

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 1

EXGAE010 – EXGAE019

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAE010 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les coordonnées des sommets sont $A(0,4,2)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,3/2,-6)$ et $D(6,-2,1)$.

On demande :

- L'équation cartésienne du plan contenant la base ABC ;
- De donner les équations paramétriques de la hauteur issue de D et perpendiculaire au plan ABC et de calculer les coordonnées du point de percée dans ce même plan.
- De calculer les coordonnées du point H , projection de C , sur AB dans le triangle ABC .

a) Equation du plan ABC :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{3x + 2y - z - 6 = 0}$$

b) Equation paramétrique de la hauteur issue de D :

$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Point de percée : $3(6+t) + 2(-2+2t) - (1-t) = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \boxed{P : \left(\frac{9}{2}, -3, \frac{3}{2} \right)}$$

- c) H est donné par l'intersection de AB et du plan \perp à AB et passant par C

Paramètres directeurs de AB : $(1, -1, 1)$

Plan perpendiculaire à AB : $x - y + z + d = 0$

Il passe par $C \rightarrow -1 - \frac{3}{2} - 6 + d = 0 \rightarrow d = \frac{17}{2}$

$$\rightarrow x - y + z + \frac{17}{2} = 0$$

Equations paramétriques de AB :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Intersection de AB et du plan : $t - (4-t) + (2+t) + \frac{17}{2} = 0 \rightarrow t = -\frac{13}{6}$

$$\rightarrow \boxed{H : \left(-\frac{13}{6}, \frac{37}{6}, -\frac{1}{6} \right)}$$

EXGAE011 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

On donne des équations cartésiennes de trois droites d_1 , d_2 et d_3 de l'espace :

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+1}{3} \quad d_2 : \frac{x}{3} = y+1 = \frac{z-2}{5} \quad d_3 : \begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$

- Donner une équation du plan α contenant d_1 et parallèle à d_3 .
- Donner une équation du plan β contenant d_2 et parallèle à d_3 .
- Donner une équation de la droite d s'appuyant sur d_1 et d_2 et parallèle à d_3 .

a) Déterminons deux points de d_1 .

$$A_1 \in d_1 : \text{Si } y=0 \rightarrow x=1 \text{ et } z=-1 \rightarrow A_1 : (1; 0; -1)$$

$$B_1 \in d_1 : \text{Si } y=1 \rightarrow x=-1 \text{ et } z=-4 \rightarrow B_1 : (-1; 1; -4)$$

Ce qui permet de définir un vecteur directeur de d_1 : $\vec{V}_1 : (2; -1; 3)$

Déterminons deux points de d_3 .

$$A_3 \in d_3 : \text{Si } y=0 \rightarrow A_3 : (1; 0; 2)$$

$$B_3 \in d_3 : \text{Si } y=1 \rightarrow B_3 : (1; 2; 0)$$

Ce qui permet de définir un vecteur directeur de d_3 : $\vec{V}_3 : (0; -2; 2)$

Le plan α a donc pour équation :

$$\begin{cases} x-1=2k+0h \\ y-0=-k-2h \\ z+1=3k+2h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ y=-k-2h \\ z+1=3k+2h \end{cases}$$

$$\text{Ou bien : } \boxed{x-y-z-2=0}$$

b) En utilisant la même méthode :

$$A_2 \in d_2 \rightarrow A_2 : (0; -1; 2)$$

$$B_2 \in d_2 \rightarrow B_2 : (3; 1; 5)$$

$$\vec{V}_2 : (3; 1; 5)$$

Le plan β a donc pour équation :

$$\begin{cases} x-0=3k+0h \\ y+1=k-2h \\ z-2=5k+2h \end{cases}$$

$$\text{Ou bien : } \boxed{2x-y-z+1=0}$$

c) L'équation de la droite d est simplement :

$$\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

EXGAE012 – FACSA, Ulg, Liège, septembre 2001.

a) Quelles sont les coordonnées du pied Q de la perpendiculaire abaissée du point

$$P(\alpha, \alpha + 1, \alpha - 1)$$

sur le plan π d'équation

$$2x + \alpha y + \alpha z + \alpha^3 + 4 = 0$$

a) Montrer que ces pieds, lorsque α parcourt \mathbb{R} , sont tous situés sur une même droite d , dont on déterminera des équations.

a) Soit un vecteur \perp à π : $(2, \alpha, \alpha)$

Les équations de la perpendiculaire à π passant par P sont :

$$\begin{cases} x - \alpha = 2h \\ y - \alpha - 1 = \alpha h \\ z - \alpha + 1 = \alpha h \end{cases}$$

Les coordonnées du pied Q sont données par la valeur de h qui satisfait l'équation du plan :

$$2(2h + \alpha) + \alpha(\alpha h + \alpha + 1) + \alpha(\alpha h + \alpha - 1) + \alpha^3 + 4 = 0$$

$$\rightarrow h = -\frac{\alpha + 2}{2} \text{ et donc}$$

$$Q : \left(-2, \frac{2 - \alpha^2}{2}, -\frac{2 + \alpha^2}{2} \right)$$

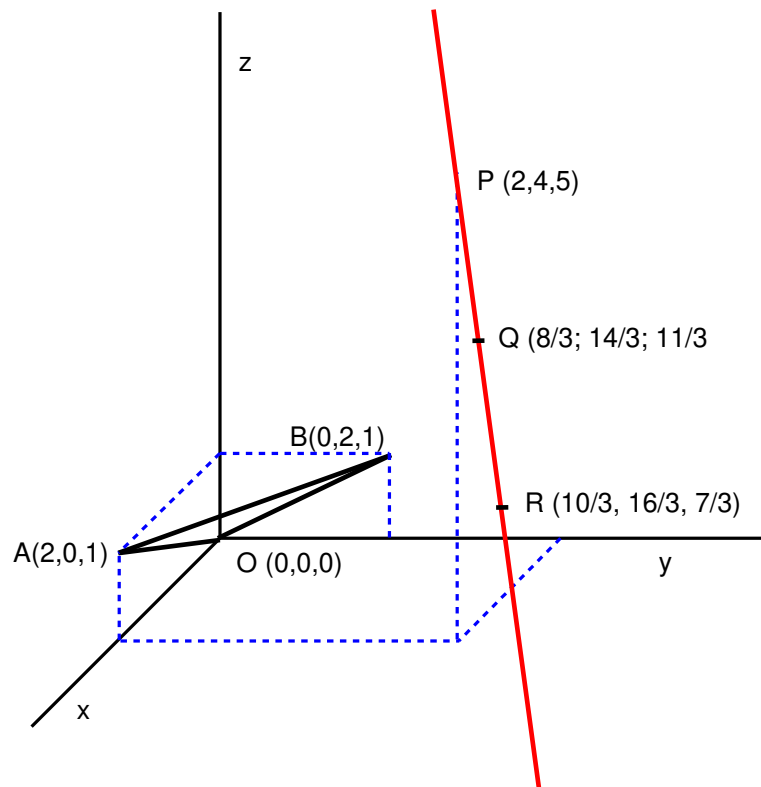
b) Eliminons α :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2 - \alpha^2}{2} \\ z = -\frac{2 + \alpha^2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y - z = -2 \end{cases} \text{ qui est l'équation d'une droite.}$$

EXGAE013 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2000.

Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé, on donne le $P(2,4,5)$ et le plan α comprenant les points $O(0,0,0)$, $A(2,0,1)$ et $B(0,2,1)$.

- Former une équation cartésienne du plan α ;
 - Former des équations paramétriques de la droite p comprenant P et perpendiculaire au plan α ;
 - Déterminer les coordonnées du point de percée Q de p dans le plan α ;
 - Déterminer les coordonnées du point R , symétrique de P par rapport à α .
-



$$a) P(2, 4, 5) \quad O(0, 0, 0) \quad A(2, 0, 1) \quad B(0, 2, 1)$$

$$\rightarrow \overline{OA}:(2, 0, 1) \text{ et } \overline{OB}:(0, 2, 1)$$

$$\text{Méthode 1 } \alpha \equiv \begin{cases} x = 2r \\ y = 2s \\ z = r + s \end{cases} \rightarrow x + y - 2z = 0$$

$$\text{Méthode 2 } \alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 2z = 0$$

$$\text{Méthode 3 Vecteur normale : } \vec{n} = \overline{OA} \wedge \overline{OB} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -2)$$

Le plan passe par l'origine : $\alpha \equiv x + y - 2z = 0$

$$b) p \equiv \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 4 + r \\ z = 5 - 2r \end{cases}$$

c) Point de percée Q de p dans α :

$$r \text{ satisfait à l'équation du plan } \rightarrow 2 + r + 4 + r - 2(5 - 2r) = 0 \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow Q: \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

d) Q est le milieu de $PR \rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{8}{3} = \frac{2+x}{2} \\ \frac{14}{3} = \frac{4+y}{2} \\ \frac{11}{3} = \frac{5+z}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{16}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases} \rightarrow R: \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

Vérifions que les distances PQ et QR sont égales :

$$|PQ|^2 = \left(2 - \frac{8}{3} \right)^2 + \left(4 - \frac{14}{3} \right)^2 + \left(5 - \frac{11}{3} \right)^2 = 2.667$$

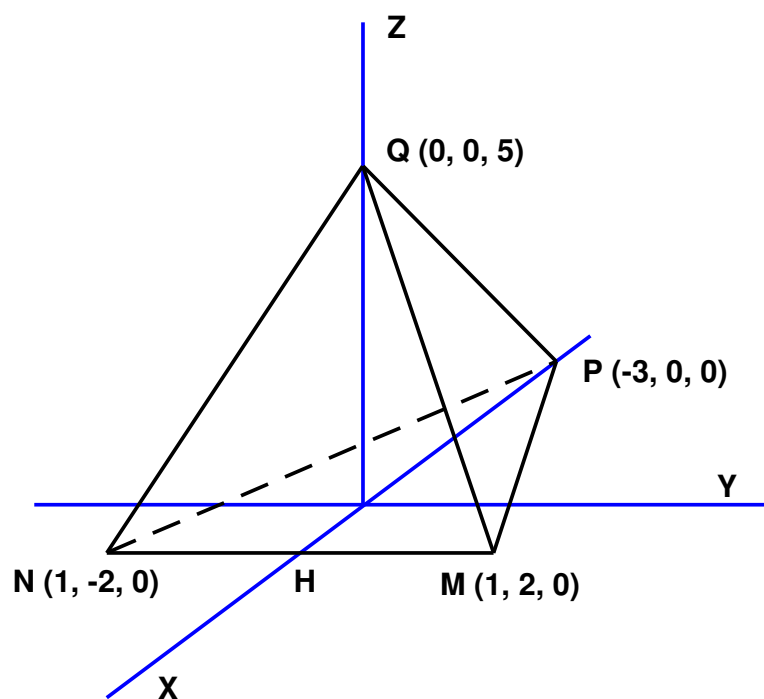
$$|QR|^2 = \left(\frac{10}{3} - \frac{8}{3} \right)^2 + \left(\frac{16}{3} - \frac{14}{3} \right)^2 + \left(\frac{7}{3} - \frac{11}{3} \right)^2 = 2.667$$

EXGAE014 – FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2000.

Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X , Y et Z , on donne les points $M(1,2,0)$, $N(1,-2,0)$, $P(-3,0,0)$ et $Q(0,0,5)$.

On demande.

- Une équation cartésienne des plans MNP et MPQ .
 - Des équations cartésiennes des droites NP et MQ , ainsi que la mesure de l'angle entre ces droites.
 - Des équations de la perpendiculaire p , menée par N au plan MPQ .
 - Les coordonnées du point d'intersection R , de p avec le plan MPQ .
-



a) Plan $MNP \equiv \boxed{z = 0}$

$$\text{Plan } MPQ \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5x - 10y - 3z + 15 = 0}$$

b) Vecteur directeur : $\vec{u}_{NP} : (-4, 2, 0) = (-2, 1, 0)$

$$\text{Droite } MP \equiv \begin{cases} x = -3 - 2r \\ y = r \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{x + 2y + 3 = z = 0}$$

Vecteur directeur : $\vec{u}_{MQ} : (-1, -2, 5)$

$$\text{Droite } MQ \equiv \begin{cases} x = -r \\ y = -2r \\ z = +5 + r \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{2x - y = 5x + z - 5 = 0}$$

$$\text{Angles entre } NP \text{ et } MQ : \cos \alpha = \frac{-2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5}} = 0$$

→ $\boxed{\alpha = 90^\circ}$ NP et MQ sont donc orthogonales.

c) Vecteur normal au plan MPQ : $\vec{n} : (5, -10, -3)$

$$\rightarrow \text{Perpendiculaire } p \equiv \begin{cases} x = 1 + 5r \\ y = -2 - 10r \\ z = -3r \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x + 5z - 3 = 0 \\ 3y - 10z + 6 = 0 \end{cases}$$

d) Coordonnées de R :

$$\begin{cases} 5x - 10y - 3z = -15 \\ 3x + 5z = 3 \\ 3y - 10z = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{33}{67} \\ y = \frac{66}{67} \\ z = \frac{60}{67} \end{cases} \rightarrow \boxed{R : \left(-\frac{33}{67}, \frac{66}{67}, \frac{60}{67} \right)}$$

d) Volume du tétraèdre

Première méthode

On voit sur la figure que : $NM = 4$, $HP = 4$, $OQ = 5$

$$\text{Base : } B = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$\text{Volume : } V = \frac{Bh}{3} = \frac{5 \times 8}{3} = \boxed{\frac{40}{3}}$$

Deuxième méthode

Le volume d'un tétraèdre dont on connaît les coordonnées des sommets est donné par la valeur absolue de :

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{40}{3}}$$

EXGAE015 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2001.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X , Y et Z .

On donne les points fixes M , N , P et U , de coordonnées respectives $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$, $(0, 0, \gamma)$ et (α, β, γ) (α , β et γ non nuls).

On nomme a la droite passant par les points O et U et b celle qui passe par N et P .

On demande :

- a) De déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à b contenant a .
- b) De déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à a contenant b .
- c) De montrer que la droite c qui joint M au milieu de NP possède un point commun avec la droite a et de déterminer les coordonnées de ce point.
- d) De déterminer les conditions sur α , β et γ pour que c soit perpendiculaire aux droites a et b .
- e) De déterminer, dans les conditions trouvées au d), l'angle des droites a et b ainsi que la distance qui les sépare.

$$M : (\alpha, 0, 0) \quad N : (0, \beta, 0) \quad P : (0, 0, \gamma) \quad U : (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$a \equiv OU \rightarrow \vec{u}_a : (\alpha, \beta, \gamma) \quad b \equiv NP \rightarrow \vec{u}_b : (0, -\beta, \gamma)$$

$$a) a \equiv \begin{cases} x = \alpha r \\ y = \beta r \\ z = \gamma r \end{cases} \quad b \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta - \beta s \\ z = \gamma s \end{cases}$$

Plan π_1 parallèle à b et contenant a : (ce plan passe par O)

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -\beta & \gamma \end{vmatrix} = 2\beta\gamma x - \alpha\gamma y - \alpha\beta z = 0$$

b) Plan π_2 parallèle à a et contenant b : (ce plan passe par N)

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y - \beta & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -\beta & \gamma \end{vmatrix} = 2\beta\gamma x - \alpha\gamma y - \alpha\beta z + \alpha\beta\gamma = 0$$

c) Soit F le milieu de NP : $F \left(0, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \right)$

$$\text{Vecteur directeur de la droite } c \equiv FM : \vec{u}_c : \left(-\alpha, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \right) \rightarrow c \equiv \begin{cases} x = \alpha - \alpha t \\ y = \frac{\beta}{2} t \\ z = \frac{\gamma}{2} t \end{cases}$$

Si a et c sont sécantes, le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \alpha r = \alpha - \alpha t \\ \beta r = \frac{\beta}{2} t \\ \gamma r = \frac{\gamma}{2} t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Coordonnée du point $A = a \cap c : \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\gamma}{3} \right)$

$$d) \text{ Droite } c \perp a. \text{ Il faut que } \vec{u}_c \cdot \vec{u}_a = 0 \rightarrow -\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Droite } c \perp b. \text{ Il faut que } \vec{u}_c \cdot \vec{u}_b = 0 \rightarrow -\frac{\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} = 0 \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit : $\beta = \pm\gamma$ et $\beta = \pm\alpha$

e) Soit $\boxed{\alpha = \beta = \gamma}$

Angle des droites a et b

$$\vec{u}_a = (\beta, \beta, \beta) = (1, 1, 1) \quad \vec{u}_b = (0, -\beta, \beta) = (0, -1, 1)$$

$$\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = 0 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0 \rightarrow a \text{ et } b \text{ sont perpendiculaires}$$

Distance des droites a et b

Première méthode

Puisque c est perpendiculaire à a et b , la distance est simplement le module de FA

$$F : \left(0, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad A : \left(\frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$$

$$|\overline{FA}| = \sqrt{\left(\frac{\beta}{3}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{2}\right)^2} = \beta \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Deuxième méthode

Cette méthode est générale.

Soit deux droites a et b , de vecteurs directeurs \vec{u}_a et \vec{u}_b

On définit le vecteur : $\vec{u}_n = \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b$ (Produit vectoriel, $\vec{u}_n \perp (\vec{u}_a, \vec{u}_b)$)

On obtient le vecteur normale unitaire : $\vec{i}_n = \frac{\vec{u}_n}{|\vec{u}_n|}$

Soit A un point quelconque de a , et B un point quelconque de b

La distance est donnée par : $d(a, b) = |\vec{i}_n \cdot \overline{AB}|$

Appliquons ces formules :

$$\vec{u}_a = (1, 1, 1) \quad \vec{u}_b = (0, -1, 1) \rightarrow \vec{u}_n = \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$

$$\vec{i}_n = \frac{\vec{u}_n}{|\vec{u}_n|} = \frac{(2, -1, -1)}{\sqrt{6}}$$

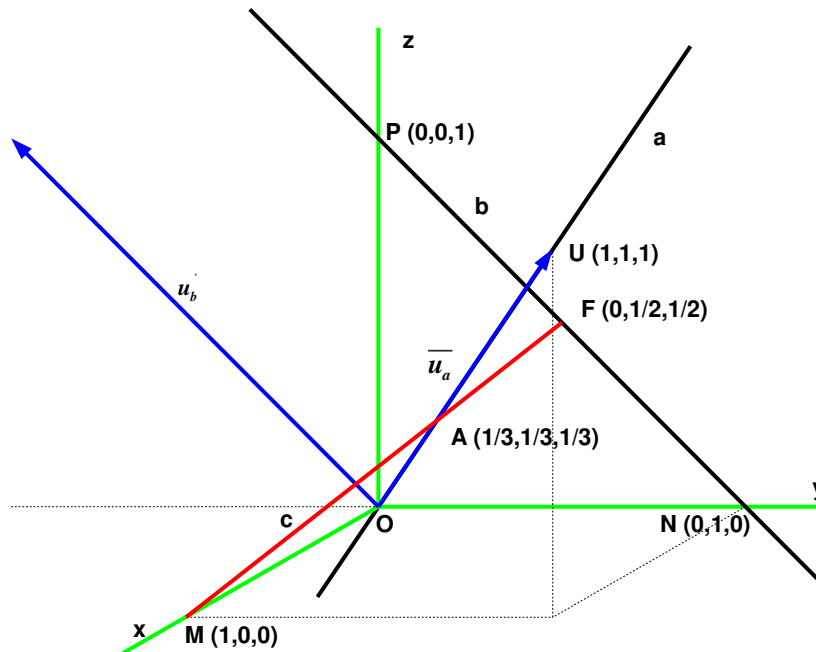
$$O \in a \text{ et } N \in b \rightarrow \overline{ON} : (0, \beta, 0) \rightarrow d(a, b) = |\vec{i}_n \cdot \overline{ON}| = \beta \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Le tableau suivant reprend tous les cas et utilise la méthode 2.

α	β	$-\beta$	β	$-\beta$
β	β	β	β	β
γ	β	β	$-\beta$	$-\beta$
\vec{u}_a	(1,1,1)	(-1,1,1)	(1,1,-1)	(-1,1,-1)
\vec{u}_b	(0,-1,1)	(0,-1,1)	(0,-1,-1)	(0,-1,-1)
$\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b$	0	0	0	0
Angle	90°	90°	90°	90°
$\vec{u}_n = \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b$	(2,-1,-1)	(2,1,1)	(-2,1,-1)	(-2,-1,1)
$\vec{i}_n = \frac{\vec{u}_n}{ \vec{u}_n }$	$\frac{(2,-1,-1)}{\sqrt{6}}$	$\frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}$	$\frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}$	$\frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{6}}$
\vec{ON}	(0, β , 0)	(0, β , 0)	(0, β , 0)	(0, β , 0)
$d(a,b)$	$\beta \frac{\sqrt{6}}{6}$	$\beta \frac{\sqrt{6}}{6}$	$\beta \frac{\sqrt{6}}{6}$	$\beta \frac{\sqrt{6}}{6}$

Les droites a et b sont donc toujours perpendiculaires et distantes de $\beta \frac{\sqrt{6}}{6}$

le dessin suivant illustre le cas : $\beta = 1$



EXGAE016 – FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2001.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X , Y et Z .

On donne les points fixes M , N , et U , de coordonnées respectives $(0, b, c)$, $(a', 0, c')$, $(1, 1, 0)$ (b , c , a' et c' sont non nuls).

On demande :

- a) De déterminer des équations de la droite m parallèle à OX et contenant M ;
- a) De déterminer des équations de la droite n parallèle à OY et contenant N ;
- a) De déterminer des équations de la droite p passant par O et U ;
- a) De déterminer une équation cartésienne des plans passant par un point P , mobile sur la droite p , et contenant la droite m ;
- a) De déterminer, une équation cartésienne des plans passant par le point P , considéré ci-dessus et contenant la droite n ;
- a) De montrer qu'il existe un plan passant par l'origine et qui est parallèle aux plans; déterminés en d) et e), pour toutes les positions de ceux-ci.

$$M : (0, b, c) \quad N : (a', 0, c') \quad U : (1, 1, 0)$$

$$a) m \equiv \begin{cases} x = r \\ y = b \\ z = c \end{cases} \quad b) n \equiv \begin{cases} x = a' \\ y = b \\ z = c' \end{cases} \quad c) p \equiv \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 0 \end{cases}$$

d) Soit $P : (\alpha, \alpha, 0)$ et deux autres points de la droite m : $M : (0, b, c)$, $M' : (1, b, c)$

Les plans sont donnés par :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & b & c & 1 \\ 1 & b & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -cy + (b - \alpha)z + \alpha c = 0$$

e) Soit $N' : (a', 1, c') \in n$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ a' & 0 & c' & 1 \\ a' & 1 & c' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ a' & 0 & c' & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ a' & c' & 1 \end{vmatrix} = c'x + (\alpha - a')z - \alpha c' = 0$$

$$f) \text{ Soit : } \begin{cases} \pi_1 \equiv -cy + (b - \alpha)z + \alpha c = 0 & \text{plan // à } OX \\ \pi_2 \equiv c'x + (\alpha - a')z - \alpha c' = 0 & \text{plan // à } OY \end{cases}$$

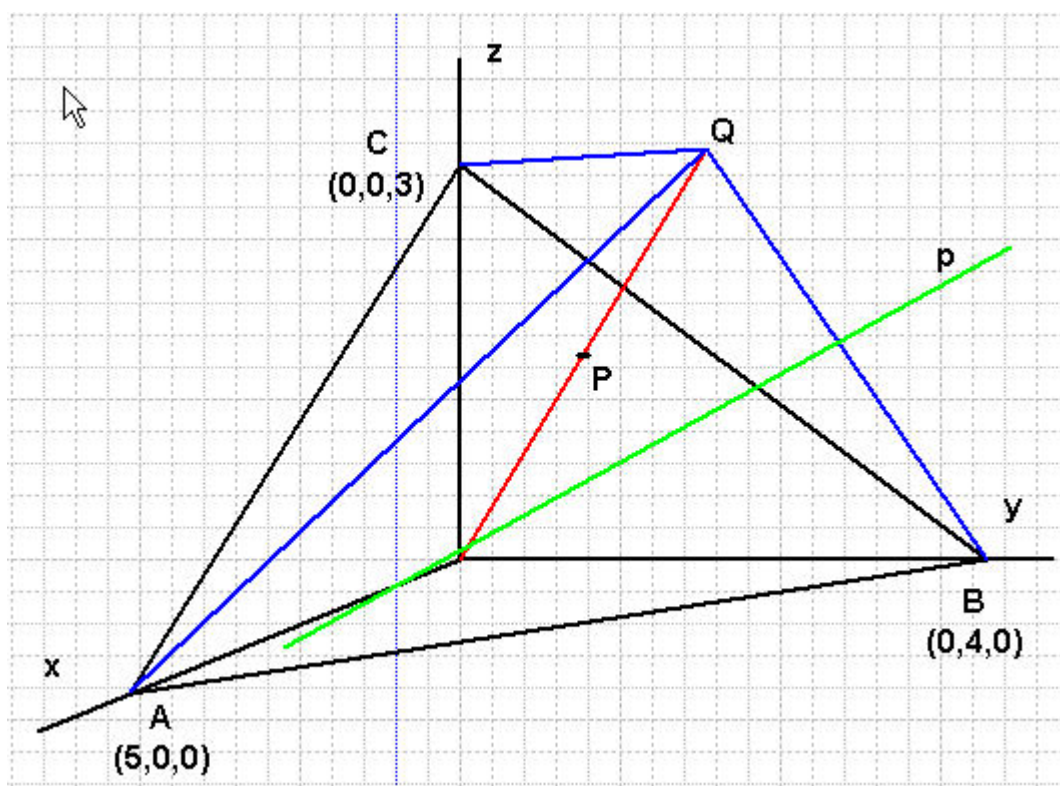
Quelque soit la valeur de α , tout plan contenant OX sera parallèle à π_1 et tout plan contenant OY sera parallèle à π_2

EXGAE017 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Dans le trièdre trirectangle $OXYZ$, on donne les points A , B et C de coordonnées respectives $(5,0,0)$, $(0,4,0)$ et $(0,0,3)$.

On demande :

- a) Une équation cartésienne du plan ABC
- a) Les coordonnées du point A , symétrique de l'origine O par rapport au plan ABC .
- a) Des équations cartésiennes de la droite OQ .
- a) Des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à AO et QB .
- a) La mesure de l'angle formé par les droites AO et QB .
- a) La distance entre AO et QB
- a) Le volume du polyèdre (hexaèdre) des sommets $OABCQ$.



$$A:(5,0,0) \quad B:(0,4,0) \quad C:(0,0,3)$$

$$a) \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

$$b) \text{Vecteur normal au plan } ABC : \vec{n}_{ABC} : \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\rightarrow OQ \equiv \begin{cases} x = \frac{r}{5} \\ y = \frac{r}{4} \\ z = \frac{r}{3} \end{cases}$$

$$\text{Point de percée } P \text{ dans le plan } ABC : \frac{r}{25} + \frac{r}{16} + \frac{r}{9} = 1 \Rightarrow r = 4.6814$$

$$\Rightarrow P:(0.9363; 1.1704; 1.5605)$$

$$P \text{ est le milieu de } OQ \Rightarrow Q:(1.8726; 2.3408; 3.1210)$$

$$c) OQ \equiv \begin{cases} x = \frac{r}{5} \\ y = \frac{r}{4} \\ z = \frac{r}{3} \end{cases} \Rightarrow 5x = 4y = 3z$$

$$d) \vec{AO}:(5,0,0) \quad \vec{QB}:(1.8726; -1.6592; 3.1210)$$

Vecteur perpendiculaire à \vec{AO} et \vec{QB}

$$\vec{n} = \vec{AO} \wedge \vec{QB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 1.8726 & -1.6592 & 3.1210 \end{vmatrix} = (0; -15.6050; -8.2950) = (0; 1.881; 1)$$

La perpendiculaire commune p à AO et QB est déterminée par

$$1) \text{ Le plan } \pi_1 \text{ contenant } AO \text{ et parallèle à } \vec{n} \quad \pi_1 \equiv y - 1.881z = 0$$

$$2) \text{ Le plan } \pi_2 \text{ contenant } QB \text{ et parallèle à } \vec{n}$$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y-4 & z \\ 0 & 1.881 & 1 \\ 1.8726 & -1.6592 & 3.121 \end{vmatrix} = x + 0.2487y - 0.4677z - 0.9948 = 0$$

$$\rightarrow p \equiv \begin{cases} y - 1.881z = 0 \\ x + 0.2487y - 0.4677z = 0.9948 \end{cases}$$

$$e) \theta = \arccos \frac{5 \times 1.8726}{5 \times \sqrt{1.8726^2 + 1.6592^2 + 3.121^2}} = 62.09^\circ$$

$$f) \vec{n} : (0; 1.881; 1) \Rightarrow \text{Vecteur unitaire normale} : \vec{i}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (0; 0.883; -0.4694)$$

$$\Rightarrow d(AO, QB) = \overline{OB} \cdot \vec{i}_n = 4 \times 0.883 = 3.532$$

$$g) \text{Volume } OABCQ = \text{Volume tétraèdre } OABC + \text{Volume tétraèdre } ABCQ \\ = 2 \times \text{Volume tétraèdre } OABC$$

$$= 2 \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

Ou bien

$$\text{Base Tétraèdre } OABC : B = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Hauteur : $OC = 3$

$$\text{Volume tétraèdre} : V_T = \frac{10 \times 3}{3} = 10$$

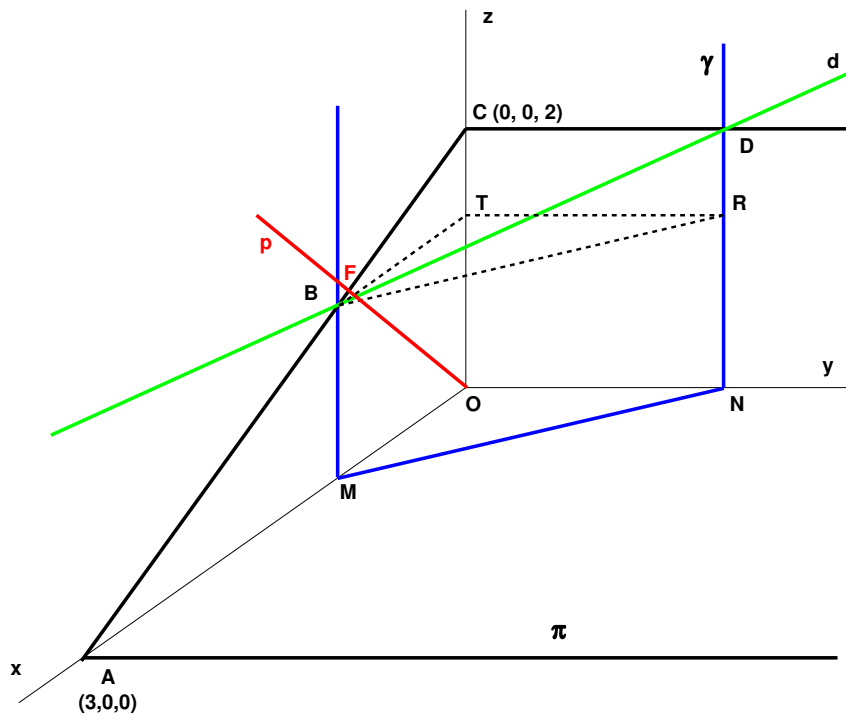
$$\text{Volume hexaèdre} : V_H = 2V_T = 20$$

EXGAE018– FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2002.

Dans le trièdre trirectangle $OXYZ$, on donne le plan γ d'équation $2X + Y = 2$ ainsi que les points A et C de coordonnées $(3,0,0)$ et $(0,0,2)$.

On demande :

- Une équation cartésienne du plan π parallèle à OY et contenant AC ;
- Le volume du solide contenu entre les plans de coordonnées et les plans γ et π ;
- Des équations cartésiennes de la droite d , intersection des plans γ et π ;
- Des équations cartésiennes de la droite p , issue de l'origine et perpendiculaire à π ;
- Les coordonnées du point F , intersection de p et π ;
- Des équations cartésiennes de la droite g , issue de l'origine et perpendiculaire à d ;
- La distance qui sépare F de l'intersection de g et d ;
- La mesure de l'angle formé par les droites p et g .



$$a) A:(3, 0, 0) \quad C:(0, 0, 2) \rightarrow \vec{u}_{AC}:(-3, 0, 2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2y + 3z - 6 = 0$$

$$b) B:\left(1, 0, \frac{4}{3}\right) \quad D:(0, 2, 2)$$

$$\text{Aire } OMN : A_{OMN} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$\text{Volume prisme } BTROMN : V_{BTROMN} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Volume pyramide } CDRIB : V_{CDRIB} = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\text{Volume } BCDNMO : V = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

$$c) d \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

$$d) \text{ Vecteur normale à } \pi: \vec{n}_\pi:(2, 0, 3) \rightarrow p \equiv \begin{cases} x = 2r \\ y = 0 \\ z = 3r \end{cases} \rightarrow p \equiv y = 3x - 2z = 0$$

$$e) \text{ Dans la face } OXZ : \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases} \rightarrow F:(0.923; 0; 1.385)$$

$$f) B:\left(1, 0, \frac{4}{3}\right) \quad D:(0, 2, 2) \rightarrow \vec{u}_d:(-3, 6, 2)$$

$$\text{Plan } \perp \text{ à } d \text{ et passant par l'origine : } -3x + 6y + 2z = 0$$

$$\text{Plan contenant } d \text{ et passant par l'origine :}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4x + 3y - 3z = 0$$

$$\rightarrow g \equiv \begin{cases} -3x + 6y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

g) Calculons les coordonnées de $K = d \cap g$

$$g \equiv \begin{cases} -3x + 6y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow K : (0.9795; 0.0408; 1.3469)$$

$$d \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

$$d(F, K) = \sqrt{(0.9795 - 0.923)^2 + 0.0408^2 + (1.3469 - 1.385)^2} = 0.0794$$

$$h) \vec{u}_p : (0.923; 0; 1.385) \quad \vec{u}_g : (0.9795; 0.0408; 1.3469)$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{0.923 \times 0.9795 + 0 \times 0.0408 + 1.385 \times 1.3469}{\sqrt{0.923^2 + 1.385^2} \sqrt{0.9795^2 + 0.0408^2 + 1.3469^2}} \right) = 2.28^\circ$$

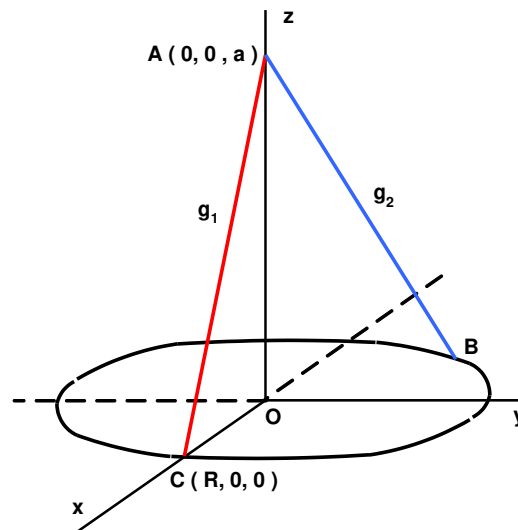
EXGAE019– Louvain, juillet 1999, série 1.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère un cercle de rayon R appartenant au plan OXY et centré à l'origine, ainsi qu'un point A sur OZ , de coordonnées $(0,0,a)$. L'ensemble définit un cône circulaire droit.

Soit g_1 la génératrice joignant A au point $(R,0,0)$.

On cherche à déterminer une génératrice g_2 perpendiculaire à g_1 .

- Déterminer la coordonnée x_B du point B où g_2 doit rencontrer le cercle.
- Quelle est la relation entre a et R telle que l'opération soit possible ?
- Que devient x_B si $a = R$?



a) Equation du cercle : $x^2 + y^2 = R^2$

Paramètres directeurs de g_1 : $(R, 0, -a)$

g_2 est situé dans le plan perpendiculaire à g_1

→ Plan perpendiculaire à g_1 et passant par A : $Rx - az + a^2 = 0$

Ce plan coupe le plan Oxy selon la droite : $d \equiv Rx = -a^2$ (dans le plan $z = 0$)

→ La coordonnée $x_B = -\frac{a^2}{R}$

b) Intersection du cercle et de la droite d : $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ Rx = -a^2 \end{cases} \rightarrow R^2 y^2 = R^4 - a^4$

Cette équation à une solution si : $R^4 \geq a^4 \rightarrow -a \leq R \leq a$

c) Si $a = R \rightarrow$ la droite d est tangente au cercle et le point B est sur l'axe Ox