Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 11

EXGAE110 – EXGAE119

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Mars 2013

EXGAE110 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Dans l'espace euclidien rapporté à un trièdre orthonormé $OXYZ$, on donne les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(4,0,0), (0,3,0), (0,0,2)$ et $(2,2,2)$.

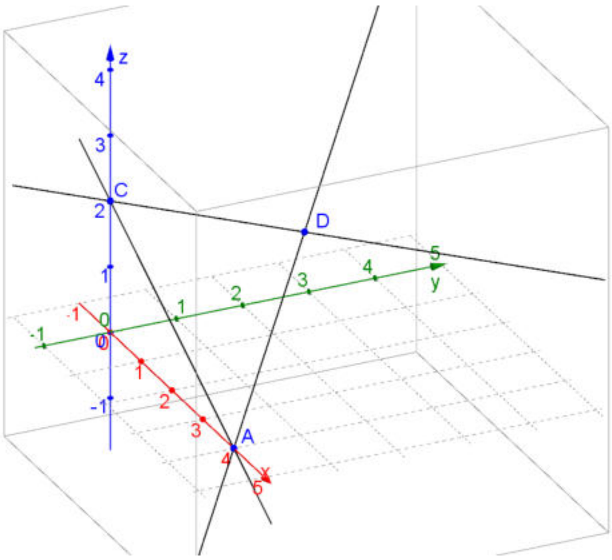
a) Donnez deux équations cartésiennes pour chacune des droites $(AC), (AD)$ et (CD).

b) Calculez l'angle formé par (CD) et (AB).

c) Déterminez les coordonnées des points E situés à la même hauteur que C tels que (CE) forme un angle droit avec (AB).

d) Calculez le volume du tétraèdre $ABCD$.

e) Calculez les coordonnées du centre de la sphère que passe par A, B, C et D.

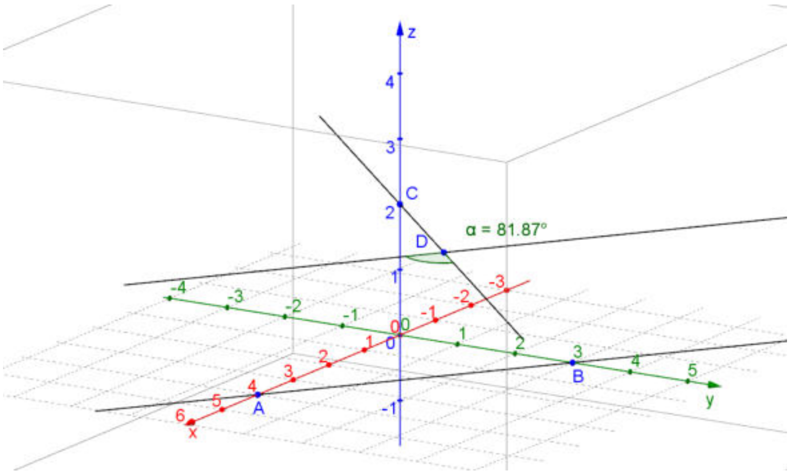


a) $\overrightarrow{AC}(-2,0,1); \overrightarrow{AD}(-1,1,1), \overrightarrow{CD}(1,1,0)$

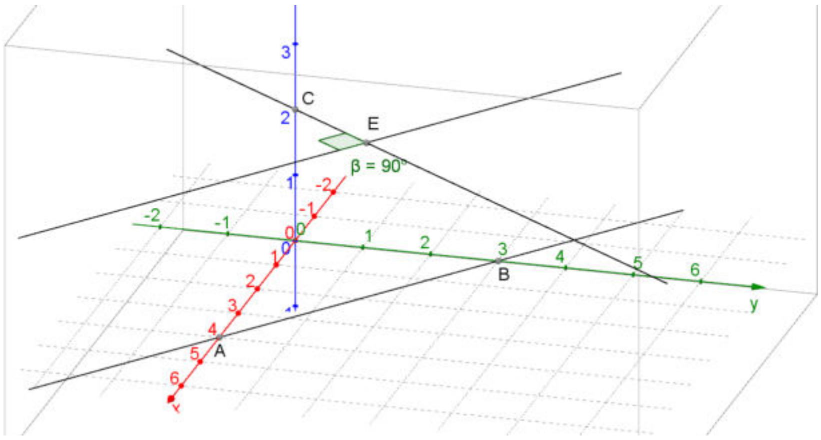
$$(AC) \equiv \begin{cases} \dfrac{x-4}{-2} = z \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dfrac{x}{-2} = z-2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(AD) \equiv \frac{x-4}{-1} = y = z \text{ ou } \frac{x-2}{-1} = y-2 = z-2$$

$$(CD) \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$$

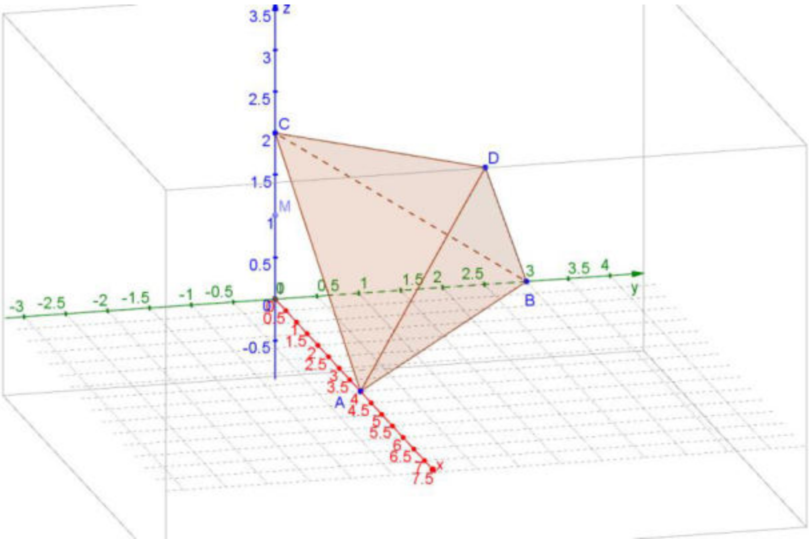


b) $\vec{AB}(-4,3,0) \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{|-8+6|}{\sqrt{25}\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 81.87°$



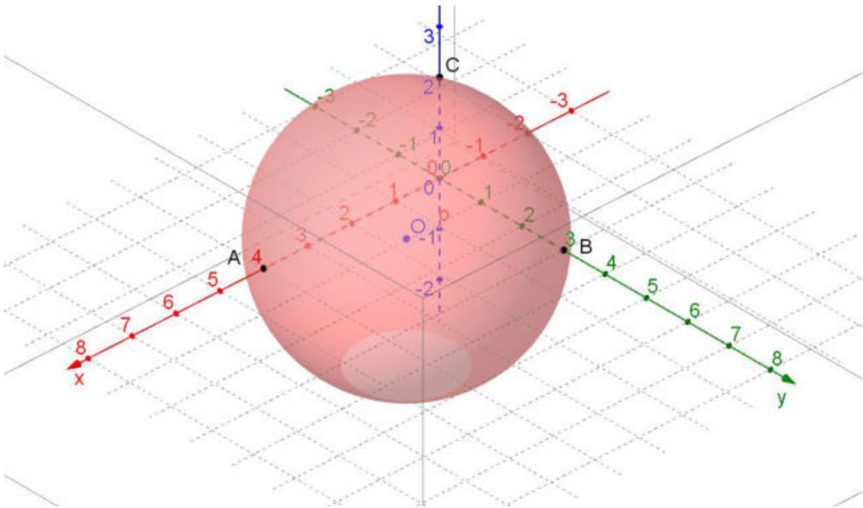
c) $E(x,y,2)$; $\vec{CE}.\vec{AB} = 0 \Rightarrow x.(-4) + y.3 = 0 \Rightarrow 4x = 3y$

Les points E ont pour coordonnées :$(\lambda, 4\lambda/3, 2)$ par exemple $(1, 4/3, 2)$



d) Le volume du tétraèdre est donnée par :

$$V=\frac{1}{6}\det\begin{vmatrix}4&0&0&1\\0&3&0&1\\0&0&2&1\\2&2&2&1\end{vmatrix}=\frac{14}{3}$$



e) On resoud le système :

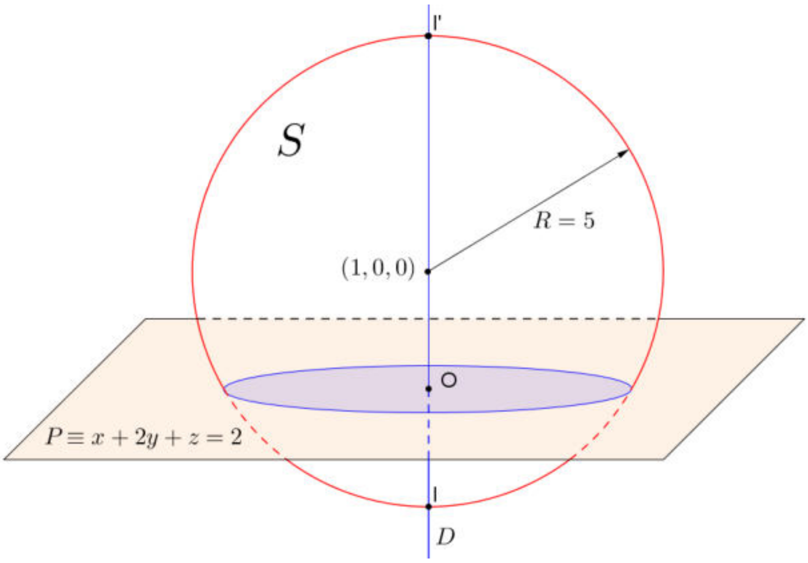
$$\begin{cases}(x-4)^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+(y-3)^2+z^2=R^2\\x^2+y^2+(z-2)^2=R^2\\(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=R^2\end{cases}\Rightarrow.....\Rightarrow\begin{cases}-8x+6y=-7\\-2x+z=-3\\-x+y+z=-1\end{cases}$$

Le centre à pour coordonnées $O\left(\frac{19}{14},\frac{9}{14},-\frac{2}{7}\right)$ et le rayon $\sqrt{\frac{733}{98}}\cong 2.734$

EXGAE111 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2013, série 1.

Soit une sphère S de rayon 5 centrée au point $(x,y,z)=(1,0,0)$ et un plan P d'équation cartésienne $x+2y+z=2$. L'intersection du plan et de la sphère est un cercle. Soit O le centre de ce cercle. Soit D la droite passant par O et perpendiculaire au plan P.
Donnez les coordonnées cartésiennes des points d'intersection entre la droite D et la sphère S.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$S \equiv (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 25$$

D passe par $(1,0,0)$ et $D \perp$ plan $P \Rightarrow D \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} = (\lambda)$

$$\{I,I'\} = S \cap D : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x-1=\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda^2 + \lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{5}{\sqrt{6}}$$

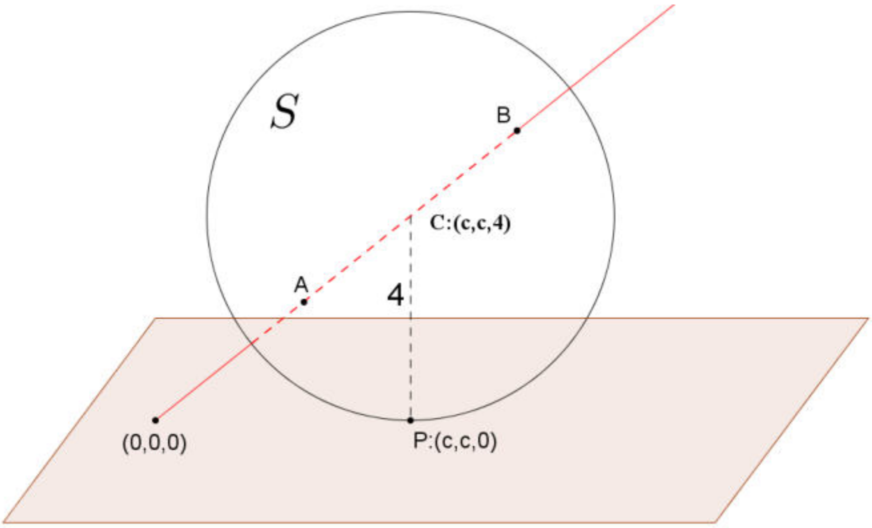
Coordonnées de I et I' : $\boxed{\left(1 \pm \frac{5}{\sqrt{6}}, \pm\frac{10}{\sqrt{6}}, \pm\frac{5}{\sqrt{6}}\right)}$

Le 19 septembre 2013.

EXGAE112 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2013, série 2.

Soit un système de coordonnées cartésiennes XYZ. Soit une sphère S de rayon 4 qui présente un seul point de contact P avec le plan XY. Soit une droite D passant par l'origine et par le centre de la sphère, et dont les points satisfont à $x = y$.
Soient A et B les deux points d'intersection de la droite avec la sphère.
La distance de B à l'origine est le double de celle de A à l'origine.
Donnez les coordonnées cartésiennes du point P.

Solution proposée par Nicole Berckmans



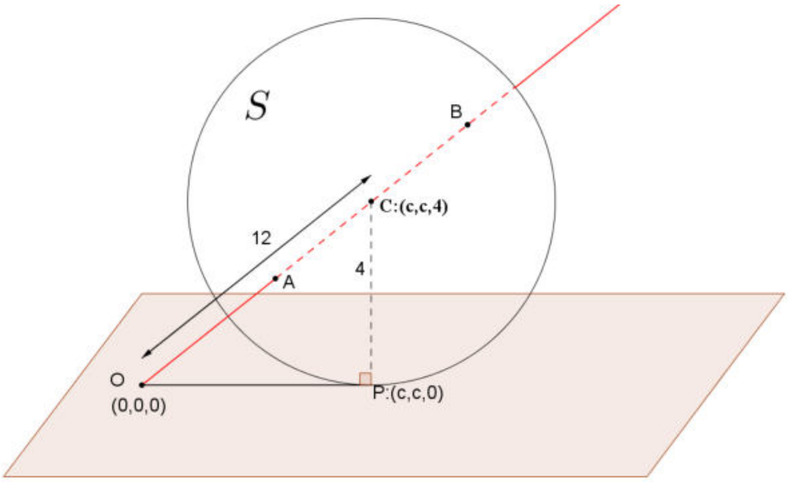
$$\overline{OA} = 2\overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow 3\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OC} \Rightarrow A:\left(\frac{2}{3}c, \frac{2}{3}c, \frac{8}{3}\right)$$

Donc $\overline{AC} = \sqrt{\left(c - \frac{2}{3}c\right)^2 + \left(c - \frac{2}{3}c\right)^2 + \left(4 - \frac{8}{3}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{9} + \frac{c^2}{9} + \frac{16}{9}} = 4 \Rightarrow \frac{2c^2}{9} + \frac{16}{9} = 16 \Rightarrow c^2 = 4 \times 16 \Rightarrow c = \pm 8$$

Conclusion : $\boxed{P(\pm 8; \pm 8, 0)}$

Solution proposée par Louis François



$$C:(c,c,\pm 4);\quad P:(c,c,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OB}-\overline{OA}=8\\ \overline{OB}=2\overline{OA}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overline{OA}=8\\ \overline{OB}=16\\ \overline{OC}=12\end{cases}$$

$$\overline{OP}^2=2c^2=12^2-4^2=144-16=128\Rightarrow c^2=64\Rightarrow c=\pm 8$$

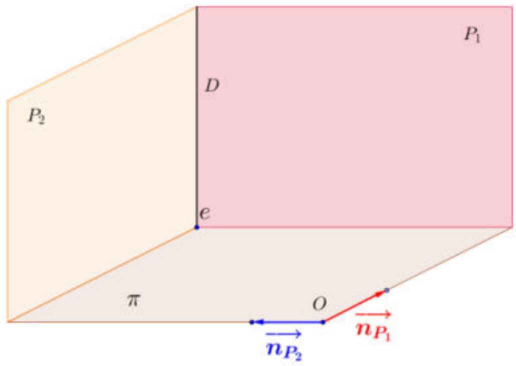
$$\Rightarrow \boxed{P(8,8,0)\text{ ou }P(-8,-8,0)}$$

Le 19 septembre 2013.

EXGAE113 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2013, série 2.

Soient les deux plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes $x+y+z=2$ et $x-y+z=1$ respectivement. Quelle est la (plus courte) distance entre l'origine et la droite d'intersection de ces deux plans?
Commencez par faire un schéma de principe (sans référence aucune aux équations des plans) dans un plan contenant l'origine et perpendiculaire à D. Faites apparaître dans ce schéma les normales aux plans P_1 et P_2 et le segment le plus court entre l'origine et D.

Solution proposée par Louis François



Le plan π passant par O et perpendiculaire à P_1 et P_2 admet pour vecteurs directeurs

$\overrightarrow{n_{P_1}}$ et $\overrightarrow{n_{P_2}}$. $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x = y$

$\pi \cap P_1 \cap P_2 = \{e\}$ donc $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x = 3/4 \Rightarrow e:\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

$d(o,D) = \overline{Oe} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{22}}{4}}$

Remarques

1) Pour trouver l'équation du plan π, on trouve son vecteur normal en faisant le produit vectoriel $\overrightarrow{n_{P_1}} \wedge \overrightarrow{n_{P_2}}$.

2) On aurait pu trouver 2 points de la droite D : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

Par exemple $A(3/2,1/2,0)$ et $B(1/2,1/2,1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) = \overrightarrow{n_\pi}$ et donc $\pi \equiv -x+z=0$

3) L'équation paramétrique de π peut aussi facilement se trouver

$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda+\mu \\ y = \lambda-\mu \\ z = \lambda+\mu \end{cases}$. On en déduit que $x = z$

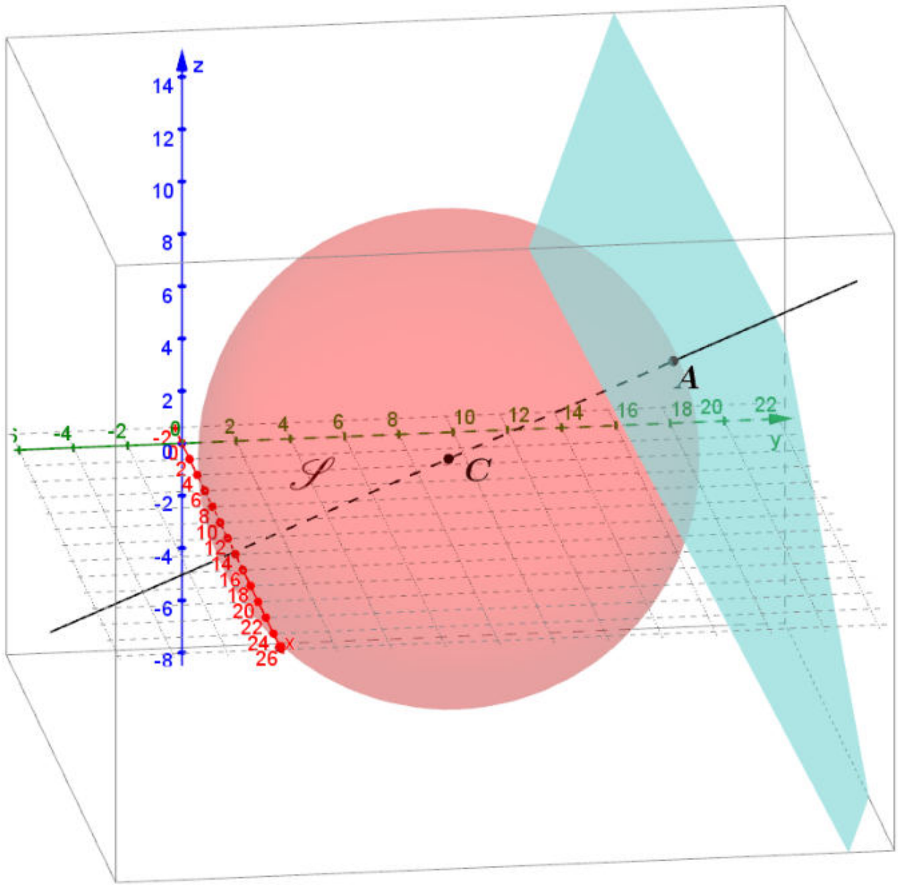
Le 19 septembre 2013.

EXGAE114 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Dans l'expace euclidien $E3$, muni d'une base orthonormée $OXYZ$, les coordonnées du centre C d'une surface sphérique (S) sont $C:(13,8,3)$. Cette surface (S) admet comme plan tangent le plan π d'équation cartésienne $[X+4Y+2Z=93]$. On considère une droite d passant par le point J $(6,5,1)$ et caractérisé par le triplet de paramètres directeurs suivant : $(8,9,10)$.

On demande :

1. de déterminer l'équation cartésienne de la surface sphérique (S)
2. de calculer l'angle formé par la droite d et la droite passant par J et C.



Solution proposée par Fabienne Zoetard

1. $R = \overline{CA} = \dfrac{|13+4\times 8+2\times 3-93|}{\sqrt{1+16+4}} = \dfrac{42}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{21}$

$\Rightarrow \mathscr{S} \equiv (X-13)^2 + (Y-8)^2 + (Z-3)^2 = 84$

Si on ne connait pas la formule de la distance d'un point à un plan.

1) On détermine la droite $d' \perp \pi$

2) On détermine A le point de percée de d' dans $\pi : A = d' \cap \pi$

3) On calcule la distance $R = \overline{AC}$

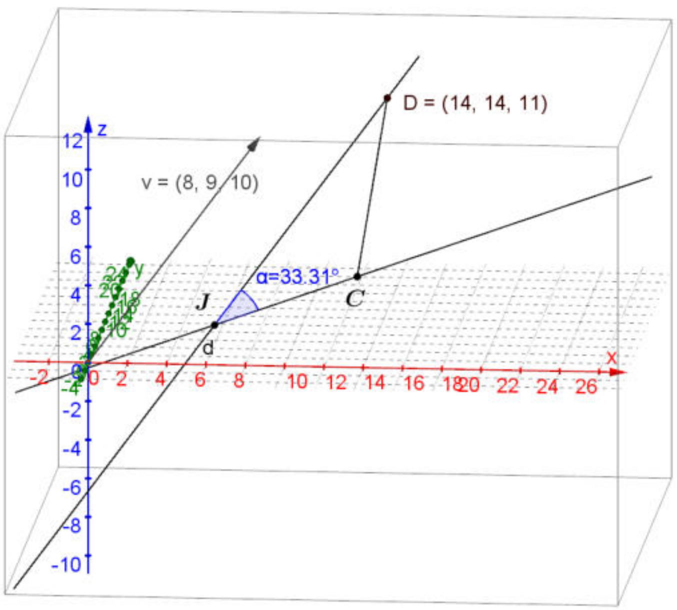
2. La droite d a pour équation : $d \equiv \dfrac{x-6}{8} = \dfrac{y-5}{9} = \dfrac{z-1}{10}$

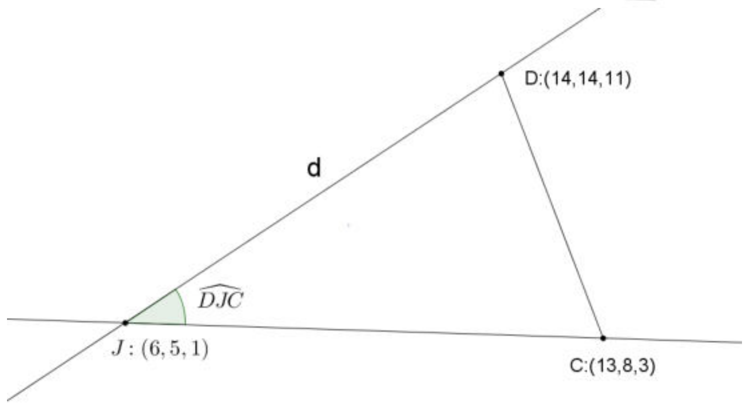
Soit $D(14,14,11)$ un point de la droite.

$\overline{CD}^2 = \overline{JD}^2 + \overline{JC}^2 - 2.\overline{JD}.\overline{JC}.\cos \widehat{DJC}$

or $\overline{CD}^2 = 1^2 + 6^2 + 8^2 = 101;\ \overline{JD}^2 = 8^2 + 9^2 + 10^2 = 245;\ \overline{JC}^2 = 7^2 + 3^2 + 2^2 = 62$

$\Rightarrow \cos \widehat{DJC} = \dfrac{245+62-101}{2.\sqrt{245}.\sqrt{62}} = 0.83571 \Rightarrow \widehat{DJC} = 33.31°$





Méthode alternative

1. Soit $P(93,0,0) \in \pi \Rightarrow \overline{PC} = (80,-8,-3)$ et $\overrightarrow{n_\pi} = (1,4,2) \Rightarrow \overrightarrow{1_{n_\pi}} = \dfrac{(1,4,2)}{\sqrt{21}}$

$$R = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{1_{n_\pi}} = \frac{1\times 80 - 8\times 4 - 3\times 2}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{21} \Rightarrow \mathscr{S} \equiv (X-13)^2 + (Y-8)^2 + (Z-3)^2 = 84$$

2. $\overrightarrow{v_d} = (8,9,10)$ et $\overrightarrow{v_{JC}} = (7,3,2)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_d}.\overrightarrow{v_{JC}}}{\left|\overrightarrow{v_d}\right|.\left|\overrightarrow{v_{JC}}\right|} = \frac{8\times 7 + 9\times 3 + 10\times 2}{\sqrt{8^2+9^2+10^2}\sqrt{7^2+3^2+2^2}} = \frac{103}{\sqrt{245}\sqrt{62}} = 0.8357 \Rightarrow \alpha = 33.31°$$

---

21 novembre 2013

EXGAE115 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Soient 5 plans dans un repère orthonormé $Oxyz$, définis par les équations :

$$\pi_1 \equiv 8x - 12y + 0z - 200 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 3x + 4y + 0z - 265 = 0$$

$$\pi_3 \equiv y = 10$$

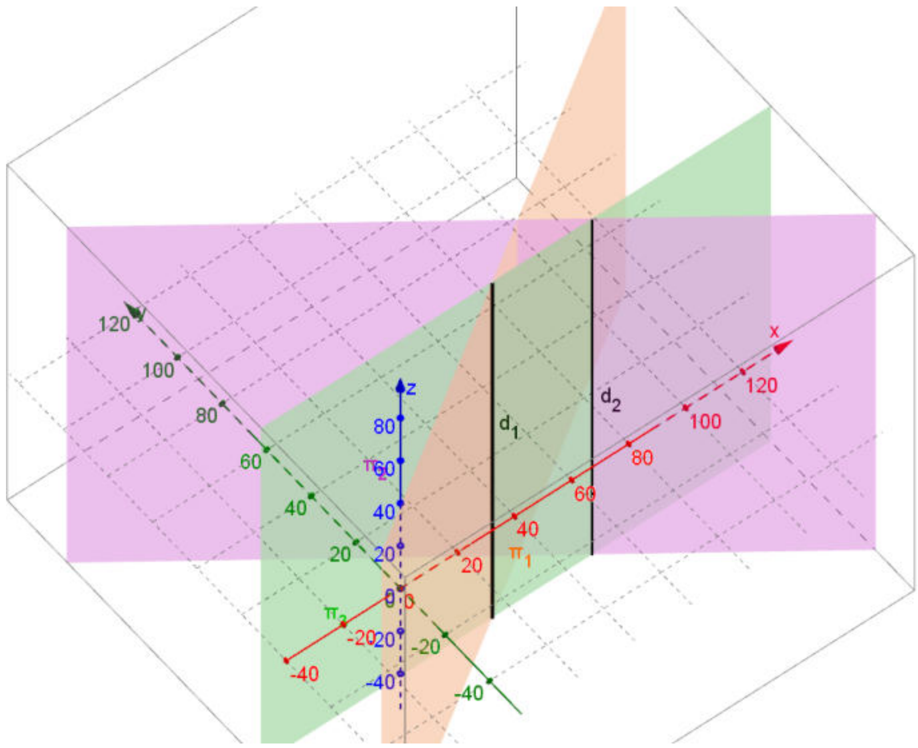
$$\pi_4 \equiv z = 65$$

$$\pi_5 \equiv z = 15$$

1) On demande de déterminer l'angle entre d_1 qui est $\pi_1 \cap \pi_3$ et d_3 qui est $\pi_2 \cap \pi_3$.

2) On demande de présenter un schéma illustrant la cofiguration des droites d_1 et d_2.

3) On demande de calculer le volume du solide limité par les plans π_4 et π_5 obtenu par révolution de d_2 autour de la droite d_1.



1) Tous les plans donnés sont parallèles à l'axe Oz et donc les droites d_1 et d_2 sont elles aussi parallèles à l'axe Oz.

$$d_1 = \pi_1 \cap \pi_3 = \begin{cases} 8x - 12y - 200 = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow d_1 = \begin{cases} x = 40 \\ y = 10 \\ z = \lambda \end{cases}$$

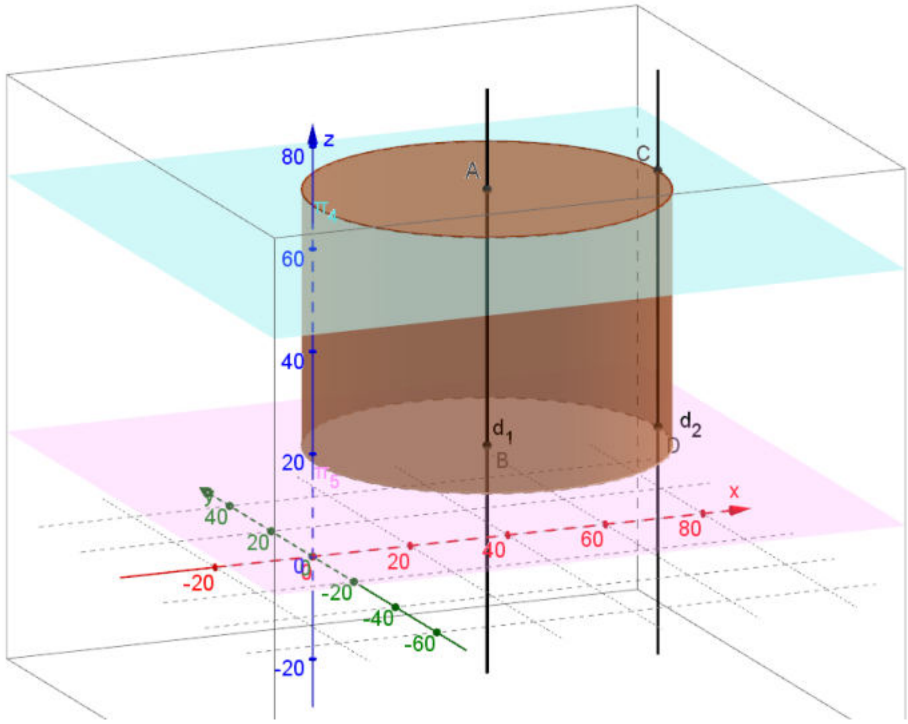
$$d_2 = \pi_2 \cap \pi_3 = \begin{cases} 3x + 4y - 265 = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow d_2 = \begin{cases} x = 75 \\ y = 10 \\ z = \mu \end{cases}$$

2) Le volume est un cylindre de hauteur $H = 50$ et de rayon $R = \overline{AC}$ avec

$$A = d_1 \cap \pi_4 = (40,10,65) \text{ et } C = d_2 \cap \pi_4 = (75,10,65)$$

$$\Rightarrow R = \overline{AC} = 75 - 40 = 35$$

Et donc : $V = \pi R^2 H = \pi \times 35^2 \times 50 = 192422,6 \; uv$



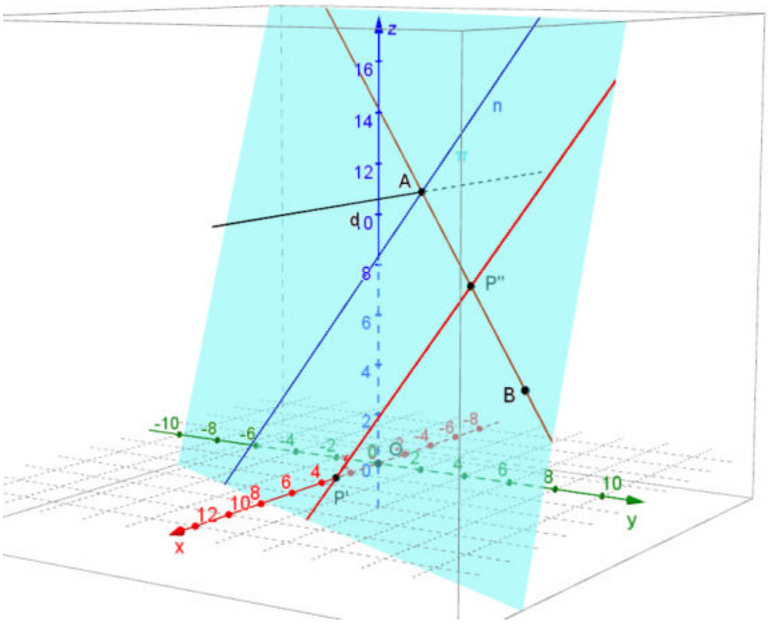
EXGAE116 - POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2013.

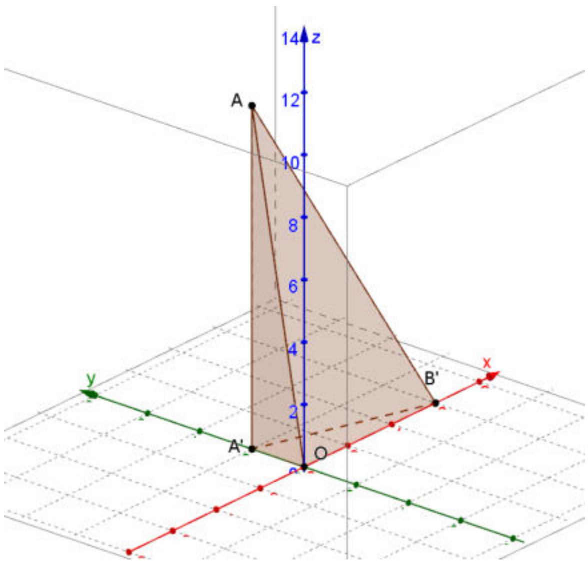
Dans le repère cartésien $Oxyz$, on considère

- le point A de coordonnées $(0,2,11)$;
- le point B de coordonnées $(6,10,5)$.

1) On s'intéresse à la perpendiculaire commune entre l'axe Ox et la droite passant par les points A et B. On demande d'en rechercher
   - les pieds P' et P'' sur respectivement, Ox et la droite AB;
   - les équations paramétriques.

2) De rechercher le volume du tétraèdre $OB'AA'$ si A' est la projection orthogonale de A l'axe Oy et B' la projection de B sur l'axe Ox.





1) Les vecteurs directeurs de Ox et AB sont $\overrightarrow{v_{Ox}}=(1,0,0)$ et $\overrightarrow{v_{AB}}=(6,8,-6)=(3,4,-3)$

Par A traçons la droite d parallèle à l'axe Ox, donc $\overrightarrow{v_d}=(1,0,0)$

Recherchons $\vec{n}$ le vecteur normal au plan défini par AB et d :

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_{AB}}\wedge\overrightarrow{v_d}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z}\\ 3 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,-3,-4)$$

C'est la direction de la droite n indiquée sur la figure.

Recherchons le plan π défini par les droites n et AB, et passant par le point A

$$\pi=\begin{cases}x=0+3\lambda+0\mu\\ y=2+4\lambda-3\mu\\ z=11-3\lambda-4\mu\end{cases}$$

P' est le point de percée de l'axe Ox dans π. Comme les équations paramètriques de Ox

sont $Ox=\begin{cases}x=k\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow P'=\begin{cases}k=3\lambda\\ 0=2+4\lambda-3\mu\\ 0=11-3\lambda-4\mu\end{cases}\Rightarrow ....\Rightarrow \boxed{P'=(3,0,0)}$

La perpendiculaire commune p est la droite parallèle à n et issue du point P'

$$p=\begin{cases}x=3\\ y=-3k\\ z=-4k\end{cases}\quad \text{On a alors } P''=p\cap AB \text{ avec } AB=\begin{cases}x=0+3\lambda\\ y=2+4\lambda\\ z=11-3\lambda\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3=3\lambda\\ -3k=2+4\lambda\\ -4k=11-3\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ k=-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{P''=(3,6,8)}$$

2) La projection de A sur Oy est $A'=(0,2,0)$ et la projection de B sur Ox est $B'=(6,0,0)$

Le volume du tétraèdre $OB'AA'$ est : $V=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 6 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 11 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boxed{22 \text{ uv}}$

EXGAE117 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$.

a) Donner une équation cartésienne du plan ABC.

b) Déterminer les coordonnées du point O' symétrique de O par rapport au plan ABC.

c) Calculer l'angle que fait la droite AO' avec le plan ABC.

d) Donner des équations cartésiennes de la droite AO'.

e) Donner une équation cartésienne de la sphère S centrée en O' et tangente au plan ABC.

f) Soient A', B' et C' les intersections de la sphère S avec les droites $O'A, O'B$ et $O'C$, respectivement. Calculer le volume du tétraèdre $O'A'B'C'$

Solution proposée par Dominique Druez

1.

$$\begin{cases} A(1;0;0) \\ B(0;2;0) \to ABC \equiv \\ C(0;0;3) \end{cases} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = z.2 + 3(2x - 2 + y) = 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

2.

$$d \perp ABC\ passant\ par\ O: \begin{cases} x = 6k \\ y = 3k \\ z = 2k \end{cases} \to d \cap ABC: 36k + 9k + 4k - 6 = 0 \to k_{d \cap ABC} = \frac{6}{49} \to k_{O'} = 2.\frac{6}{49} = \frac{12}{49}$$

$$O' = (\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49})$$

3.

$$\overrightarrow{AO'} = \left(\frac{23}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right), \vec{d} = (6,3,2)\ et\ \overrightarrow{AO'} \cdot \vec{d} = |\overrightarrow{AO'}| \cdot |\vec{d}| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = |\overrightarrow{AO'}| \cdot |\vec{d}| \sin\alpha$$

$$6\frac{23}{49} + 3\frac{36}{49} + 2\frac{24}{49} = \frac{294}{49} = 6 = \sqrt{\left(\frac{23}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2 + \left(\frac{24}{49}\right)^2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \sin\alpha = \sqrt{\frac{2401}{2401}}\sqrt{49} \sin\alpha = 7\sin\alpha \to \alpha = \arcsin\frac{6}{7}$$

Remarque : par construction de O' et parceque A est un point du plan ABC, l'angle que fait la droite AO' avec le plan ABC, est le même que l'angle que fait la droite AO avec ce même plan. Les calculs sont plus simples :

$$\overrightarrow{AO} \cdot \vec{d} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\vec{d}| \sin\alpha$$

$$6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \sin\alpha = 7\sin\alpha \to \alpha = \arcsin\frac{6}{7}$$

4.

$$\overrightarrow{AO'} = \left(\frac{23}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 23k+1 \\ y = 36k \\ z = 24k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{23} = k \\ \frac{y}{36} = k \\ \frac{z}{24} = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{23} = \frac{y}{36} \\ \frac{y}{36} = \frac{z}{24} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{23} = \frac{y}{36} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \end{cases}$$

5.

$$d(O',\mathrm{ABC}) = \frac{|a.x_{O'} + b.y_{O'} + c.z_{O'} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|\frac{6.72}{49} + \frac{3.36}{49} + \frac{2.24}{49} - 6\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6}{7}$$

<u>Remarque</u> : par construction de O' la distance AO'vaut la distance AO, soit 1, donc la distance de O' au plan vaut le sinus de l'angle entre la droite AO' et le plan ABC déjà calculé, soit 6/7.

$$S \equiv \left(x - \frac{72}{49}\right)^2 + \left(y - \frac{36}{49}\right)^2 + \left(z - \frac{24}{49}\right)^2 = \frac{36}{49}$$

6.

$\overrightarrow{AO'} = \left(\frac{23}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right), AO' \equiv \left(\frac{23}{49}k+1,\frac{36}{49}k,\frac{24}{49}k\right) \rightarrow$ *remplacer dans S pour trouver k puis* $A' \rightarrow$ *calculs compliqués ...*

$\overrightarrow{BO'} = \left(\frac{72}{49},\frac{-62}{49},\frac{24}{49}\right), BO' \equiv \left(\frac{72}{49}k,\frac{-62}{49}k+2,\frac{24}{49}k\right) \rightarrow$ *remplacer dans S pour trouver k puis* $B' \rightarrow$ *calculs compliqués ...*

$\overrightarrow{CO'} = \left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{-123}{49}\right), CO' \equiv \left(\frac{72}{49}k,\frac{36}{49}k,\frac{-123}{49}k+3\right) \rightarrow$ *remplacer dans S pour trouver k puis* $C' \rightarrow$ *calculs compliqués ...*

<u>Remarque</u> : par construction de O' le tétraèdre de sommet O construit similairement avec une sphère centrée en O de même rayon 6/7 est symétrique et donc de même volume. De plus, les intersections avec la sphère sont sur chaque axe de Oxyz à une distance de 6/7 de O. En effet, A, B, C sont sur chaque axe de Oxyz.

$$Vol = \frac{1}{6}(6/7)^3 = \frac{36}{343}$$

EXGAE118 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(-1;-1;1)$, $B(1;0;0)$ et $C(0;2;0)$.

a) Etablir des équations cartésiennes de la droite OA, et de la droite BC.

b) Donner une équation cartésienne du plan. parallèle à la droite OA et contenant la droite BC.

c) Déterminer les coordonnées du point D obtenu par projection orthogonale du point O sur le plan π.

d) Calculer le volume du tétraèdre $OBCD$.

e) Donner une équation cartésienne de la sphère de centre D tangente à la droite OA.

f) Calculer l'angle α entre les droites OA et BC.

Solution proposée par Dominique Druez

$$OA \equiv \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases} \quad BC \equiv \begin{cases} 2x = -y + 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = z(-2-1) - (x-1)2 - y = -2x - y - 3z + 2 = 0$$

$$\pi \equiv 2x + y + 3z - 2 = 0$$

$$d \perp \pi \text{ passant par } O \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 3k \end{cases} \rightarrow 4k + k + 9k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{7} \rightarrow D = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$Vol_{OBCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 2 & 1/7 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\mu \perp OA \text{ passant par } D, \mu \equiv -x - y + z + a = 0 \rightarrow -\frac{2}{7} - \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$\mu \equiv -x - y + z = 0 \rightarrow OA \cap \mu = D' = (0,0,0)$$

$$\overline{DD'} = \sqrt{\left(\frac{2}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{7} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{49}} = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$S \equiv \left(x - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{14}{49}$$

$$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| . \left\|\overrightarrow{BC}\right\| . \cos \alpha$$

$$1.(-1) + (-2).(-1) + 0.1 = 1 = \sqrt{1+4+0}.\sqrt{1+1+1}.\cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15} \rightarrow \alpha = 75{,}04°$$

---

7 février 2014. Modifié le 26/06/2014 (Dominique Druez)

EXGAE119 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Dans l'espace rapporté au repère $OXYZ$, on considère le lieu $\mathscr{C}$ des points de coordonnées (x,y,z) dont la distance à l'axe des Z est égale à $|z|$. On considère également un plan $\mathscr{P}_a$ d'équation $ax+y+z=1$. Enfin, on regarde le lieu $\mathscr{L}_b$ des points à distance 1 de la droite $\mathscr{D}_b$ qui passe par l'origine et par le point P_b de coordonnées $(0,1-b,3+2b)$

(1) Quelle est l'équation cartésienne de $\mathscr{C}$?

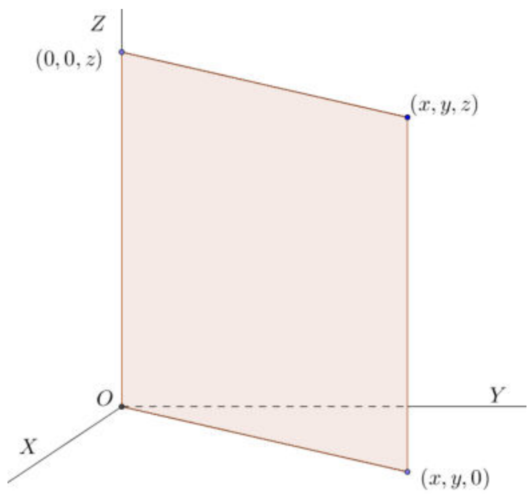
(2) L'intersection $\mathscr{C}\bigcap\mathscr{P}_a$ est une courbe qui possède un axe de symétrie. Donnez une équation paramètrique de cet axe.

(3) Quelle est l'équation cartésienne de $\mathscr{L}_b$?

(4) Pour quelle valeur de b est ce que $\mathscr{C}\bigcap\mathscr{L}_b$ est composé de deux cercles disjoints?

(5) Quelle est alors l'équation cartésienne de ces deux cercles?

(6) Pour quelle(s) valeur(s) de a et b est-ce que $\mathscr{P}_a\bigcap\mathscr{D}_b$ est vide?

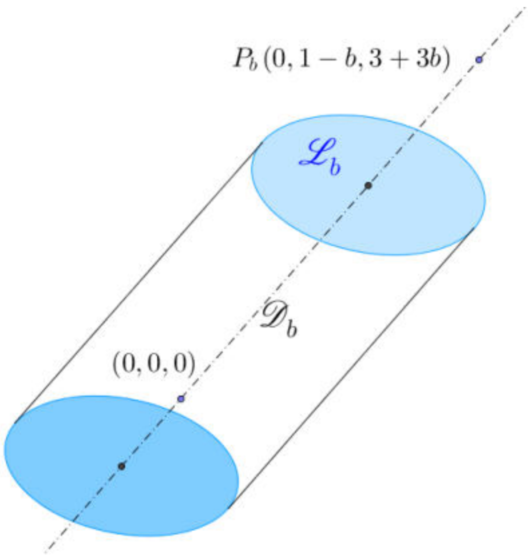


(1) La distance de (x,y,z) à $(0,0,z)$ vaut $\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \mathscr{C}\equiv\sqrt{x^2+y^2}=|z|\Rightarrow\mathscr{C}\equiv x^2+y^2=z^2$. C'est un cône de sommet $(0,0,0)$ et d'axe OZ.

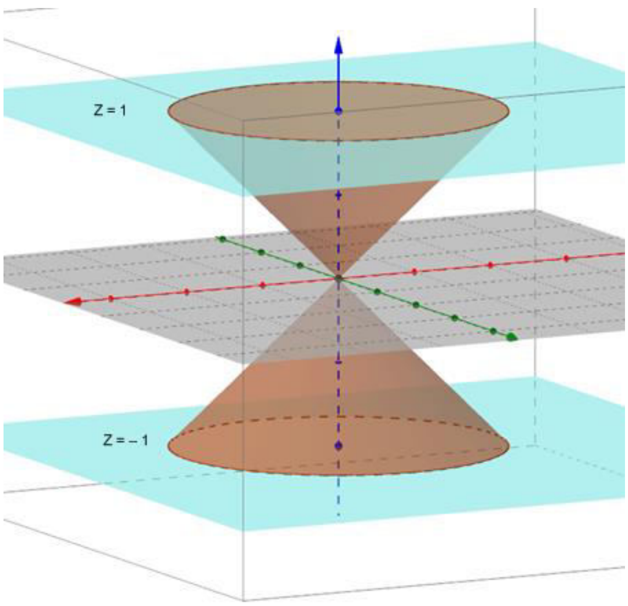
(2) Un plan coupe un cône suivant une conique. Cette conique possède au moins un axe de symétrie. La recherche de cet axe de symétrie est hors matière.

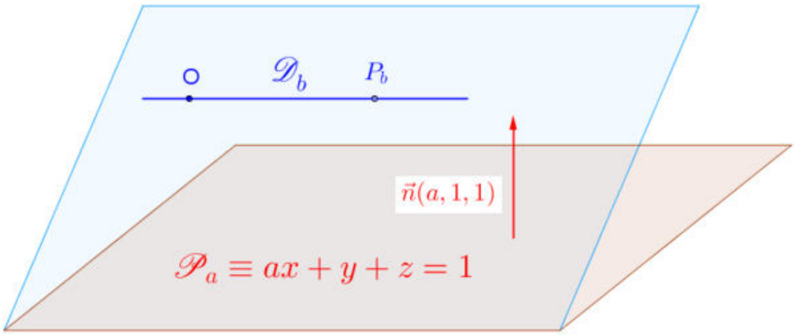
(3) $\mathscr{L}_b$ est un cylindre d'axe $\mathscr{D}_b$ et dont le rayon de la base vaut 1.



(4) L'intersection du cône $\mathscr{C}$ et du cylindre $\mathscr{L}_b$ sera composé de 2 cercles si les deux solides ont le même axe OZ. On doit donc avoir $b=1 \Rightarrow P_1(0,0,5)$.

(5) Ces deux cercles sont $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=-1 \end{cases}$





(6) $\mathscr{D}_b \cap \mathscr{P}_a = \varnothing$ si $\mathscr{D}_b$ est parallèle à $\mathscr{P}_a$ et si $\mathscr{D}_b$ est non contenu dans $\mathscr{P}_a$

1) $\mathscr{D}_b // \mathscr{P}_a$ si la direction $\overrightarrow{(0,1-b,3+2b)}$ de $\mathscr{D}_b$ est orthogonale au vecteur normal $\vec{n}(a,1,1)$ de $\mathscr{P}_a \Rightarrow \overrightarrow{(0,1-b,3+2b)}.\overrightarrow{(a,1,1)} = 0 \Rightarrow 1 - b + 3 + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -4}$

2) $\mathscr{D}_b$ est non contenu dans $\mathscr{P}_a$ car le point $(0,0,0)$ de $\mathscr{D}_b$ ne vérifie pas l'équation de $\mathscr{P}_a$

13 octobre 2014