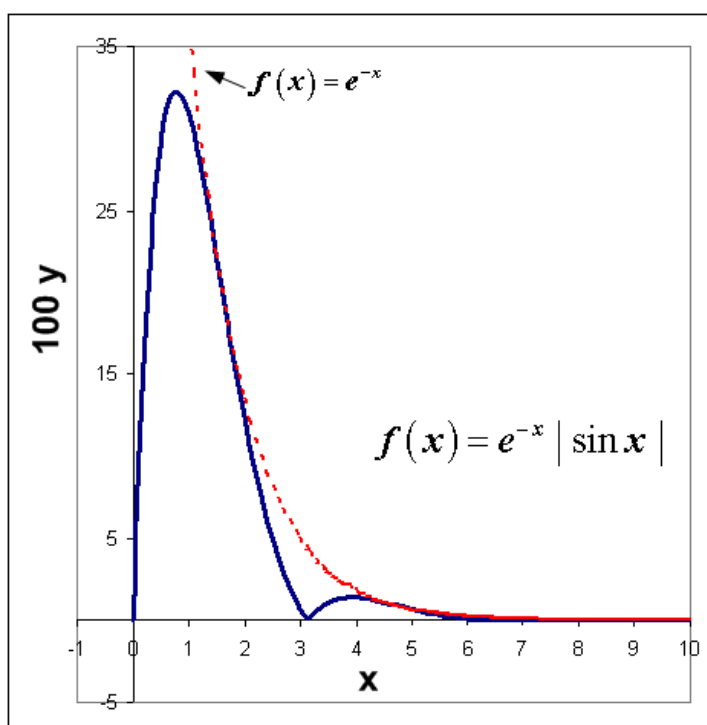
b) En vous basant sur le point précédent, calculer

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$$

c) Donner la valeur de

$$\int_0^{20\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$$

Esquissons la fonction. Pour aider, on représentera aussi la fonction  $e^{-x}$ .  
Note : L'axe des  $y$  a été multiplié par 100.



$$\text{a) } A = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

$$u = \sin x \rightarrow u' = \cos x$$

$$v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$A = \left[ -e^{-x} \sin x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$$

$$u = \cos x \rightarrow u' = -\sin x$$

$$v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$A = \left[ -e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

$$\rightarrow A = \left[ -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) \right]_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$$

b) Il suffit de remarquer que :

$$B = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

$$= -\left[ -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{e^{-2\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

$$\text{De même : } C = \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx = \frac{e^{-3\pi} + e^{-2\pi}}{2}$$

$$\text{Par conséquent : } \int_0^{3\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx = A + B + C = \frac{1}{2} + e^{-\pi} + e^{-2\pi} + \frac{1}{2} e^{-3\pi}$$

Et donc par extrapolation, on peut écrire :

$$D = \int_0^{20\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx = \frac{1 + e^{-20\pi}}{2} + \sum_{p=1}^{p=19} e^{-p\pi}$$

Le second terme est une progression géométrique :

$$\rightarrow D = \frac{1 + e^{-20\pi}}{2} + e^{-\pi} \frac{1 - e^{-19\pi}}{1 - e^{-\pi}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi} - 1} \approx 0.54516$$

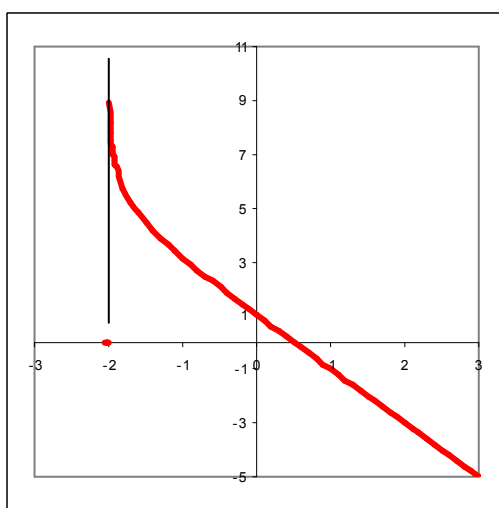
## EXANA081 – Liège, juillet 2002.

Soit la fonction

$$f(x) = \ln \frac{e}{e^{bx} - c}$$

où  $b$  et  $c$  sont des paramètres réels strictement positifs et  $e = \exp(1)$

- a) Déterminez les valeurs de  $b$  et  $c$  pour que  $f(x)$  soit définie sur  $] -2, +\infty [$  et admette les asymptotes  $x = -2$  et  $y = -2x + 1$  (en  $+\infty$ ), i.e. pour que  $f(x)$  admette la représentation graphique suivante.



- b) calculer l'abscisse  $x$  en laquelle le graphe de  $f(x)$  admet une tangente de pente à  $-4$

*Suggestion* :  $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$  si  $x$  et  $y$  sont strictement positifs

a)  $b$  et  $c$  sont strictement positifs  $\rightarrow f(x)$  est définie si  $e^{bx} > c \rightarrow x > \frac{\ln c}{b}$ .

Asymptote verticale en  $x = -2 \rightarrow \frac{\ln c}{b} = -2 \rightarrow c = e^{-2b}$

On peut donc réécrire la fonction :  $f(x) = 1 - \ln(e^{bx} - c)$

La fonction admet une asymptote oblique  $y = mx + p$  en  $+\infty$

$$\rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln(e^{bx} - c)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-be^{bx}}{e^{bx} - c} = -b$$

Et comme  $m = -2 \rightarrow b = 2 \rightarrow c = e^{-4}$  et  $f(x) = 1 - \ln(e^{2x} - e^{-4})$

Mais, il faut aussi vérifier que  $p = 1$

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{2x} - e^{-4}) - 2x] \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^{2x} - e^{-4}}{e^{2x}} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-(4+2x)}) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = -4 \rightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - e^{-4}} = -4 \rightarrow e^{2x} = 2(e^{2x} - e^{-4}) \rightarrow e^{2x} = 2e^{-4}$$

$$\rightarrow 2x = \ln(2e^{-4}) = \ln 2 - 4$$

$$\text{Finalement : } x = \frac{1}{2} \ln 2 - 2$$

## EXANA082 – Liège, juillet 2002.

On désire approcher la fonction  $f(x) = x$  par une fonction du type  $g(x) = \alpha + \beta \cos x$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .

- a) Montrer que le choix  $\alpha = \pi/2$  revient à exiger que les moyennes de  $f(x)$  et de  $g(x)$  sur  $[0, \pi]$  soient égales, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx$$

- b) Montrer que :

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} x \cos x dx = -2$$

- c) En utilisant les résultats du point b) et en posant  $\alpha = \pi/2$ , calculer l'erreur quadratique moyenne

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx$$

et déterminer  $\beta$  pour que celle-ci soit minimale.

$$a) \text{ Moyenne de } f(x) : \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Moyenne de } g(x) : \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\alpha + \beta \cos x) \, dx = \frac{1}{\pi} (\alpha x + \beta \sin x) \Big|_0^{\pi} = \alpha$$

Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , les moyennes sont égales.

$$b) 1) \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left( \pi + \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{\pi}{2}$$

2) Intégrons par parties

$$u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad \rightarrow \quad v = \sin x$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

c) Erreur quadratique moyenne :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ x - \frac{\pi}{2} - \beta \cos x \right]^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( x^2 + \frac{\pi^2}{4} + \beta^2 \cos^2 x - \pi x - 2\beta x \cos x + \pi\beta \cos x \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \left( x^2 + \frac{\pi^2}{4} + -\pi x \right) \, dx + \beta^2 \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - 2\beta \int_0^{\pi} x \cos x \, dx + \pi\beta \int_0^{\pi} \cos x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi^3}{2} + \frac{\beta^2 \pi}{2} + 4\beta + 0 \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{12} + \frac{\beta^2 \pi}{2} + 4\beta \right)$$

On minimise l'erreur en annulant la dérivée par rapport à  $\beta \rightarrow \beta\pi + 4 = 0$

$$\rightarrow \beta = -\frac{4}{\pi}$$

Et comme la dérivée est négative si  $\beta < -\frac{4}{\pi}$  et positive si  $\beta > -\frac{4}{\pi}$ ,

on a bien un minimum

## EXANA083 – Liège, septembre 2002.

Etudiez le graphe de la fonction

$$f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs du paramètre  $a \geq 0$

En particulier, déterminez

- Le domaine de définition de  $f$
- Le domaine de continuité de  $f$
- Les asymptotes éventuelles
- Croissance / décroissance / extrema
- Concavité / points d'inflexion

Esquissez le graphe de  $f$

$a = 0$  La fonction n'est définie nulle part.

$a > 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{dom arc tan } u = \mathbb{R} \\ \text{dom } \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ]-a, a[ \end{array} \right\} \rightarrow \text{dom } f = ]-a, a[$$

$f(x)$  est définie et indéfiniment continûment dérivable sur  $]-a, a[$

Asymptotes : Calculons les limites aux extrémités de l'intervalle  $]-a, a[$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = +\frac{\pi}{2}$$

$\rightarrow f$  est définie et continue sur  $]-a, a[$  e n'a pas d'asymptote



### Croissance, décroissance, extrema

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x(-x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$
$$= \frac{a^2 - x^2}{a^2} \frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$f'(x)$  est strictement positive sur  $] -a, a[$  et  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -a^+} f'(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = +\infty \end{cases}$

$\rightarrow f$  est strictement croissante sur  $] -a, a[$  avec des tangentes verticales

au graphe en  $-a^+$  et  $a^-$ . En 0, la pente de la tangente vaut  $f'(0) = \frac{1}{a}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \frac{-2x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

### Concavité, point d'inflexion

Tableau des signes  $f''(x)$

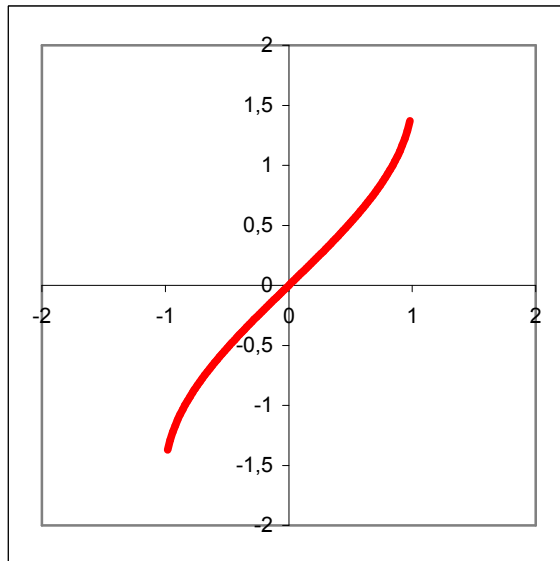
$] -a, 0[$	0	$] 0, a[$
-	0	+

$\rightarrow ] -a, 0[$  concavité vers le bas, 0 point d'inflexion,  $] 0, a[$  concavité vers le haut

### Conclusion

$f$  est une fonction strictement croissante sur  $] -a, a[$ , maximale en  $x = a$ , minimale

en  $x = -a$ . Point d'inflexion en  $x = 0$  à tangente d'équation  $y = \frac{x}{a}$



**EXANA084 – Liège, septembre 2002.**

a) Calculer

$$\int_1^e x \ln x \, dx \quad \text{où } e = \exp(1)$$

b) Généralisez le résultat obtenu en a) en montrant que, pour  $n \neq -1$

$$\int_1^e x^n \ln x \, dx = \frac{n e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

c) Soit la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \int_1^x (2-t) \ln t \, dt$$

Déterminez  $x$  correspondant au maximum de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$

a) Intégration par parties

$$u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\rightarrow \int_1^e x \ln x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \left( \frac{e^2}{2} - 0 \right) - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

b) Intégration par parties

$$u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^n \rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{puisque } n \neq -1)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_1^e x^n \ln x \, dx &= \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} \, dx = \left. \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} (n e^{n+1} + 1) \end{aligned}$$

c)  $g(x) = \int_1^x (2-t) \ln t \, dt \rightarrow g'(x) = (2-x) \ln x$

Les zéros de  $g'(x)$  sont  $x = 1$  et  $x = 2$

	1	2	$+\infty$
→ Tableau des signes :	$g'(x)$	+	0 -
	$g(x)$	↗	M ↘

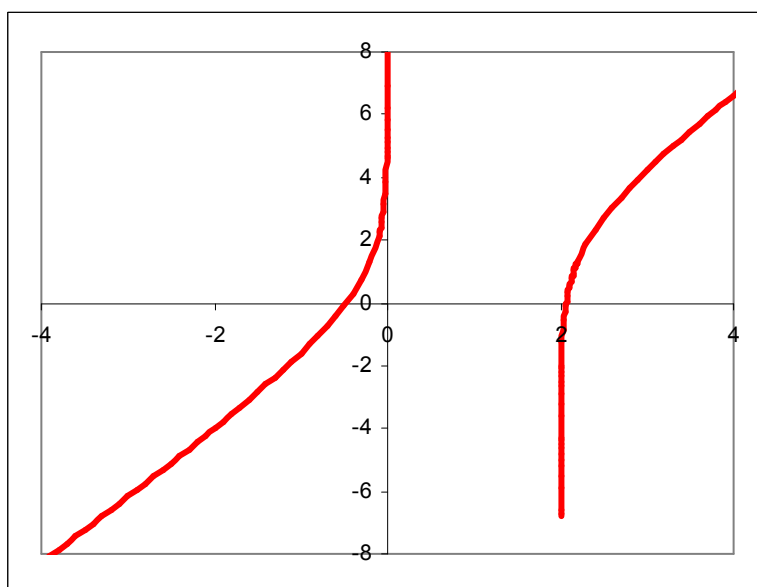
Donc  $g(x)$  est maximale en  $x = 2$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$

## EXANA085 – Liège, juillet 2003.

On considère la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{x}\right) + \frac{2x}{a}$$

où  $a$  désigne un paramètre réel non nul. En utilisant une calculatrice graphique, on obtient la représentation suivante du graphe de  $f$  dans le cas particulier où  $a = 1$ .



- Esquissez le graphique de  $f$  dans le cas où  $a$  désigne un paramètre réel strictement positif quelconque. Précisez, en justifiant, le domaine de définition de  $f$ , les limites caractéristiques et asymptotes, les extrema et changements de concavité éventuels.
- Sans effectuer aucun calcul, esquissez le graphique de  $f$  dans le cas où  $a$  est strictement négatif.

a) La fonction  $f$  est définie si  $\frac{1}{2} > \frac{a}{x}$  or  $a > 0 \rightarrow x < 0$  ou  $x > 2a$

La fonction  $f$  est indéfiniment continûment dérivable sur

$$E = ]-\infty, 0[ \cup ]2a, +\infty[$$

Limites et asymptotes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln \frac{1}{2} - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2a^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u + 4 = -\infty \rightarrow \text{Asymptotes verticales} \begin{cases} x = 0 \\ x = 2a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln \frac{1}{2} + \infty = +\infty$$

Recherchons s'il y a des asymptotes obliques

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{x} \right) + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( f(x) - \frac{2x}{a} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{x} \right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$\rightarrow$  Asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$  :  $y = \frac{2x}{a} - \ln 2$

Dérivées, variations et extrema

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{a}{x}} + \frac{2}{a} = \frac{2a}{x^2 - 2ax} + \frac{2}{a} = \frac{2(a^2 + x^2 - 2ax)}{a(x^2 - 2ax)} = \frac{2(a-x)^2}{ax(x-2a)}$$

Comme la fonction est définie sur  $E$ , on déduit que  $f'$  ne s'annule pas sur  $E$  et qu'elle reste strictement positive.  $\rightarrow$  pas d'extremum sur  $E$

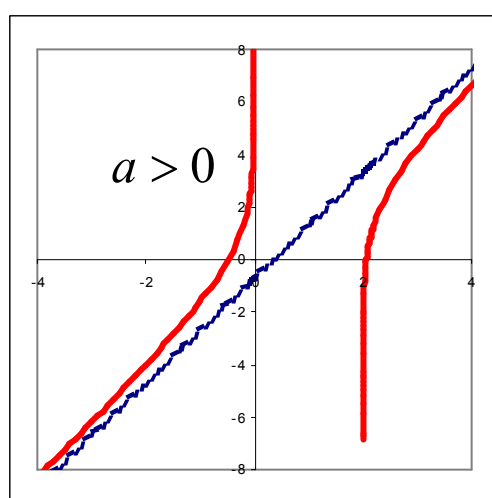
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 - 2(a-x)x(x-2a) - (a-x)^2(2x-2a)}{a x^2 (x-2a)^2} \\ &= \frac{2(a-x) \left[ -2x(x-2a) + 2(a-x)^2 \right]}{a x^2 (x-2a)^2} \\ &= \frac{4a(a-x)}{x^2 (x-2a)^2} \end{aligned}$$

$f''$  ne s'annule pas sur  $E$ , est positive sur  $]-\infty, 0[$  et négative sur  $]2a, +\infty[$

$\rightarrow f$  convexe sur  $]-\infty, 0[$  et concave sur  $]2a, +\infty[$ . Pas de point d'inflexion.

### Tableau des variation de $f$

	$-\infty$	$0^-$	$2a^+$	$+\infty$		
$f'$		+	$+\infty$	$+\infty$		
$f''$		+		-		
$f$	$-\infty$	$\nearrow \cup$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow \cap$	$+\infty$
	AO		AV	AV		AO
	$y = \frac{2x}{a} - \ln 2$	$x = 0$	$x = 2a$		$y = \frac{2x}{a} - \ln 2$	

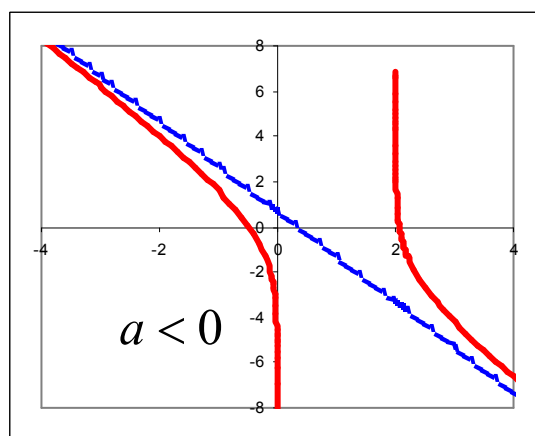


b) En notant  $f_a(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{x}\right) + \frac{2x}{a}$

On a  $f_{-a}(-x) = f_a(x)$

Donc si  $a < 0$ , la fonction est définie sur  $E = ]-\infty, 2a[ \cup ]0, +\infty[$

Le graphique de  $f_{-a}(x)$  est le symétrique de  $f_a(x)$  par rapport à  $Oy$



## EXANA086 – Liège, juillet 2003.

On appelle « coefficients de Fourier » de la fonction  $f$  les paramètres  $a_0, a_1, a_2, \dots$  et  $b_1, b_2, \dots$  définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

à condition que ces intégrales existent.

- c) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction  $f(x) = x$
- d) Montrez que les coefficients de Fourier d'une fonction paire de  $f$  sont donnés par

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

a) Calcul des  $a_k$

$$k=0 \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} = 0$$

$$k=1, 2, 3, \dots$$

Intégrons par parties

$$u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = \cos(kx) \quad \rightarrow \quad v = \frac{\sin(kx)}{k}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) \, dx = \frac{x \frac{\sin(kx)}{k}}{\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 0 + \frac{\cos(kx)}{k^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{(-1)^k}{k^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Calcul des  $b_k$

Intégrons par parties

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left( -x \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{k} \cos(k\pi) - \frac{\pi}{k} \cos(-k\pi) + \frac{\sin(kx)}{k^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= -\frac{2}{k} \cos(k\pi) = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion

$$a_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



$$b) a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right]$$

La première intégrale du second membre devient en posant  $x = -u$

$$- \int_{+\pi}^{\pi} f(-u) \cos(-ku) du = \int_0^{\pi} f(u) \cos(ku) du$$

Or  $f(-u) = f(u)$  et  $\cos(-u) = \cos u$

$$\rightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right]$$

La première intégrale du second membre devient en posant  $x = -u$

$$- \int_{+\pi}^0 f(-u) \sin(-ku) du = - \int_0^{\pi} f(u) \sin(ku) du$$

Or  $\sin(-u) = -\sin u$

$$\rightarrow b_k = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## EXANA087 – Liège, septembre 2003.

Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x - a}$$

où  $a$  désigne un paramètre réel strictement positif.  
En discutant s'il y a lieu en fonction de  $a$ , déterminer

- e) Le domaine de définition de  $f$
- f) Les asymptotes éventuelles
- g) Croissance / décroissance / extrema
- h) Concavité / points d'inflexion.

Etablir le tableau des variations de  $f$  et esquisser le graphe de  $f$ .

$$a) \text{ dom } f = ] -\infty, a [ \cup ] a, +\infty [$$

$$b) \underline{\text{AV}} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \rightarrow \text{AV: } x = a$$

AH Pas d'asymptote horizontale

$$\underline{\text{AO}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + a^2}{x^2 - ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a^2 + ax}{x - a} = a$$

$$\rightarrow \text{AO : } y = x + a$$

$$c) f'(x) = \frac{2x(x-a) - (x^2 + a^2)}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax - a^2}{(x-a)^2}$$

$$\text{Les zéros de } f' \text{ sont : } x^2 - 2ax - a^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = a(1 - \sqrt{2}) \\ x_2 = a(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ sur } ] -\infty, a(1 - \sqrt{2}) [ \cup ] a(1 + \sqrt{2}), +\infty [ \\ f'(x) < 0 \text{ sur } ] a(1 - \sqrt{2}), a [ \cup ] a, a(1 + \sqrt{2}) [ \end{cases}$$

$$d) f''(x) = \frac{(2x - 2a)(x - a)^2 - (x^2 - 2ax - a^2)2(x - a)}{(x - a)^4}$$

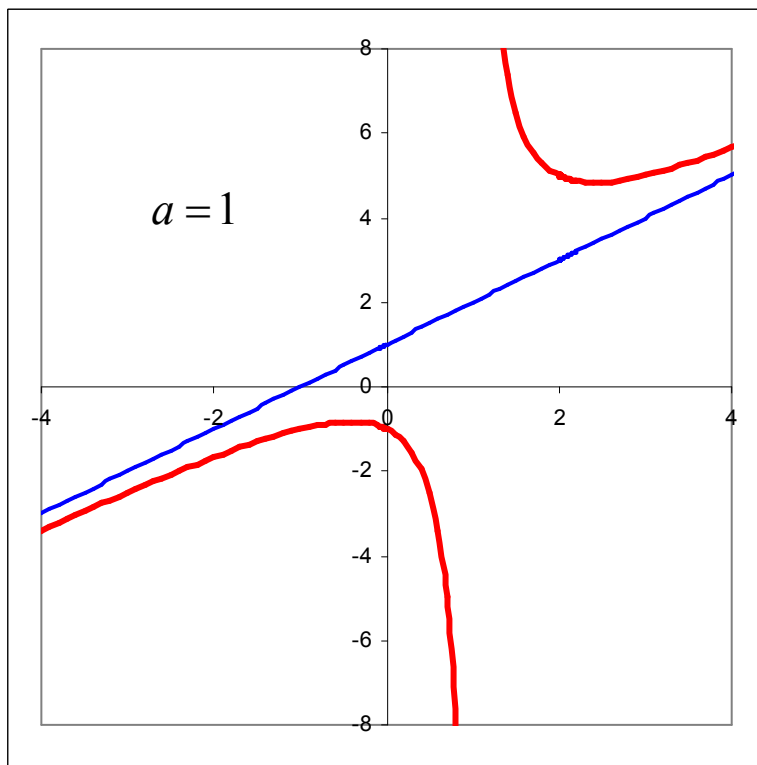
$$= \frac{4a^2}{(x - a)^3}$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} f'' < 0 \text{ si } x < a \rightarrow \text{concavité négative} \\ f'' > 0 \text{ si } x > a \rightarrow \text{concavité positive} \end{cases}$$

Pas de point d'inflexion puisque  $f''$  ne s'annule pas où elle existe.

Tableau des variations

	$-\infty$	$a(1-\sqrt{2})$	$a$	$a(1+\sqrt{2})$	$+\infty$			
$f'$		+	0	-	$\cancel{\neq}$	-	0	+
$f''$		-	-	-	$\cancel{\neq}$	+	+	+
$f$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\cancel{\neq}$	$\searrow$	Min	$\nearrow$
		$\cap$	$2a(1-\sqrt{2})$	$\cap$		$\cup$	$2a(1+\sqrt{2})$	$\cup$
	AO			AV				AO
	$y = x + a$			$x = a$				$y = x + a$



**EXANA088 – Liège, septembre 2003.**

a) Calculer

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

b) Si on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$$

où  $n$  est un naturel, a-t-on

$$I_n > I_{n+1}, \quad I_n = I_{n+1} \quad \text{ou} \quad I_n < I_{n+1}$$

pour tout  $n$  ? Justifier sans évaluer aucune intégrale.

$$a) I_1 = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left[ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right] dx = 1 - [\arctan x]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Calculons  $I_2$  par parties

$$u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad \rightarrow \quad v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\rightarrow I_2 = \left[ -\frac{x}{2(1+x^2)} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$b) \forall x \in [0, 1] \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{(1+x^2)^n} > \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$\text{car } \frac{x^2}{(1+x^2)^n} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^4}{(1+x^2)^{n+1}} > 0$$

Or si  $f(x) > 0 \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  est l'aire de la surface delimitée par  $Ox$ ,  
le graphe de  $f(x)$  et les droites  $x = a$  et  $x = b$

$$\text{Donc si } \frac{x^2}{(1+x^2)^n} > \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$\text{alors } \int_a^b \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx > \int_a^b \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$\rightarrow I_n > I_{n+1} \quad \text{pour tout naturel } n$$

$$\text{De fait on vérifie : } I_1 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215 > 0.143 \approx \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = I_2$$

## EXANA089 – Bruxelles, juillet 2003.

Soit la fonction  $f$  de  $\mathcal{R}^+$  dans  $\mathcal{R}$  définie par

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x) &= x(\ln x)^2 \quad \text{si } x > 0 \end{aligned}$$

Soit  $C$  la courbe d'équation  $y = f(x)$

- a) Vérifier que la fonction  $f$  est continue en 0
- b) Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  : préciser les domaines de définition de  $f'$  et  $f''$ .
- c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à  $C$  au point d'abscisse  $e$ .
- d) Etablir le tableau de variations de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  contenant
  - a. Les racines de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  (pour les valeurs approchées des racines utiliser une décimale et  $e \approx 2.72$ )
  - b. Les signes de  $f'(x)$  et de  $f''(x)$
  - c. Les extrema de  $f$ , les domaines de croissance et de décroissance de  $f$
  - d. Les points d'inflexion de  $C$  et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de  $C$ .
- e) Tracer soigneusement la courbe  $C$  d'après les résultats du d)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

La fonction est donc bien continue en  $x = 0$

$$b) f'(x) = \ln^2 x + 2x \ln x \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2)$$

$$\text{dom } f'(x) : x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{e^2} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} (\ln x + 2) + \ln x \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x + 1)$$

$$\text{dom } f''(x) : x > 0 \quad \text{et} \quad f''(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = \frac{1}{e}$$

$$c) f'(e) = \ln e (\ln e + 2) = 3 \quad f(e) = e$$

$$\rightarrow \text{Tangente} \equiv y - e = 3(x - e) \rightarrow y = 3x - 2e$$

### Tableau des variations

	0	$e^{-2} \approx 0.1$	$e^{-1} \approx 0.3$	1	$\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+
$f(x)$	0 ↗	Max ∩	↘	↘ I	↘ min ∪	↗

