Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 9

EXANA090 – EXANA099

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

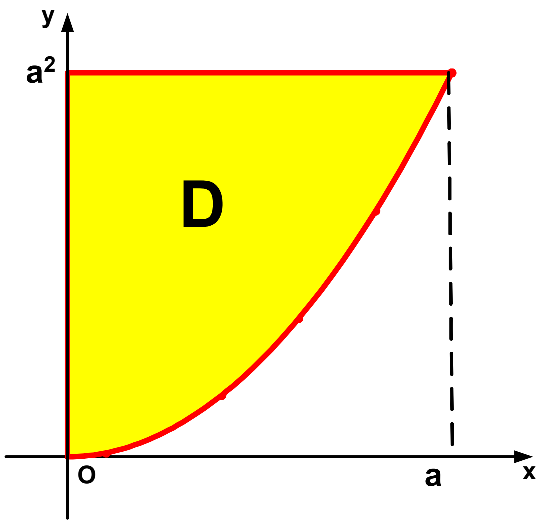
Avril 04

EXANA090 – Bruxelles, juillet 2003.

Dans l'espace euclidien $\mathfrak{R}^3$ muni du repère orthonormé *Oxyz*, soient

- D la région du plan *Oxyz*, définie par
  $$D := \left\{ (x, y, 0) \in R^3 \mid 0 \le x \le a ; x^2 \le y \le a^2 \right\}$$
- S le solide engendré par la rotation autour de l'axe *Oy* de la région D

1) Faire le croquis de D
2) Calculer l'aire de D
3) Calculer le volume de S



$$A_D = a^3 - \int_0^a x^2 dx = a^3 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

$$V_S = 2\pi \int_0^{a^2} \left(a - \sqrt{y} \right)^2 dy = 2\pi \left(a[y]_0^{a^2} - \frac{2}{3} \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a^2} \right)$$

$$= 2\pi \left(a^3 - \frac{2}{3} a^3 \right) = \frac{2\pi a^3}{3}$$

EXANA091 – Bruxelles, juillet 2003.

Soit

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

1) Sans calculer I_n, calculer $I_n + I_{n+2}$
2) En déduire I_8

$$a)\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \qquad I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx$$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x + \tan^{n+2} x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(1 + \tan^2 x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, d \tan x = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

$$b)\ I_8 = \frac{1}{6+1} - I_6 = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + I_4 = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \ I_8 = -\frac{76}{105} + \frac{\pi}{4}$$

Modifié le 3 mars 2005 (Maurice H). Modifié le 28 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXANA092 – Bruxelles, septembre 2003.

Soit la fonction f de $\Re$ dans $\Re$ définie par

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

Soit C la courbe d'équation $y = f(x)$

a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$: préciser les domaines de définition de f' et f''.
b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse 1.
c. Etablir le tableau de variations de f, f' et f'' contenant
   a. Les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines utiliser une décimale)
   b. Les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
   c. Les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f
   d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C.

e) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)

$$a)\ f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1+x)(1-x)e^{-x}$$

$$\text{dom } f'(x) = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = (1-x)e^{-x} - (1+x)e^{-x} - (1+x)(1-x)e^{-x}$$

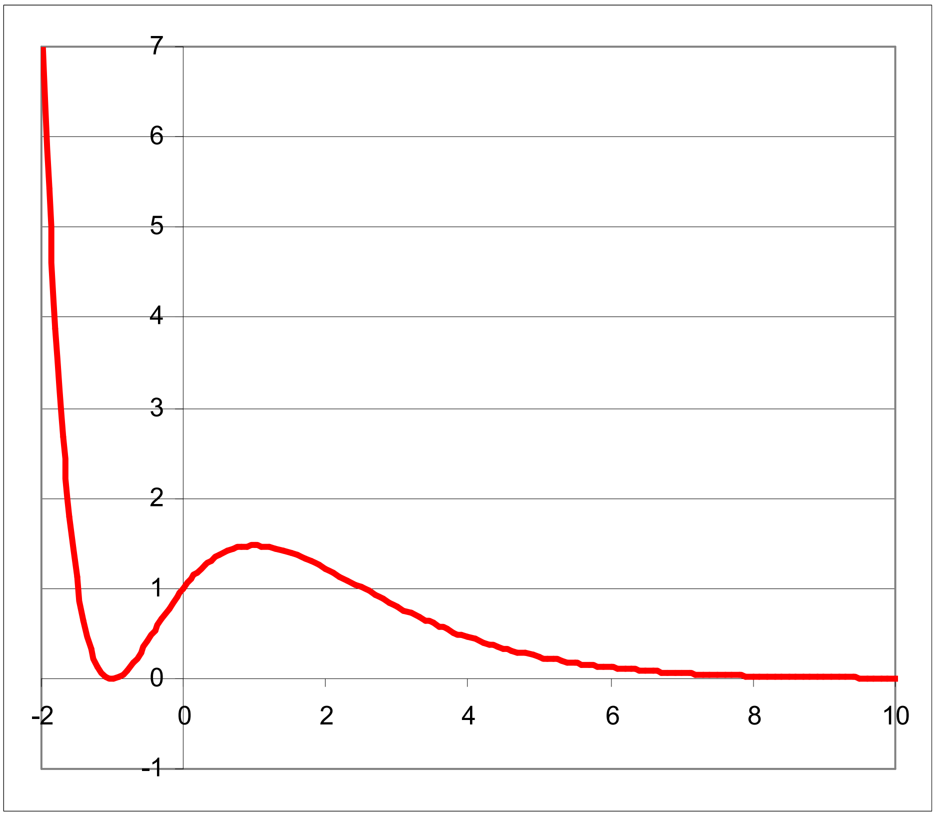
$$= e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right) = e^{-x}\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$$

$$\text{dom } f''(x) = \mathbb{R}$$

$$b)\ f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Tangente } \equiv y = 1$$

Tableau des variations

	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}\cong 0.4$		1		$1+\sqrt{2}\cong 2.4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0
			$\cup$		I		$\cap$		I	$\cup$	

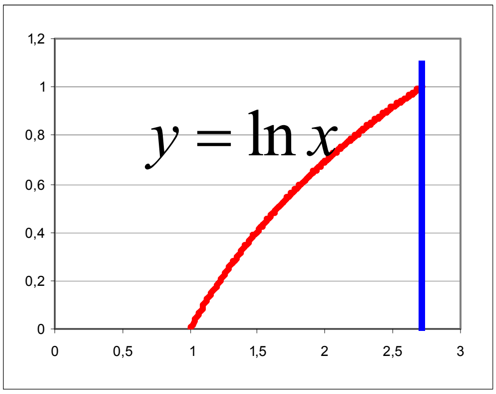


EXANA093 – Bruxelles, septembre 2003.

Dans l'espace euclidien $\Re^3$ muni du repère orthonormé *Oxyz*, soient

- D la région du plan *Oxyz*, définie par
  $$D := \{(x, y, 0) \in R^3 \mid 1 \le x \le e \,; 0 \le y \le \ln x\}$$
- S le solide engendré par la rotation autour de l'axe *Ox* de la région D

1) Faire le croquis de D
2) Calculer l'aire de D
3) Calculer le volume de S



$$A_D = \int_1^e \ln x = [x \ln x - x]_1^e = 1$$

$$V_D = 2\pi \int_1^e \ln^2 x \, dx$$

Calculons : $I = \int \ln^2 x \, dx$ par parties

$$f = \ln^2 x \quad f' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$g' = 1 \qquad g = x$$

$$\rightarrow \; I = x \ln^2 x - 2\int \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$$

Donc : $V_D = 2\pi \left[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = 2\pi(e-1)$

EXANA094 – Bruxelles, septembre 2003.

Soit

$$I=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\cos^4 x\,dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\sin^4 x\,dx$$

1) Sans calculer I et J, calculer $I+J$ et $I - J$
2) En déduire I et J.

$$a)\ I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^4 x\,dx$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\,d2x$$

Calculons $\int \sin^2 t\,dt$ par parties : $\begin{matrix} f=\sin t & f'=\cos t \\ g'=\sin t & g=-\cos t\end{matrix}$

$$\rightarrow\int \sin^2 t\,dt=-\cos t\sin t+\int \cos^2 t\,dt=-\frac{\cos 2t}{2}+t-\int \sin^2 t\,dt$$

$$\rightarrow\int \sin^2 t\,dt=\frac{t}{2}-\frac{\cos 2t}{4}$$

Donc : $I+J=\frac{1}{8}\left[\frac{2x}{2}-\frac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{32}$

$$b)\ I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\cos 2x\,dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\,d\sin 2x$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{\sin^3 2x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{24}$$

$$c)\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi}{32} \\ I-J=\dfrac{1}{24}\end{cases}\rightarrow\begin{cases} I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{1}{24}\right) \\ J=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{32}-\dfrac{1}{24}\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases} I=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}\right) \\ J=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$$

EXANA095 – Louvain, juillet 2002, série 1.

a) $$\lim_{x\to 0\,(x<0\ ou\ x>0)} \left(x\, e^{\frac{1}{x}}\right)$$

b) $$\int \frac{x^3-x+1}{1+x^2}\,dx$$

c) $$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

d) $$\int \sin\sqrt{x}\,dx$$

$$a)\ \lim_{x\to 0} x\,e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \quad \to \begin{cases} 1)\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>0}0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \\ 2)\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<0}0} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

$$b)\ \int \frac{x^3-x+1}{1+x^2}\,dx = \int \left(x - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} + \arctan x = \frac{x^2}{2} - \ln\left(1+x^2\right) + \arctan x$$

$$c)\ \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = x - \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = x - \ln\left(e^x+1\right)$$

$$d)\ I = \int \sin\sqrt{x}\,dx$$

Soit $t^2 = x \ \to\ dx = 2t\,dt \ \to I = 2\int t\sin t\,dt$

$$\begin{matrix} f = t & f' = 1 \\ g' = \sin t & g = -\cos t \end{matrix} \ \to\ I = -2t\cos t + 2\int \cos t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t$$

$$\to\ I = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA096 – Louvain, juillet 2002, série 1.

Etudiez la fonction définie

$$f(x) = \tan x - 2\sin x$$

a) Donnez le domaine et la période *f.*

Dans ce qui suit, on limite l'étude à l'intervalle [- π / 2, 3 π / 2]

b) Situer les racines de *f.*
c) Donnez les extrema de *f* en situant leurs abscisses de façon fort approximative ($\sqrt[3]{4} \cong 1.6$, arccos 0.8 ≅ π / 5 ;.....)
d) Situer les points d'inflexion de *f.*
e) Donnez le graphe de *f* (toujours sur l'intervalle [- π / 2, 3 π / 2]).

$a)$ dom $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

Période : 2π

b) Racines : $\tan x - 2\sin x = 0 \;\; \to \;\; \sin x - 2\sin x \cos x = 0 \to \sin x = \sin 2x$

$$\to \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \to \text{Dans l'intervalle donné : } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \\ x = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = \pi \end{cases}$$

c) Asymptotes : $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$

d) Extrema

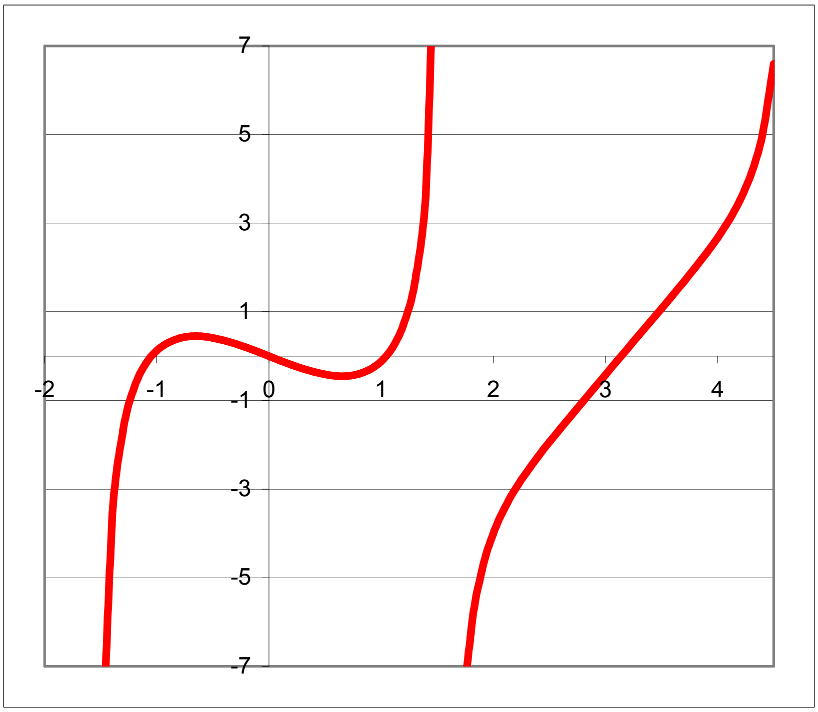
$$f'(x)=\tan^2 x-2\cos x+1=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{\cos^2 x}=2\cos x \rightarrow 1=2\cos^3 x$$

$$\rightarrow x=\pm\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\pm\arccos 0.7937\cong\pm\frac{\pi}{5}$$

e) Points d'inflexion : $f''(x)=2\tan^3 x+2\tan x+2\sin x=0$

$$\rightarrow \tan x\left(\tan^2 x+1\right)=-\sin x \;\rightarrow\; \frac{\sin x}{\cos^3 x}=-\sin x$$

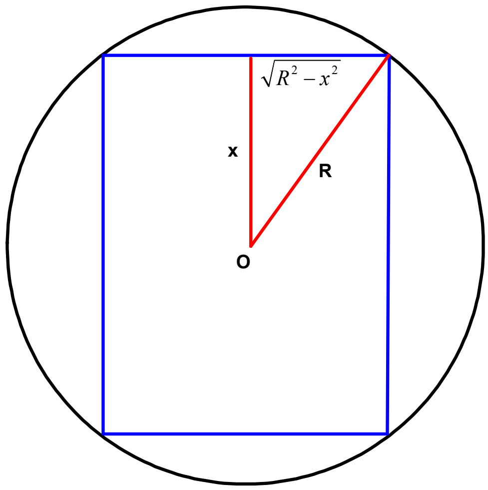
$$\rightarrow \begin{cases} \sin x=0 & \rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \\ \cos^3 x=-1 & \rightarrow\; x=\pi \;\rightarrow\; y=0 \end{cases}$$



Résolu le 24 juin 2004

EXANA097 – Louvain, juillet 2002, série 1.

On considère tous les cylindres droits inscrits dans une sphère de rayon R. Déterminez le cylindre (rayon *r*, hauteur *h*) de volume maximal. Donnez ensuite ce volume et comparez le au volume de la boule.



Soit x la demi hauteur du rectangle inscrit dans le cercle de rayon R.

Le rectangle $2x.\sqrt{R^2-x^2}$ engendre un cylindre circulaire droit inscrit dans la sphère de rayon R.

Volume du cylindre : $V_C = 2\pi \,.\, 2x \,.\left(R^2 - x^2\right) = 4\pi R^2 x - 4\pi x^3$

Le volume sera maximal pour une valeur de x telle que

$$\frac{dV_C}{dx} = 0 \rightarrow 4\pi R^2 - 12\pi x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

Donc, hauteur du cylindre : $2x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} R$ rayon du cylindre : $r = \sqrt{R^2 - x^2} = R\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Volume du cylindre : $V_C = 2\pi \dfrac{2\sqrt{3}}{3} R \,.\left(R\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{8\sqrt{3}\pi R^3}{9}$

Volume de la sphère : $V_S = \dfrac{4\pi R^3}{3}$

$$\rightarrow \quad \frac{V_S}{V_C} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{8\sqrt{3}\pi R^3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA098 – Louvain, juillet 2002, série 2.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=$$

b)

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

c)

$$\int (1+x^2)\sin x \, dx$$

d)

$$\int \ln(1+\sqrt{x})\, dx$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x+1-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$$

$$b)\ I=\int x^2 \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} f=\ln x & f'=\dfrac{1}{x} \\ g'=x^2 & g=\dfrac{x^3}{3} \end{array} \to I=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$\to I=\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)$$

$c)\ I=\int\left(1+x^2\right)\sin x\,dx=\int\sin x\,dx+\int x^2\sin x\,dx=-\cos x+\int x^2\sin x\,dx$

Traitons le deuxième terme I_2

$$\begin{matrix} f=x^2 & f'=2x \\ g'=\sin x & g=-\cos x \end{matrix} \rightarrow I_2=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$$

$$\begin{matrix} f=x & f'=1 \\ g'=\cos x & g=\sin x \end{matrix} \rightarrow I_2=-x^2\cos x+2\,x\sin x-2\int\sin x\,dx$$

$\rightarrow I_2=-x^2\cos x+2\,x\sin x+2\cos x$

Donc

$$I=\cos x-x^2\cos x+2x\sin x$$
$$=\cos x\left(1-x^2\right)+2x\sin x$$

$d)\ I=\int\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

Soit $t=\sqrt{x}\ \rightarrow\ dx=2t\,dt\ \ \rightarrow I=2\int\ln(1+t)\,t\,dt$

$$\begin{matrix} f=\ln(1+t) & f'=\dfrac{1}{1+t} \\ g'=t & g=\dfrac{t^2}{2} \end{matrix} \rightarrow\ I=t^2\ln(1+t)-\int\frac{t^2}{1+t}\,dt$$

Traitons le deuxième terme I_2

Compte tenu que : $\dfrac{t^2}{1+t}=t-1+\dfrac{1}{1+t}$

$$I_2=-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|$$

Donc : $I=t^2\ln(1+t)-\dfrac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|$

$$\rightarrow\ I=x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA099 – Louvain, juillet 2002, série 2.

On considère la fonction *f* définie par

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

a) Donnez le domaine et les racines de *f*
b) Donnez la ou les asymptotes éventuelles.
c) Donnez les maxima et minima éventuels (abscisse et ordonnée) en vous basant sur l'étude de la fonction dérivée $f'(x)$.
d) Situez les points d'inflexion et de rebroussement éventuels en sachant que

$$f''(x)=\frac{-2/9}{x^{4/3}(x-1)^{5/3}}$$

e) Donnez le graphe de *f*.

$a)$ dom $f=\mathbb{R}$

Racines : $x=0$ et $x=1$

$b)$ Asymptote oblique

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^2(x-1)\right)^2}+x\sqrt[3]{x^2(x-1)}+x^2}=-\frac{1}{3}$$

$$\to\ AO\equiv x-\frac{1}{3}$$

Pas d'asymptote verticale ou horizontale..

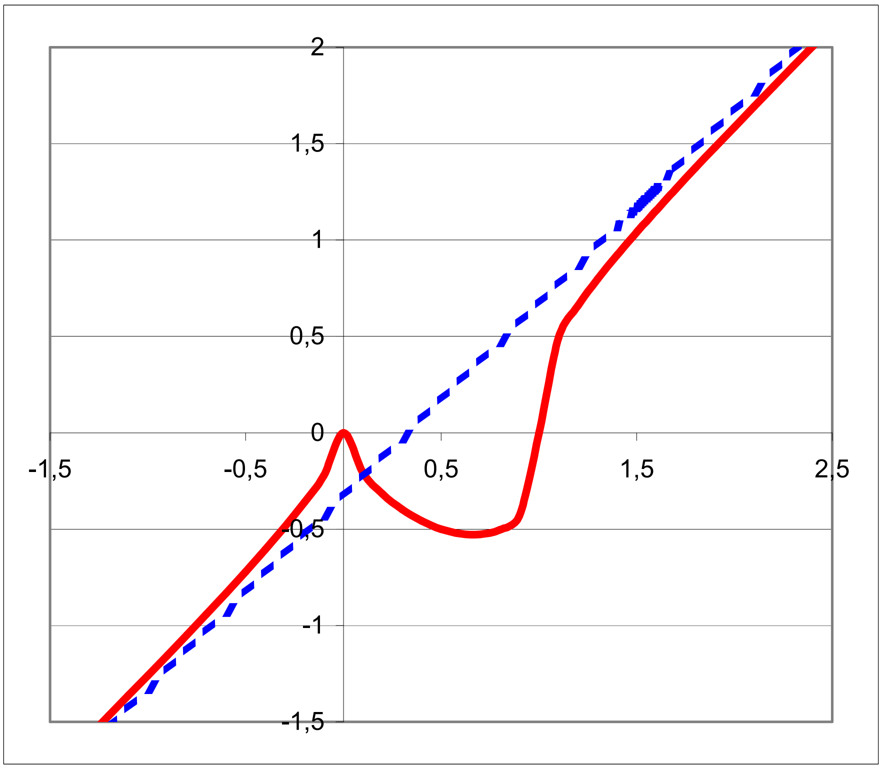
$c)$ Extrema

$$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{3\left(x^2(x-1)\right)^{\frac{3}{2}}} \quad\rightarrow\quad 3x^2-2x=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=\dfrac{2}{3}\rightarrow y=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\cong 0.53 \end{cases}$$

$$d)\ f''(x)=\frac{-2/9}{x^{4/3}(x-1)^{5/3}}$$

On constate que $f''(x)$ ne change pas de signe au passage par 0, de plus $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=\infty$. On a donc un point de rebroussement situé à l'origine.

On constate aussi que $f''(x)$ change de signe au passage par $x=1$, de plus $\lim\limits_{x\to 1} f''(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\infty$. On a un point d'inflexion en $x=1$ avec une tangente verticale.



Résolu le 24 juin 2004