Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 13

EXGAE130 – EXGAE139

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Octobre 2014

EXGAE130 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $P(0,1,0)$ et $Q\left(\sqrt{2},0,1\right)$.

a) Donnez les équations cartésiennes des plans α et β où $\alpha = OPQ$ et β le plan perpendiculaire à α passant par P et Q.

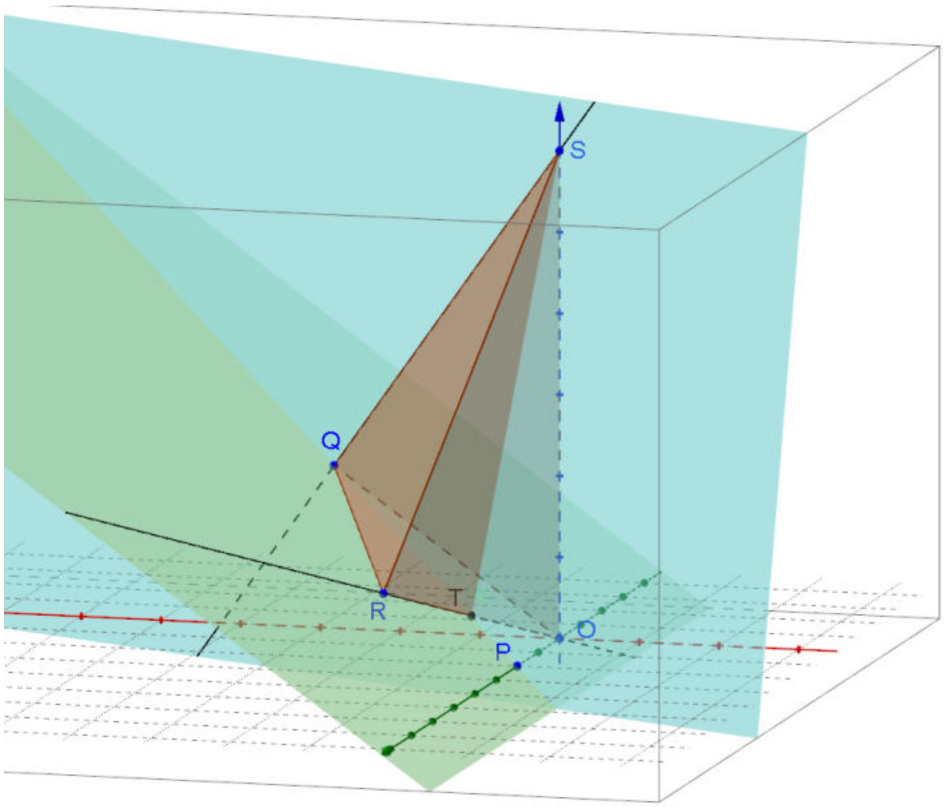
b) Donnez les équations paramètriques de la droite d perpendiculaire à β et passant par O.

c) Donnez les coordonnées du point R symétrique de O par rapport à β.

d) Montrez que le triangle OQR est équilatéral.

e) Le plan β coupe la droite Oz en un point S. Calculez la distance entre ce point et le plan α.

f) Calculez le volume du tétraèdre $OQRS$



a) $P(0,1,0), Q(\sqrt{2},0,1) \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(0,1,0)$ et $\overrightarrow{OQ}=(\sqrt{2},0,1)$

Equations paramètriques : $\alpha \equiv \begin{cases} x=\sqrt{2}\mu & (1) \\ y=\lambda & (2) \\ z=\mu & (3) \end{cases}$

Equations cartésiennes : on élimine μ entre (1) et $(3) \Rightarrow \boxed{\alpha \equiv x-\sqrt{2}z=0}$

Ou bien, on a directement : $\alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha \equiv x-\sqrt{2}z=0}$

b) $\overrightarrow{PQ}=(\sqrt{2},-1,1)$ et le vecteur normal à α : $\overrightarrow{n_\alpha}=(1,0,-\sqrt{2})$

$$\Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta \equiv \sqrt{2}x+3y+z-3=0} \quad (4)$$

c) Soit d la droite perpendiculaire au plan β et passant par O.

$$\overrightarrow{n_\beta}=(\sqrt{2},3,1) \Rightarrow d \equiv \begin{cases} x=\sqrt{2}h \\ y=3h \\ z=h \end{cases} \quad (5)$$

Le point $T=d\cap\beta$ est obtenu à partir de (4) et (5)

$$2h+9h+h-3=0 \Rightarrow h=\frac{1}{4} \Rightarrow T\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OT}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

Le point R symétrique de O par rapport au plan β est tel que : $\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OT} \Rightarrow \boxed{R\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}$

d) Pour le triangle OQR, il est facile de voir que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ}=(\sqrt{2},0,1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{3} \\ \overrightarrow{OR}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OR}\right|=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{3} \\ \overrightarrow{QR}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow OQR \text{ est équilatéral.}$$

e) Les coordonnées de S s'obtiennent par partir de l'équation (4) de $\beta \Rightarrow S(0,0,3)$

La distance de S à α est donnée par : $d(S,\alpha)=\frac{\overrightarrow{n_\alpha}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}.\overline{OS}=\frac{\left(1,0,\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}}.(0,0,3)=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{6}}$

Alternativement, on peut déterminer X la projection orthogonale de S sur α. X est donc le point de percée de la perpendiculaire à α passant par S.

$SX \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 3-\sqrt{2}k \end{cases}$ On remplace dans l'équation de α: $k-\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}k\right)=0 \Rightarrow k=\sqrt{2}$

$\Rightarrow X\left(\sqrt{2},0,1\right)$. Ce sont les coordonnées de Q et donc le segment Q est la hauteur du tétraèdre.

$\Rightarrow d(S,\alpha)=\overline{QS}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-0\right)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}$

f) Le volume du tétraèdre $OQRS$:

$$V=\frac{1}{3}A_{OQR}.\overline{QS}=\frac{1}{3}.\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2.\sin 60°}{2}.\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{6}=\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

On peut calculer le volume directement à partir de la valeur absolue du déterminant obtenu à partir des coordonnées des sommets :

$$V=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right|=\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

Le 13 octobre 2015

EXGAE131 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2015.

Cette question prend place dans l'espace euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements et calculs complémentaires (qui font aussi partie de la réponse) ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.
On regarde L_k, le lieu des points dont la distance à $(0,0,0)$ est k fois la distance à $(1,1,1)$.
Ici k est une constante réelle positive.

1) Pour quelle valeur de k le lieu est-il un plan? Quelle est l'équation cartésienne de ce plan?

$k =$
$L_k \equiv$

2) Quelle est l'équation cartésienne de ce lieu pour $k = \sqrt{2}$? De quelle sorte de lieu s'agit-il? (Plan, ou sphère, ou droite, etc.)

$L_{\sqrt{2}} =$
$L_{\sqrt{2}}$ est

3) Quelle est l'intersection du plan trouvé en (1) et du lieu de $L_{\sqrt{2}}$?

Plan $\cap L_{\sqrt{2}} =$

4) Représentez la situation des points $(1),(2)$ et (3) par un dessin clair.

Solution proposée par Emilie Jacqmin

1) $M = (x;y;z) \in L_k \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = k.\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} \quad (k \geq 0)$

Elevons les deux membres au carré :

$x^2+y^2+z^2 = k^2.(x^2-2x+1+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow (1-k^2).x^2+(1-k^2).y^2+(1-k^2).z^2+2k^2x-k^2=0$

Il s'agit d'un plan ssi $k=1$.

$k=1$
$L_k \equiv 2x-1=0$

2) Si $k=\sqrt{2}$, alors $L_{\sqrt{2}} \equiv -x^2-y^2-z^2-4x+2=0$

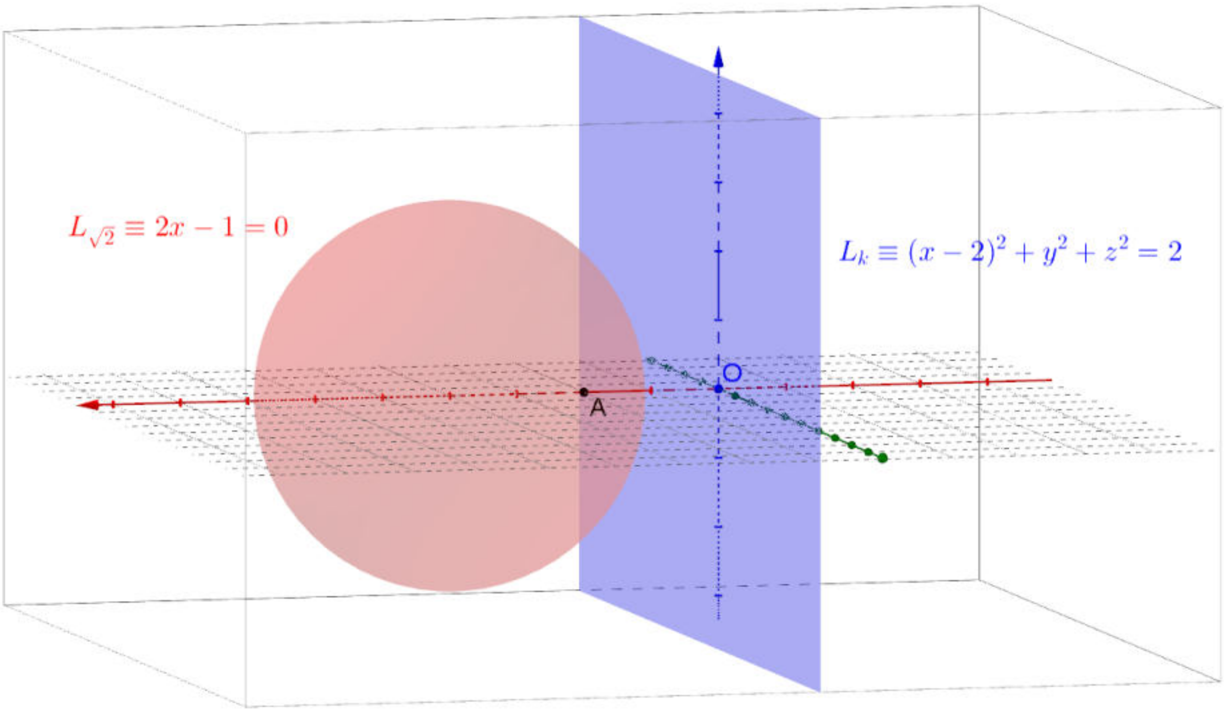
$L_{\sqrt{2}} \equiv (x-2)^2+y^2+z^2=2$
$L_{\sqrt{2}}$ est la sphère centrée en $(2;0;0)$ et de rayon $\sqrt{2}$

3) A résoudre :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y^2 + z^2 = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Système impossible

$\boxed{\text{Plan} \cap L_{\sqrt{2}} = \phi}$



Le 19 septembre 2013.

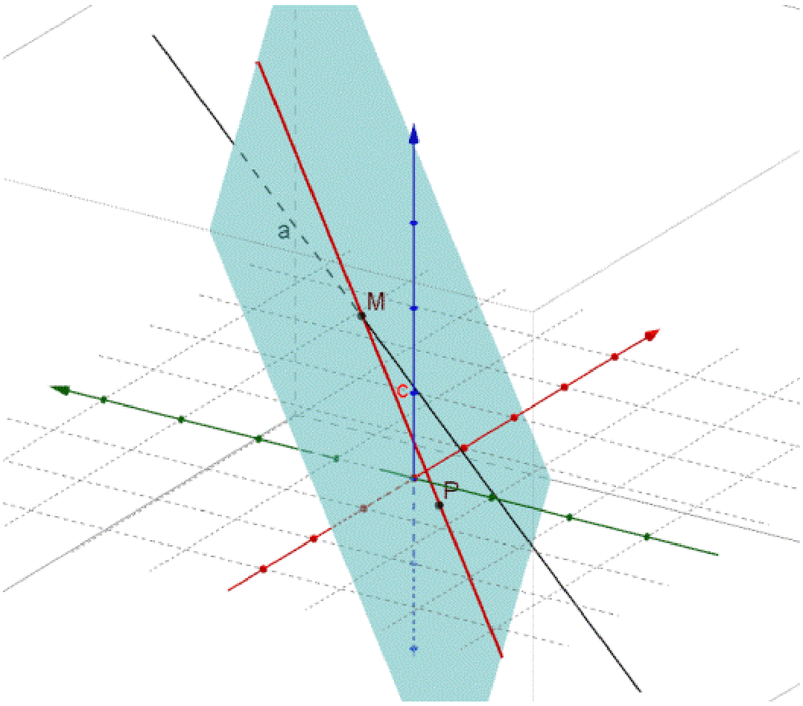
EXGAE132 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne le point $P(1,0,-1)$, le plan $\pi \equiv x-2y+z=0$ et les droites

$$a \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \qquad b \equiv \begin{cases} x-2y-z=0 \\ 3x-y+2z=-1 \end{cases}$$

a) Etablissez des équations paramétriques de la droite c passant par P, parallèle à π et coupant la droite a.

b) Etablissez des équations cartésiennes de la droite d passant par P et coupant les droites a et b.



a) Le point P appartient au plan π. On ne peut donc tracer une droite parallçle à π et passant par P mais on peut déterminer une droite incluse dans π.

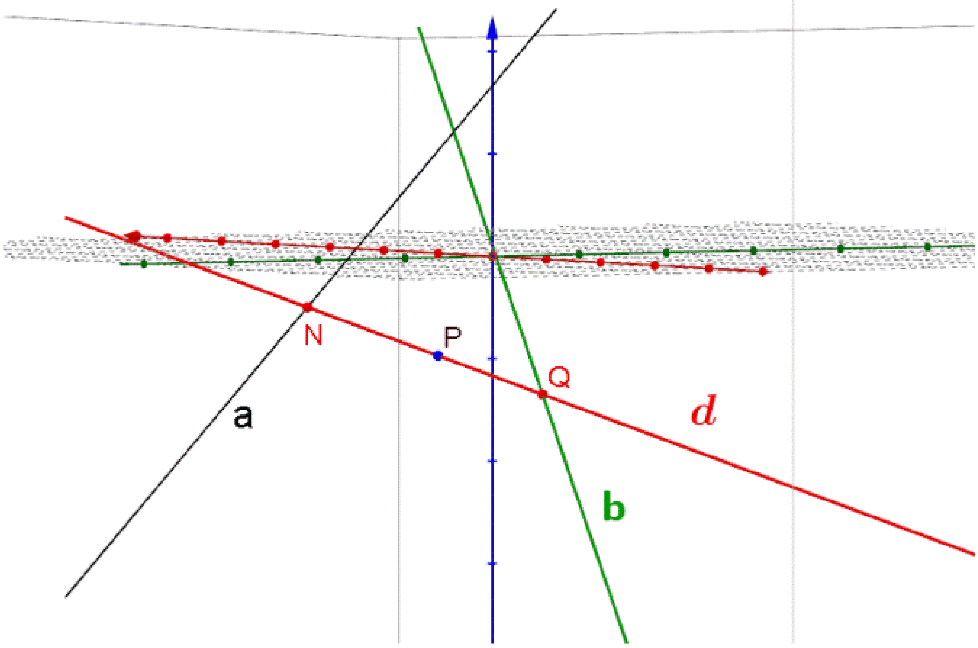
Notons que les équations de la droite a peuvent s'écrire plus simplement :

$$a = \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow a = \begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Cherchons le point M de percée de a dans π.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow M = (1,2,3)$$

$\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{MP} = (0,2,4) = (0,1,2)$. La droite c est alors $\boxed{c \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = -1 + 2k \end{cases}}$



b) La droite d est l'intersection du plan constitué par a et P soit : $x=1$

et du plan constitué par la droite b et P.

Cherchons deux points de b :

$$b=\begin{cases}x-2y-z=0\\3x-y+2z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{si } x=0\Rightarrow\begin{cases}-2y-z=0\\-y+2z=-1\end{cases}\Rightarrow C=\left(0,\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)\\ \text{si } y=0\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\3x+2z=-1\end{cases}\Rightarrow D=\left(-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5}\right)\end{cases}$$

Le plan bP est alors : $\begin{vmatrix}x-1 & y & z+1\\0-1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}+1\\-\frac{1}{5}-1 & 0 & -\frac{1}{5}+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow bP\equiv 2x+y+3z+1=0$

On peut maintenant écrire l'équation de la droite

$$d=\begin{cases}x=1\\2x+y+3z+1=0\end{cases}\text{ ou } d=\begin{cases}x=1\\y+3z=-3\end{cases}\text{ ou encore } d\equiv X=(1,0,-1)+k(0,-3,1)$$

Les points d'intersection entre les différentes droites sont :

$$N=a\cap d=\begin{cases}x=1\\y-z=-1\\y+3z=-3\end{cases}\Rightarrow N=\left(1,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$Q=b\cap d=\begin{cases}x-2y-z=0\\3x-y+2z=-1\\x=1\\y+3z=-3\end{cases}\Rightarrow Q=\left(1,\frac{6}{5},-\frac{7}{5}\right)$$

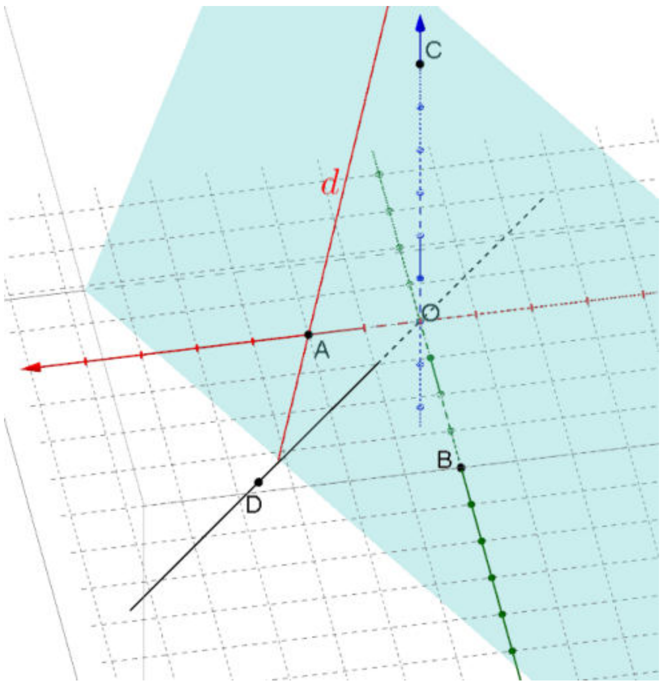
EXGAE133 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$ et $D(2,3,1)$.

a) Donnez une équation cartésienne du plan ABC et une paire d'équations cartésiennes de la droite OD.

b) Donnez des équations paramétriques de la droite d du plan ABC passant par A et orthogonale à la droite OD.

c) Donnez des équations paramétriques de la droite d' du plan ABC passant par B et sécante à la droite OD.



$a)\ \pi_{ABC} \equiv \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ou $\pi_{ABC} \equiv 6x+3y+2z=6$

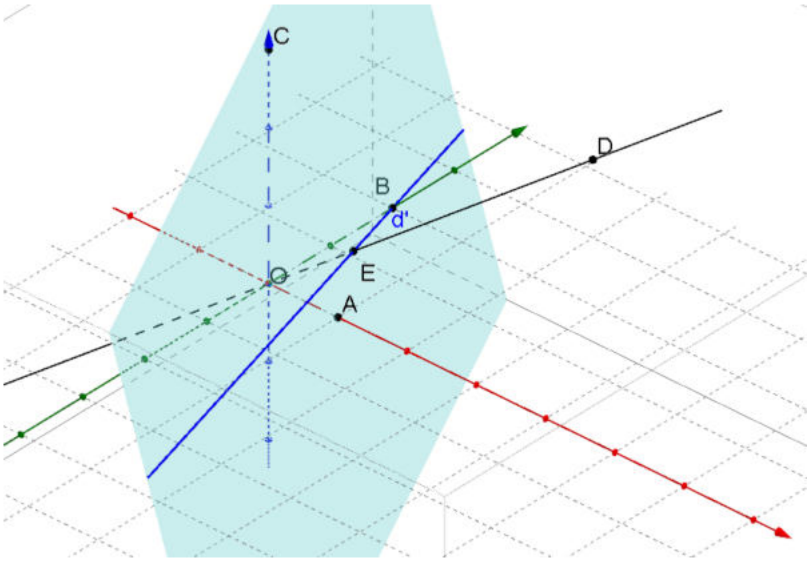
$OD \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=z-1$ ou $OD \equiv \begin{cases} x=2+2k \\ y=3+3k \\ z=1+k \end{cases}$

$b)$ Le vecteur directeur de OD est le vecteur normal ou plan π cherché.

$\overrightarrow{v_{OD}}=(2,3,1) \Rightarrow \pi \equiv 2x+3y+z+\alpha=0$

π passe par $A \Rightarrow \alpha=-2 \Rightarrow \pi \equiv 2x+3y+z-2=0$

La droite d est alors simplement $d=\begin{cases} 6x+3y+2z=6 \\ 2x+3y+z-2=0 \end{cases}$ ou $d=\begin{cases} x=1+3k \\ y=2k \\ z=-12k \end{cases}$



$c)$ Cherchons $E=OD\cap\pi_{ABC} \Rightarrow 6(2+2k)+3(3+3k)+2(1+k)=0 \Rightarrow k=\frac{-17}{23}$

$\Rightarrow E=\left(\frac{12}{23},\frac{18}{23},\frac{6}{23}\right)$

La droite d' passe par B et $E \Rightarrow d' \equiv \frac{x}{\frac{12}{23}}=\frac{y-2}{\frac{18}{23}-2}=\frac{z}{\frac{6}{23}} \Rightarrow d' \equiv \frac{x}{6}=\frac{y-2}{-14}=\frac{z}{3}$

EXGAE134 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

Cette question prend place dans l'espace euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

Une mésange vole paisiblement et se trouve au point $(t, t+1, 2t-2)$ au temps t. Au temps t, un moineau est au point $(t-2, t, t)$.Un merle est perché sur un arbre au point $(5,5,5)$. Robin des Bois, en quête de gibier pour nourrir Petit Jean, aimerait les abattre d'une seule flèche.

(1) A quel moment t_{proche} la mésange est-elle au plus proche du moineau? Quelle est la distance entre ces deux oiseaux à ce moment-là?

$t_{\text{proche}} =$ distance =

(2) A quel moment t_{align} les trois oiseaux sont-ils alignés?

$t_{\text{align}} =$

(3) On recherche la trajectoire idéale de la flèche (supposée infiniment rapide) à ce moment-là, qui est la droite traversant les trois oiseaux. Quelle est l'équation cartésienne de cett droite, à l'instant t_{align} trouvé en (2)

Trajectoire de la flèche $=$

(4) Représentez par un dessin la trajectoire de la flèche, la position des trois oiseaux au moment $t_{\text{align.}}$

Solution proposée par Louis François

(1) Mésange : $M_e = (t, t+1, 2t-2)$

Moineau : $M_o = (t-2, t, t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_oM_e} = (2,1,t-2) \Rightarrow \overline{M_oM_e} = \sqrt{4+1+(t-2)^2} = \sqrt{5+(t-2)^2}$

La distance minimale s'obtient en égalant à zéro la dérivée.

$$(\text{Distance})' = \left(\overline{M_oM_e}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5+(t-2)^2}}}.2(t-2) = 0 \rightarrow \boxed{t_{\text{proche}} = 2 \text{ s}}$$

C'est bien un minimum comme l'indique le tableau de signes

		2		
$\left(\overline{M_oM_e}\right)'$	$-$	0	$+$	et on a $\boxed{\text{distance} = \overline{M_oM_e} = \sqrt{5}}$
$\overline{M_oM_e}$	$\searrow$	min	$\nearrow$	

(2) Soit le merle en position : $M_{er} = (5,5,5)$

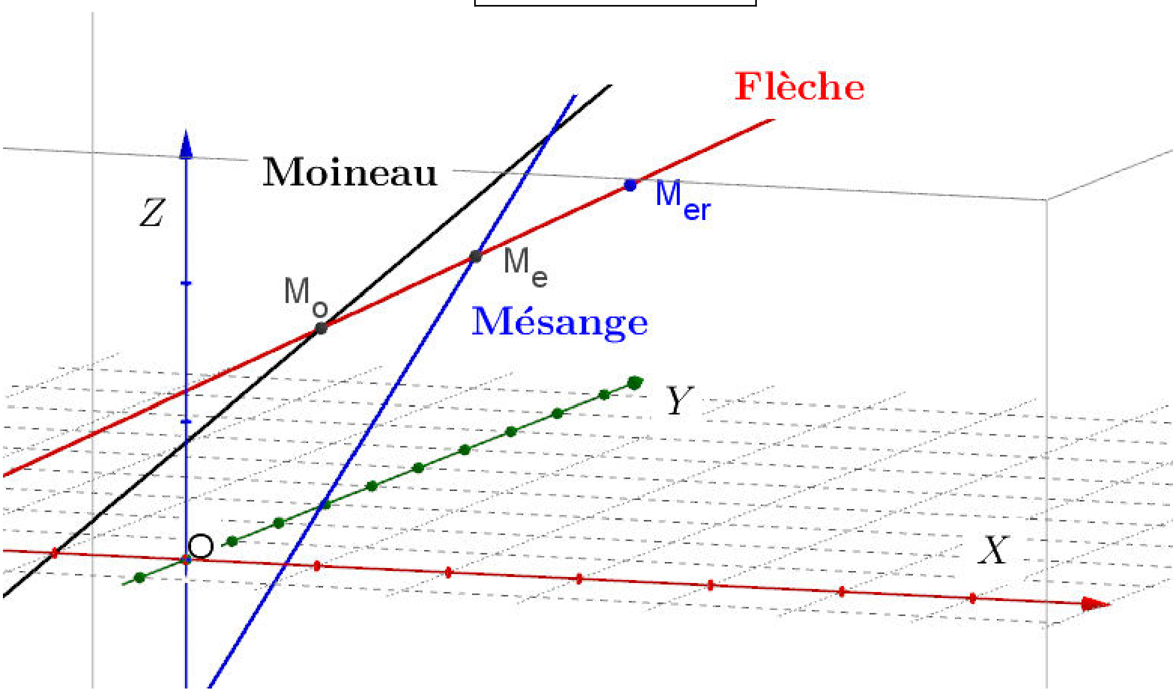
$\Rightarrow \overrightarrow{M_{er}M_e} = (t-5, t-4, 2t-7)$ et $\overrightarrow{M_{er}M_o} = (t-7, t-5, t-2)$

Les trois oiseaux seront alignés si ces deux vecteurs sont parallèles, c'est-à-dire si leurs composantes sont proportionnelles. Donc le système suivant doit possèder une solution

$$\begin{cases} t-5 = k(t-7) \\ t-4 = k(t-5) \\ 2t-7 = k(t-5) \end{cases} \Rightarrow \text{Le système est vérifié pour } k = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{t_{\text{align}} = 3 \text{ s}}$$

(3) La droite passe par $M_{er} = (5,5,5)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{M_eM_{er}} = (2,1,1)$

$$\Rightarrow \text{Trajectoire de la flèche : } \boxed{\frac{x-5}{2} = y-5 = z-5}$$



EXGAE135 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs cidessous ou sur feuille séparées.

Un ninja s'entraîne à couper des fruits avec son sabre tranchant. Son assistant lance en l'air une pastèque (sphère peine de rayon 2) et un melon (sphère pleine de rayon 1).

Au moment où le ninja passe à l'action, la pastèque est centrée en $(4,1,4)$ et le melon en $(7,2,7-2\sqrt{2})$.

Le ninja déploie son sabre à une vitesse fulgurante, et balaye instantanément le plan d'équation $z = x + h$, où h est un paramètre (on suppose le sabre assez long pour atteindre tous les objets d'intérêts présents dans ce plan).

(1) Pour quel intervalle de valeurs h coupe-t-il les deux fruits à la fois?
(C'est-à-dire pour quels h le plan du sabre intersecte-t-il l'une et l'autre sphères?)

$h \in$

(2) Le ninja n'avait pas vu la poutre qui traverse sa modeste mansarde. Celle-ci part du plancher en $(14,0,0)$ et suit un vecteur directeur $(-1,1,2)$. En quel point de la poutre le sabre se fiche-t-il? On cherche donc l'intersection du plan balayé par le sabre et de la droite de la poutre. On suppose ici $h = -2$.

Point $=$

(3) Dessinez la situation de (3) projetée sur le plan OXZ : en particulier des deux fruits (qui, projetés, deviennent des disques), le plan de coupe pour $h = 4$ $(\text{qui devient une droite})$ et la poutre.

Solution proposée par Nicole Berckmans

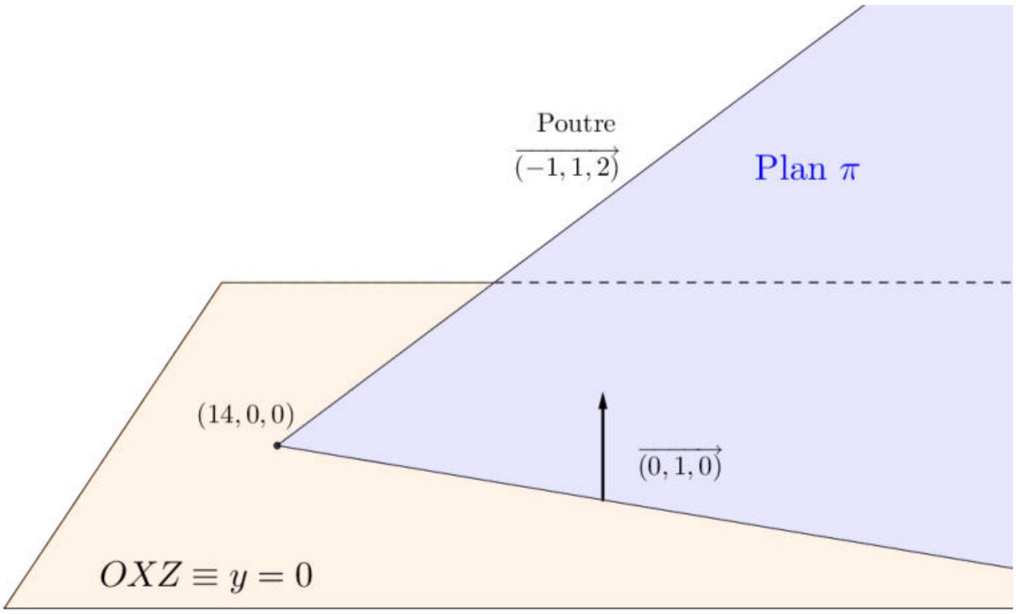
(1) La distance entre le centre $(4,1,4)$ de la pastèque au plan $\pi \equiv z = x + h$ doit être inférieur à 2 : $\frac{|4-4+h|}{\sqrt{1^2+1^2}} < 2 \Rightarrow |h| < 2\sqrt{2}$

De même pour le melon : $\frac{|7-7+2\sqrt{2}+h|}{\sqrt{1^2+1^2}} < 1 \Rightarrow |h+2\sqrt{2}| < \sqrt{2}$

On a donc $\begin{cases} -2\sqrt{2} < h < 2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} < h < -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow -2\sqrt{2} < h < -\sqrt{2}$

(2) On a $\begin{cases} \text{poutre : } \frac{x-14}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} = \alpha \\ \text{plan } : x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (-\alpha+14) - 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 4$

Le point d'intersection a donc pour coordonnées : $(-4+14,4,8) = (10,4,8)$



(3) Plan de coupe : $z = x + 4$

Poutre : $\dfrac{x-14}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$

Poutre $\cap$ plan $OX \equiv (y=0) = (14,0,0)$

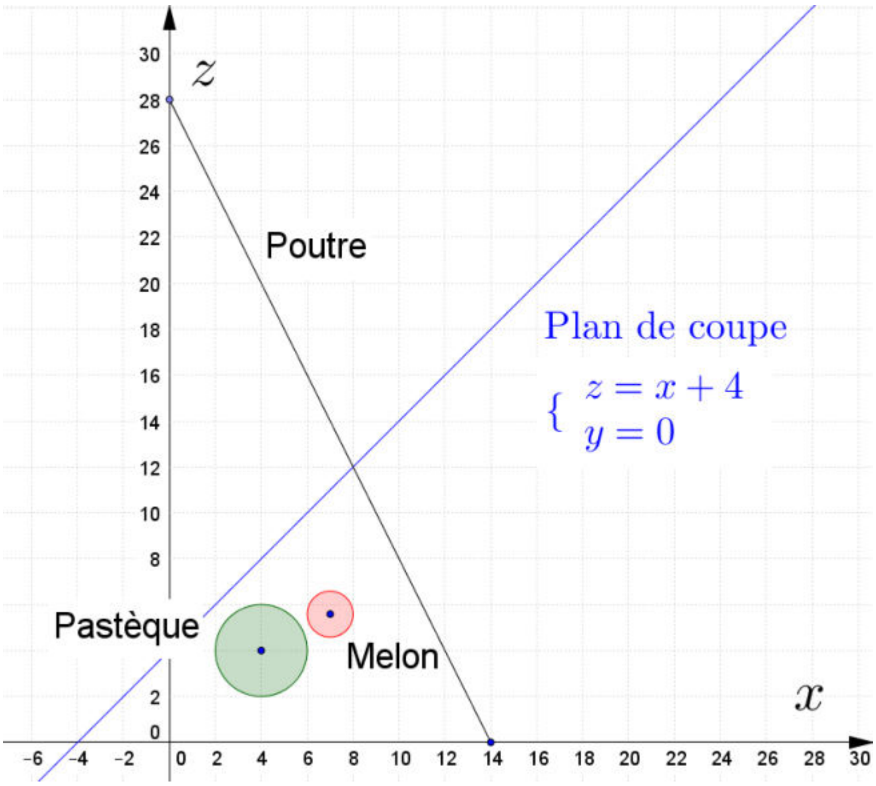
Soit π, le plan qui projete orthogonalement la poutre sur le plan OXZ

Ce plan a pour vecteurs directeurs la direction de la poutre :$(-1,1,2)$, et la direction perpendiculaire au plan OXZ : $(0,1,0)$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x - 14 = -\lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \pi \equiv 2x + z = 28$$

Le melon projeté est un cercle de centre $\left(7,0,7-2\sqrt{2}\right)$ et de rayon 1

La pastèque projetée est un cercle de centre $(4,0,4)$ et de rayon 2.



Le 21 octobre 2016

EXGAE136 - EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Cette question prend pace dans l'espace euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements et calculs intermédiaires (qui font aussi partie de la réponse) ci-dessous ou sur feuille supplémentaires.

Un Pickachu est un sphère jaune et sautillante de rayon trois. Par sautillante, on entend que son centre oscille au cours du temps sur l'intervalle qui relie le point $(1,1,3)$ au point $(1,1,6)$.

Une Pokéball est une sphère (assimilée à un point) lancée en ligne droite depuis le point $(1,6,3)$ selon la direction indiquée par le vecteur $(0,-1,m)$, où m est un paramètre.

(1) Quelle l'équation cartésienne de la droite reliant tous les centres possibles de Pikachu?

Droite des centres $\equiv$

(2) On veut choisir une vleur de m de telle façon que le Pokéball intercepte le Pikachu à coup sûr (c'est-à-dire quel que soit son centre sur l'intervalle autorisé). Quelle la plus petite valeur de m satisfaisant cette condition?

Valeur minimale de $m \equiv$

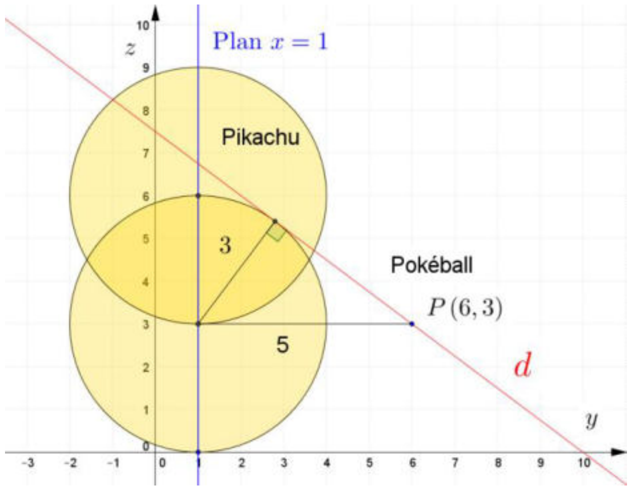
(3) Quelle est la plus grande valeur de m satisfaisant cette condition?

Valeur maximale de $m \equiv$

(4) Représenter la situation des questions $(1),(2),(3)$ projetée dans le plan OYZ, par un dessin clair.

(5) Dans le même problème, on remplace le Pikachu par un Roucool, qui est une sphère sautillante de rayon un. Par sautillante, on entend toujours que son centre oscille au cours du temps sur l'intervalle qui relie le point $(1,1,3)$ au point $(1,1,6)$. Quelle est l'ensemble des valeurs de m qui permette cette fois d'intercepter le Roucool à coup sûr?

$m \in$



L'équation de la droite d dans le plan $x = 1$ est : $\frac{y-6}{-1} = \frac{z-3}{m} \Rightarrow my + z - 6m - 3 = 0$

La distance du centre $(1,1,3)$ à la droite d vaut 3.

$$\Rightarrow \frac{|m + 3 - 6m - 3|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \Rightarrow 5m = 3\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 25m^2 = 9m^2 + 9 \Rightarrow 16m^2 = 9$$

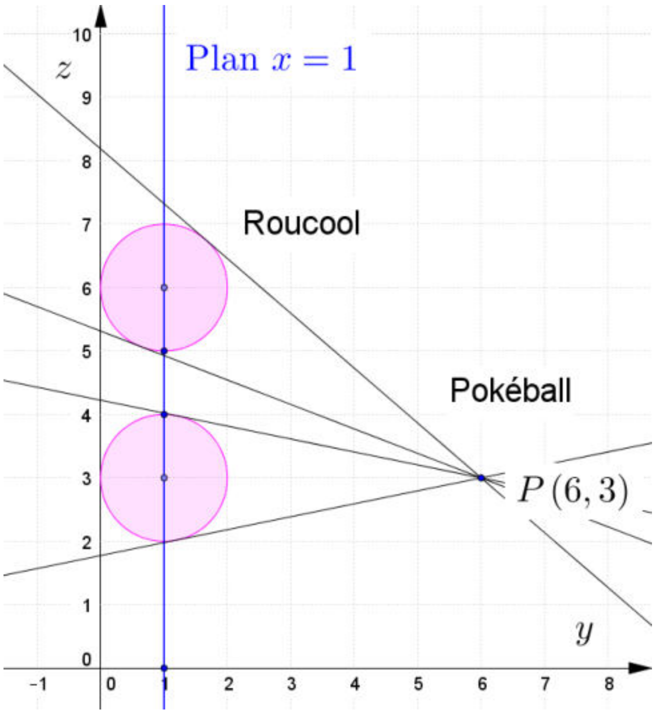
$$\Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

Lorsque le Pikachu est en $(1,1,6)$, la droite d est horizontale et $m = 0$

Conclusion : $\boxed{0 \leq \mathrm{m} \leq \frac{3}{4}}$

Quand on remplace le Pikachu par le Roucool, il n'y a aucune valeur de m qui permette l'interception à coup sûr.

Rappel : Si le plan est muni d'un repère orthonormal, si la droite (d) a pour équation $ax + by + c =\ 0$ et si le point A a pour coordonnées $(x_A\ ; y_A)$, alors la distance entre A et (d) est donnée par la formule : $d(A,(d)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Le 25 octobre 2016

EXGAE137 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Sur une sphère de centre C et de rayon R sont disposés 6 points notés A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 de telle manière qu'ils forment les sommets d'un octaèdre régulier. En fonction de R calculer la longueur d'une arête ainsi que la distance séparant C d'une face de l'octaèdre.
Ensuite, placer cet octaèdre dans un repère orthonormé de l'espace de manière à ce que les sommets de l'octaèdre se trouvent sur les axes.
Trouver l'équation d'une face de l'octaèdre et les équations paramètriques d'une arête.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

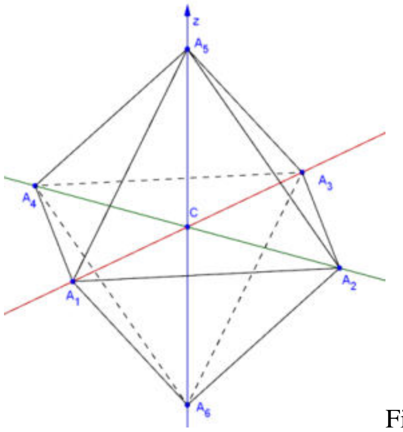


Figure 1

On a donc $\begin{cases} |CA_i|_{i=1,..5} = R \quad (\in \mathbb{R}_0^+) \\ \text{8 triangles équilatéraux} \\ A_1A_2A_3A_4 \text{ est un carré} \end{cases}$

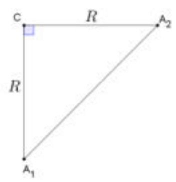


Figure 2

1) Longueur d'une arête. Par exemple $|A_1A_2|$

Figure 2 : $|A_1A_2|^2 = 2R^2 \Rightarrow |A_1A_2| = R\sqrt{2}$

2) Distance de C à une face.

Par exemple $dist(C, A_1A_2A_5) = |CP|$ où P est le centre de $A_1A_2A_5$

Figures 3 et 4 : P est le centre de gravité de $A_1A_2A_5$ et M est le milieu de $[A_1A_2]$

$$|A_5M|^2 = |A_1A_5|^2 - |A_1M|^2 = 2R^2 - \frac{1}{4}2R^2 = \frac{3}{2}R^2$$

$$|A_5P| = \frac{2}{3}|A_5P| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}R \qquad |CP|^2 = |A_5C|^2 - |A_5P|^2 = R^2 - \frac{4}{9}.\frac{3}{2}.R^2 = \frac{1}{3}R^2$$

$$\Rightarrow |CP| = \frac{\sqrt{3}}{3}R$$

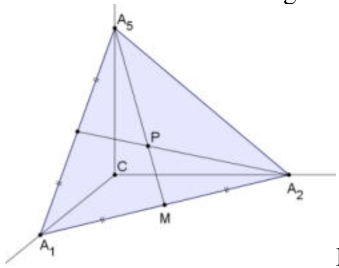


Figure 3

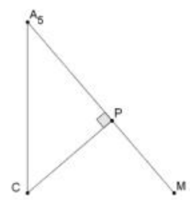


Figure 4

3) Considérons le repère $Ox \equiv CA_1, Oy \equiv CA_2, Oz \equiv CA_3$.

On connait les points sur les axes : $A_1(R,0,0); A_2(0,R,0); A_5(0,0,R)$

On obtient alors directement l'équation du plan

$$pl(A_1, A_2, A_5) \equiv \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} + \frac{z}{A_5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{R} + \frac{y}{R} + \frac{z}{R} = 1 \Rightarrow \boxed{x + y + z = R}$$

Prenons l'arête A_1A_2 : $\begin{cases} x = R - k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$

Remarque : A partir de l'équation du plan, on obtient aussi facilement

la distance de C à $pl(A_1, A_2, A_5)$: $dist(A_1A_2A_3, C) = \dfrac{|0+0+0-R|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$

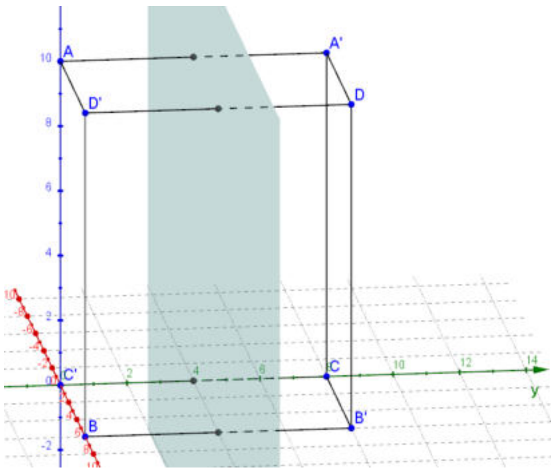
EXGAE138 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Soit le repère $Oxyz$, le plan π d'équation $y = 4$ et les points $A(0,0,10), B(6,0,0)$, $C(0,8,0), D(6,8,10)$. Les points A', B', C' et D' sont les images respectives des points A, B, C et D par une symètrie orthogonale de plan π.

On demande

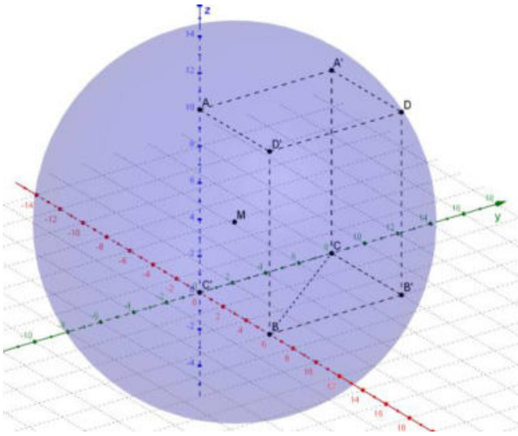
1. Faire un dessin. Indiquez-y les coordonnées des points A', B', C' et D'. Quel volume est généré par les points $ABCDA'B'C'D'$? Que vaut sa surface latérale?
2. Déterminez l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{C}$ centrée en M, point milieu du segment AB et dont le rayon vaut la distance BC.
3. Soit N de coordonnées $(6,4,0)$. Donnez les équations paramètriques de la droite AN et l'équation cartésienne médiateur du segment AN.
4. Existe-t-il un point de percée de la droite AN dans la sphère $\mathcal{C}$ qui soit intérieur au volume défini par les points $ABCDA'B'C'D'$? Démontrez.

Solution proposée par Dominique Druez



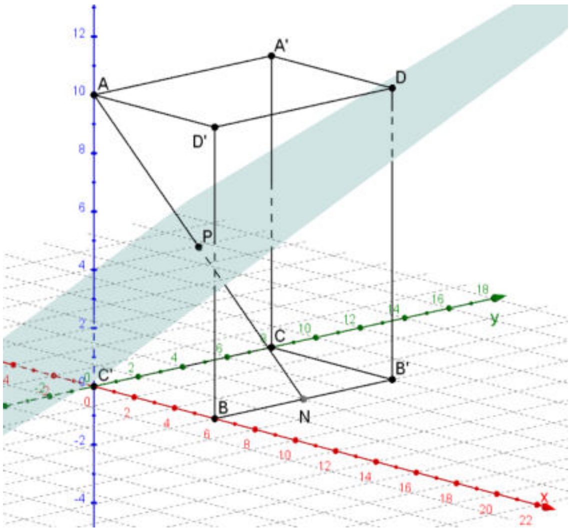
1) Le volume généré est un parallèlipipède rectangle : $V = 8 \times 8 \times 10 = 480 \text{ u}^3$

La surface latérale vaut : $S = 2 \times 8 \times 10 + 2 \times 6 \times 10 = 280 \text{ u}^2$



$2)M(3,0,5);\qquad |BC|^2 = 36+64 = 100$

$$\boxed{\mathscr{S}(M,|BC|) = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 100}$$



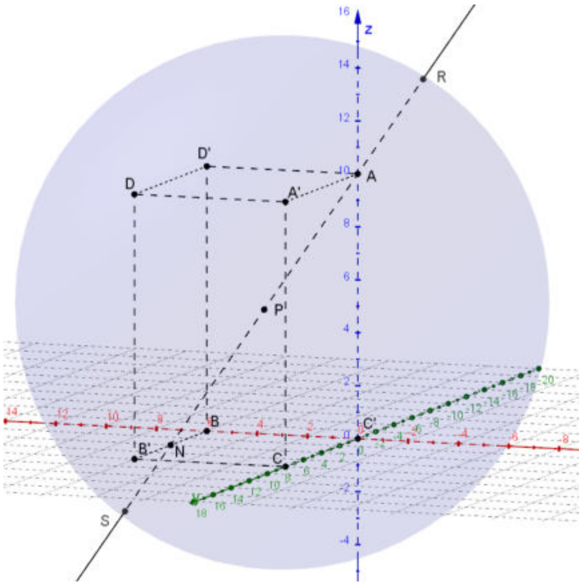
3) $\overrightarrow{AN} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{h}\qquad X(x,y,z) \in AN \Rightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AN}$

$$\boxed{AN \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z - 10 = -10\lambda \end{cases}}$$

P milieu de $[AN]$: $P(3,2,5)$.

Un plan $\perp AN$ a pour équation : $6x + 4y - 10z = r$

$P \in AN \Rightarrow r = 6\times3 + 4\times2 - 10\times5 = -24 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 3x + 2y - 5z + 12 = 0}$



4) $$\left.\begin{array}{l} AN \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z - 10 = -10\lambda \end{cases} \\ \mathscr{S}\left(M, |BC|\right) = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 100 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (6\lambda - 3)^2 + (4\lambda)^2 + (10 - 10\lambda - 5)^2 = 100 \Rightarrow 76\lambda^2 - 68\lambda - 33 = 0$$

Les solutions sont : $\begin{cases} \lambda_1 = 1.2438 \\ \lambda_2 = -0.3491 \end{cases}$

Les points d'intersections sont alors

Si $\lambda_1 = 1.2438 \Rightarrow \boxed{S = (-2.0946, -1.3964, 13.4909)}$

la coordonnée $z = 13.4909 > 10,$ le point S est donc extérieure au volume.

Si $\lambda_2 = -0.3491 \Rightarrow \boxed{R = (7.4630, 4.9853, -2.4383)}$

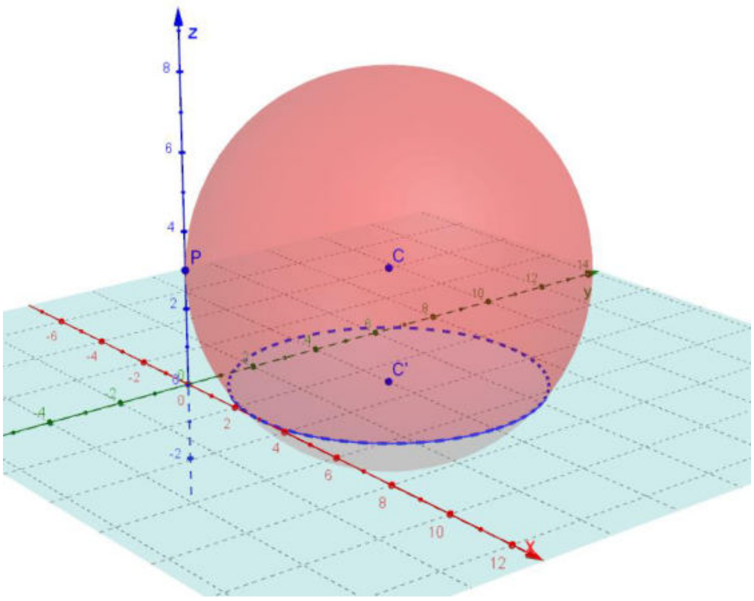
la coordonnée $z = -2.4383 > 10,$ le point R est donc extérieure au volume

Le 10 octobre 2015

EXGAE139 - POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2016.

Dans un système orthonormé $Oxyz$, on considère une sphère $\mathcal{S}$ de centre C, de coordonnées $(3;4;3)$ et passant par le point P de coordonnées $(0;0;3)$.
On demande de

1. déterminer l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$;
2. calculer la surface et le volume de la sphère $\mathcal{S}$;
3. déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ d'intersection entre la sphère $\mathcal{S}$ et le plan $Oxyz$;
4. d'esquisser l'allure de la surface d'équation $x^2 + y^2 - z + 5 = 0$ (considérez pour ce faire les intersections de la surface avec les plans Oxz, Oxz ainsi qu'avec des plans parallèles au plan Oxy);
5. déterminer les coordonnées Q qui conduira au volume minimum d'un cône dont la base est le cercle $\mathcal{C}$ (intersection de la sphère $\mathcal{S}$ avec le plan Oxy) et dont le sommet Q appartiet à la surface définie au point précédent.



1) Les points C et P ayant même ordonnée, le rayon est : $R=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\Rightarrow S \equiv (x-3)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=25$

2) $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi 5^3=\dfrac{500\pi}{3}$ uv; $\quad S=4\pi R^2=4\pi 5^2=100\pi$ ua

3) Il suffit de faire $z=0$ dans l'équation de S

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2+9=25 \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=16 \Rightarrow R'=4$

4) C'est un paraboloïde de révolution d''axe Oz et dont le sommet est en $(0,0,5)$

5) Le volume d'un cône est donné par $V_C=\dfrac{1}{3}HB$

H étant la hauteur du cône relativement au plan Oxy et B la surface de sa base ici B est le cercle défini en 3).

Le cône aura un volume minima, si sa hauteur est la plus petite possible.

Le point Q est donc le sommet du cône et la hauteur $H=5$

Le volume du cône est alors : : $V_C=\dfrac{1}{3}\times 5\times\pi\times 4^2=\dfrac{80\pi}{3}$ uv