

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie analytique dans l'espace**

**GAE 2**

**EXGAE020 – EXGAE029**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

Mars 04

## EXGAE020 – EPL, UCL, LLN, juillet 1999, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on considère le point fixe  $A$  sur  $OX$ , de coordonnées  $(a, 0, 0)$  avec  $a \geq 0$ , et les points mobiles  $B(0, b, 0)$  et  $C(0, 0, c)$  sur les axes  $OY$  et  $OZ$  respectivement.  $B$  et  $C$  sont tels que  $b \leq a$ ;  $c \geq a$ ;  $bc = 2a^2$ .

On s'intéresse au plan  $ABC$  et à sa distance à l'origine.

Déterminer les distances minimum et maximum entre le plan  $ABC$  et l'origine et les valeurs correspondantes de  $b$  et  $c$ .

---

Rappel : Pour obtenir la distance de l'origine au pplan

- On considère le vecteur normal au plan  $\vec{n}$

- On calcul le vecteur normal unitaire :  $\vec{1}_n = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

- La distance est égale au produit scalaire de  $\vec{1}_n$  par un vecteur quelconque définit par  $O$  et un point du plan.

$$\text{Plan } ABC \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \rightarrow ABC \equiv bcx + acy + abz = abc$$

$$\rightarrow \vec{n} : (bc, ac, ab) \rightarrow \|\vec{n}\|^2 = b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = a^2(b+c)^2 \quad (\text{car } bc = a^2)$$

$$\rightarrow \vec{1}_n : \left( \frac{bc}{a(b+c)}; \frac{c}{b+c}; \frac{b}{b+c} \right)$$

$$\text{Soit } \vec{OA} : (a, 0, 0) \rightarrow d(ABC, O) = \vec{1}_n \cdot \vec{OA} = \frac{bc}{b+c} = \frac{2a^2}{b+c} = \frac{2a^2b}{b^2 + 2a^2}$$

### Discussion

Calculons le maximum en annulant la dérivée de  $d(ABC, O)$  par rapport à  $b$ .

En effet,  $d(ABC, O)$  est une fonction de  $b$

$$\rightarrow \frac{d(d(ABC, O))}{db} = \frac{4a^4 - 2a^2b^2}{(b^2 + 2a^2)^2} \rightarrow 4a^4 - 2a^2b^2 = 0 \rightarrow b = \pm a\sqrt{2}$$

Or vu les contraintes  $a \geq 0 \rightarrow c \geq 0 \rightarrow 0 \leq b \leq a$ , on ne retient que la solution positive  $\rightarrow b = a\sqrt{2}$  (On a bien  $b \leq a$ )

$$\text{Il s'agit bien d'un maximum puisque } \begin{cases} b < a\sqrt{2} \rightarrow \frac{d(d(ABC, O))}{db} > 0 \\ b > a\sqrt{2} \rightarrow \frac{d(d(ABC, O))}{db} < 0 \end{cases}$$

Le minimum s'obtient en remarquant que  $d(ABC, O)$  est par définition toujours positif

Sa valeur minimale est zéro, ce est vérifié par  $b = 0$

### Conclusions

$$\text{Maximum : } d(ABC, O) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{si } b = c = a\sqrt{2}$$

$$\text{Minimum : } d(ABC, O) = 0 \quad \text{si } b = 0 \text{ et } c = +\infty$$

## EXGAE021 – EPL, UCL, LLN, septembre 1999.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on considère les trois plans :

$$\Pi_1 : ax + y + 2z + 3 = 0$$

$$\Pi_2 : x + by - z + 2 = 0$$

$$\Pi_3 : 2x - y + cz + d = 0$$

De l'origine  $O$ , on abaisse les perpendiculaires respectives  $p_1, p_2, p_3$  aux 3 plans.

Déterminer les valeurs de  $a, b, c, d$  telles que les trois perpendiculaires forment un trièdre orthogonal.

---

Il suffit d'exprimer que le produit scalaire des vecteurs normaux aux plans sont nuls.

$$\begin{cases} \overline{p_1} : (a, 1, 2) \\ \overline{p_2} : (1, b, -1) \\ \overline{p_3} : (2, -1, c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{p_1} \perp \overline{p_2} \Rightarrow a + b - 2 = 0 \\ \overline{p_1} \perp \overline{p_3} \Rightarrow 2a - 1 + 2c = 0 \\ \overline{p_2} \perp \overline{p_3} \Rightarrow 2 - b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + 2c = 1 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{7}{4} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$d$  est indéterminé

## EXGAE022 – EPL, UCL, LLN - juillet 2000, série 1.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on considère les deux droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$
$$d_2 : \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ z = c \end{cases}$$

où  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes

a) Déterminer la relation qui doit lier ces constantes pour que les deux droites aient une intersection non vide.

b) Si

$$a = b = 2$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

quelle doit être alors la valeur de  $c$  pour que cette intersection existe ?

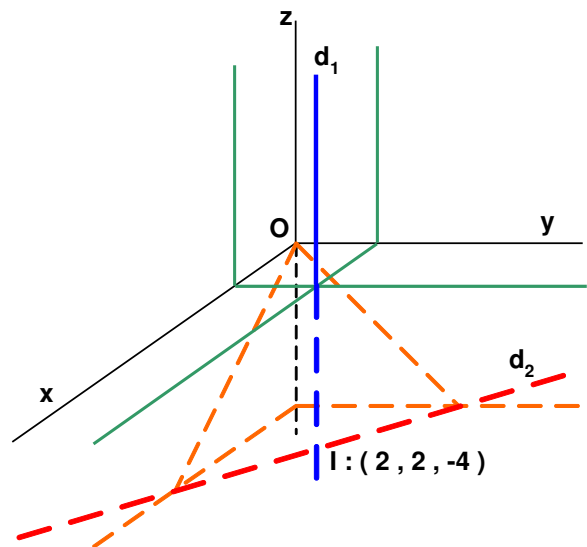
c) Dessiner les données du problème dans le cas 2)

---

Pour avoir une intersection il faut vérifier le système :

$$\begin{cases} x & = & a \\ & y & = & b \\ & & z & = & c \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = & 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha a + \beta b + \gamma c = 0}$$

$$\text{Si } a = b = 2 \text{ et } \alpha = \beta = \gamma \rightarrow \boxed{c = -4}$$



## EXGAE023 – EPL, UCL, LLN, juillet 2000, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on considère les trois plans :

$$\Pi_1 : x + y + z = 1$$

$$\Pi_2 : 4x + by + cz = 2$$

$$\Pi_3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 4$$

Sachant que :

- ces trois plans ont une droite commune dans le plan de coordonnées  $OYZ$ .
- $\Pi_2$  est perpendiculaire  $\Pi_3$ .
  - Déterminer les valeurs des 5 coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, b, c$
  - Esquisser le dessin des 3 plans.

---

Les paramètres directeurs de la droite, intersection de deux plans, sont donnés par le produit vectoriel des vecteurs normaux aux deux plans.

Soit  $d$  la droite commune.

$$\vec{d} = \vec{n}_{\Pi_1} \wedge \vec{n}_{\Pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & b & c \end{vmatrix} = (c - b; 4 - c; b - 4)$$

$$\vec{d} = \vec{n}_{\Pi_1} \wedge \vec{n}_{\Pi_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (\gamma - \beta; 1 - \alpha; \beta - \alpha)$$

Et comme  $d \in OYZ$ , on déduit :  $\begin{cases} c = b \\ \gamma = \beta \end{cases}$

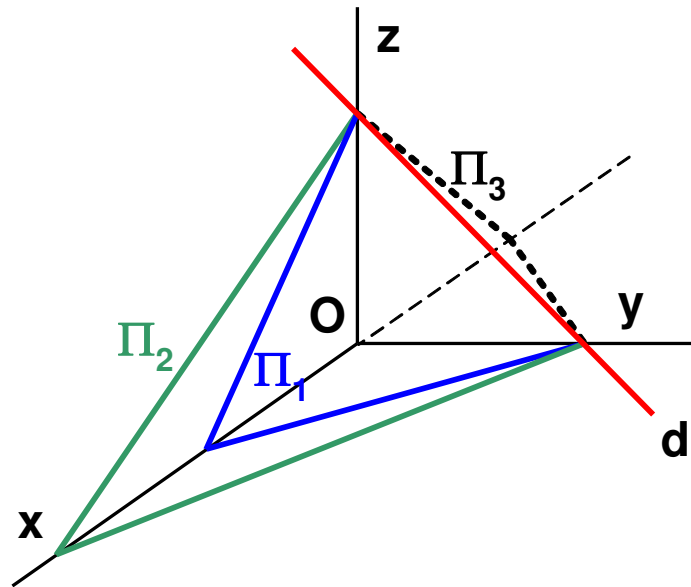
$$\text{De plus : } \begin{cases} \Pi_1 \cap OYZ \equiv y + z = 1 \\ \Pi_2 \cap OYZ \equiv by + cz = 2 \\ \Pi_3 \cap OYZ \equiv \beta y + \gamma z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ b(y + z) = 2 \\ \beta(y + z) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = c = 2 \\ \beta = \gamma = 4 \end{cases}$$

Reste à déterminer  $\alpha$ .

$$\Pi_2 \perp \Pi_3 \rightarrow 4\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \rightarrow \alpha = -4$$

Conclusion

$$\text{Les trois plans sont : } \begin{cases} \Pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \Pi_2 \equiv 4x + 2y + 2z = 2 \\ \Pi_3 \equiv -4x + 4y + 4z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \Pi_2 \equiv 2x + y + z = 1 \\ \Pi_3 \equiv -x + y + z = 1 \end{cases}$$



## EXGAE024 – EPL, UCL, LLN, septembre 2000.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on appelle  $a$ ,  $b$ , et  $c$  les intersections respectives d'un plan avec les axes  $OX$ ,  $OY$  et  $OZ$ .

Pour l'ensemble des plans tels que  $a = b$  et  $abc = K$  constant.

- Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la distance  $d$  du plan à l'origine soit maximum.
- Quelle sera cette distance maximum ?

$$\text{Plan } \pi \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \rightarrow \pi \equiv bcx + acy + abz = abc$$

$$\vec{n}_\pi : (bc, ac, ab)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{n}_\pi\| &= \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} = \sqrt{abc^2 + abc^2 + a^2b^2} \\ &= \sqrt{abc \left(2c + \frac{ab}{c}\right)} = \sqrt{k \left(2c + \frac{k}{c^2}\right)} = \frac{1}{c} \sqrt{k(2c^3 + k)} \end{aligned}$$

$$\text{Vecteur unitaire normal au plan } \pi : \vec{1}_{n_\pi} = \frac{\vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|}$$

La distance est donnée par le produit scalaire de  $\vec{1}_{n_\pi}$  par un vecteur défini par un point quelconque du plan, par exemple  $\vec{OA} : (a, 0, 0)$

$$\text{Distance du plan à l'origine : } d(0, \pi) = \vec{1}_{n_\pi} \cdot \vec{OA}$$

$$\rightarrow d(0, \pi) = \frac{bc^2}{\sqrt{k(2c^3 + k)}} = \frac{\sqrt{k} \cdot c}{\sqrt{2c^3 + k}}$$

Pour trouver la distance maximum, on annule la dérivée de  $d(0, \pi)$  par rapport à  $c$ .

$$d'(0, \pi) = \frac{\sqrt{k} \sqrt{2c^3 + k} - \sqrt{k} \cdot c \cdot \frac{1}{2\sqrt{2c^3 + k}} \cdot 6c^2}{2c^3 + k} = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2c^3 + k} - \frac{3c^3}{\sqrt{2c^3 + k}} = 0 \rightarrow 2c^3 + k = 3c^3 \rightarrow c = \sqrt[3]{k}$$

$$\text{Et finalement : } \boxed{a = b = c = \sqrt[3]{k}}$$



### Rappel

Calcul de la distance d'un point  $P_0 : (x_1, y_1, z_1)$  à un plan  $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$

Méthode 1 : Appliquer directement la formule :  $d(P_0, \pi) = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Méthode 2 :  $d(P_0, \pi) = \left| \overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{u} \right| \quad P_1 \in \pi \quad \vec{n} \perp \pi$

$P_1$  est un point quelconque de  $\pi$

$\vec{n}$  est le vecteur normal à  $\pi$

$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$  vecteur unitaire normal à  $\pi$

La méthode 2 permet de se familiariser avec les vecteurs.

(Et la formule précédente se dérive directement de la méthode 2).

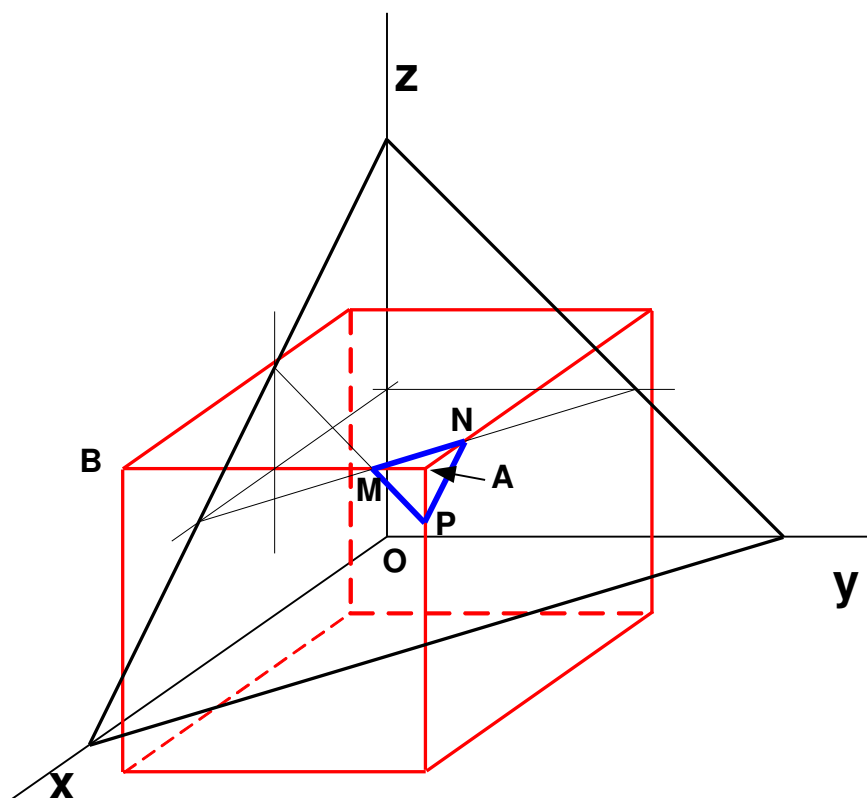
## EXGAE025 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série 1.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on appelle les éléments suivants :

- un cube dont le centre de gravité coïncide avec l'origine  $O$ , dont les faces sont perpendiculaires aux vecteurs de base et dont la longueur des arêtes vaut 2;
- un plan défini par l'équation  $x + y + z = a$

On vous demande :

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. De trouver les valeurs de  $a$  telles que le plan divise le cube en deux solides distincts dont le volumes forment un rapport de  $1/5$ .



Calculons la coordonnée du point  $M$ , intersection de l'arête  $AB \equiv \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$

et du plan donné :  $x + y + z = a \rightarrow M : (1, a-2, 1)$

De même,  $N : (a-2, 1, 1)$  et  $P : (1, 1, a-2)$

Le volume du tétraèdre  $MNPA$  est donné par :

$$V_T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_N & x_M & x_P & x_A \\ y_N & y_M & y_P & y_A \\ z_N & z_M & z_P & z_A \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{vmatrix}$$

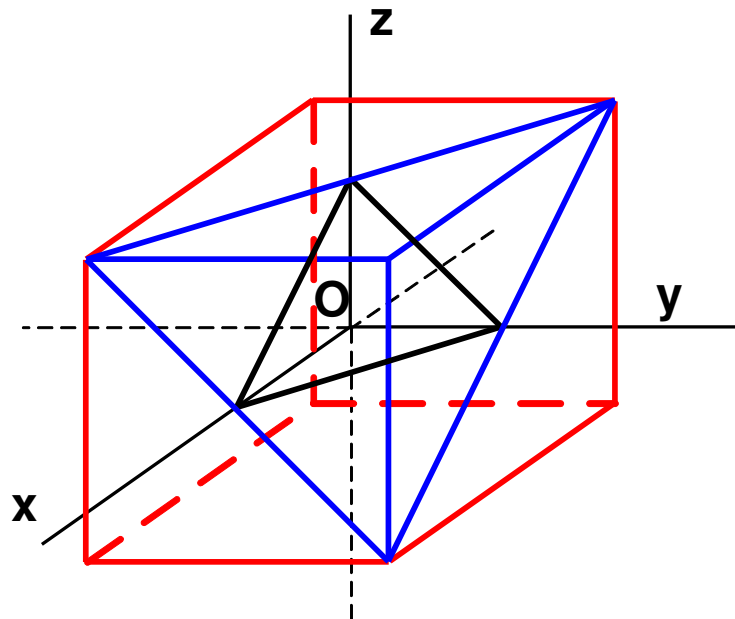
$$= -\frac{(a-3)^3}{6} = \frac{(3-a)^3}{6}$$

Le volume du cube vaut  $2^3 = 8$

Le volume de solide restant, après avoir enlevé le tétraèdre :  $V_R = 8 - \frac{(3-a)^3}{6}$

$$\rightarrow \frac{V_T}{V_R} = \frac{\frac{(3-a)^3}{6}}{8 - \frac{(3-a)^3}{6}} = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{a=1}$$

Et le plan est :  $x + y + z = 1$



## EXGAE026 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on appelle les éléments suivants :

- Trois droites dont les équations cartésiennes sont

$$p: \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

$$q: \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 - x \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} y = 1 \\ ax + bz = 1 \end{cases}$$

- Une droite horizontale (parallèle au plan  $OXY$ ) quelconque  $h$  s'appuyant sur  $p$  et  $q$  (incluse donc dans un plan d'équation  $z = a$  où  $a$  est un nombre réel quelconque)

On vous demande

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. D'écrire l'équation de la droite horizontale mobile  $h$  en fonction du paramètre  $a$ .
3. De déterminer  $a$  et  $b$  afin que la droite horizontale  $h$  (quelle que soit la valeur de  $a$ ) s'appuie également sur  $r$ .

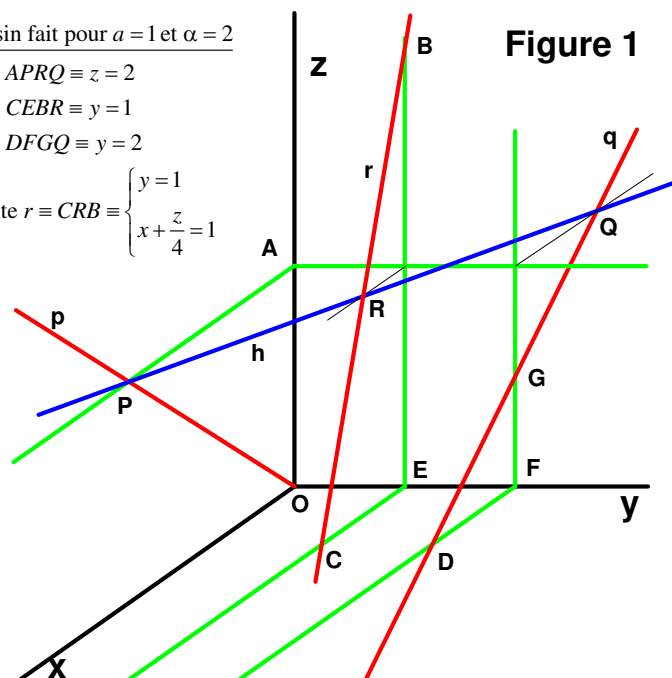
Dessin fait pour  $a = 1$  et  $\alpha = 2$

Plan  $APRQ \equiv z = 2$

Plan  $CEBR \equiv y = 1$

Plan  $DFGQ \equiv y = 2$

Droite  $r \equiv CRB \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + \frac{z}{4} = 1 \end{cases}$



a) Voir figure 1

$$b) P : (\alpha, 0, \alpha) \quad Q : (1 - \alpha, 2, \alpha) \rightarrow \overline{PQ} : (1 - 2\alpha, 2, 0)$$

$$\text{Equation paramétrique de la droite } PQ \equiv \begin{cases} x = \alpha + k(1 - 2\alpha) \\ y = 2k \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{équation cartésienne } PQ \equiv \begin{cases} x = \alpha + \frac{y}{2}(1 - 2\alpha) \\ z = \alpha \end{cases}$$

La droite  $r$  doit passer par  $R$ , point de percée de  $PQ$  dans le plan  $y = 1$

$$\rightarrow k = \frac{1}{2} \rightarrow R : \left(\frac{1}{2}; 1, \alpha\right) \rightarrow r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ ax + bz = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ a\frac{1}{2} + b\alpha = 1 \end{cases}$$

La relation recherchée est donc :  $\boxed{a = 2(1 - b\alpha)}$

Il y a donc une infinité de droite qui peuvent passer par  $R$ .

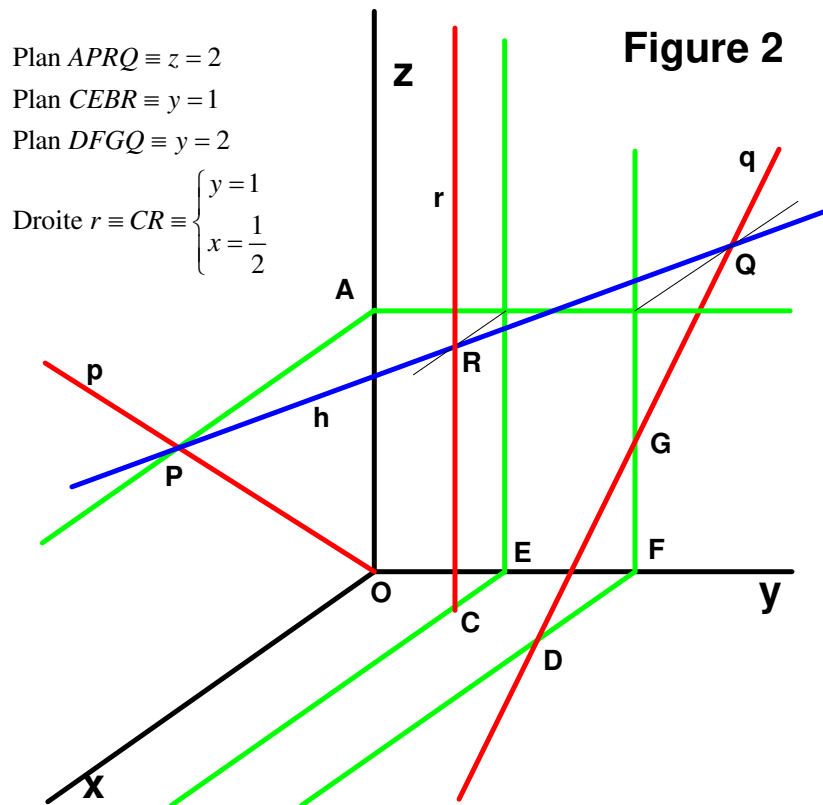
$$\text{Le dessin est fait pour } \alpha = 2 \text{ et } a = 1 \rightarrow b = \frac{1}{4} \rightarrow r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + \frac{z}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Et } B : (0, 1, 4) \quad C : (1, 1, 0) \quad R : \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$$

c) Si la droite horizontale  $h$  doit s'appuyer sur  $r$  quelle que soit la valeur de  $\alpha$  alors  $a = 2(1 - b\alpha) \rightarrow a + 2b\alpha = 2$  doit toujours être vérifié

$$\text{La seule solution possible est } \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow r : \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Voir figure 2




---

Résolu décembre 2003. Modifié le 10 juillet 2004.

## EXGAE027 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on appelle les éléments suivants :

- Quatre points dont les coordonnées sont :

$$A:(2,0,0)$$

$$B:(0,2,0)$$

$$C:(1,1,0)$$

$$D:(0,0,1)$$

- Un plan dont l'équation cartésienne est :  $\pi \equiv ax + by + cz = 2$

On vous demande :

- De fournir l'expression de la distance du plan  $\pi$  au point  $A$  en fonction des trois paramètres réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- De déterminer les valeurs possibles des trois paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  afin que le plan passe par  $C$  et  $D$  et soit équidistant des points  $A$  et  $B$ .
- De dessiner avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème.

---

$$\vec{n}_\pi : (a, b, c) \quad \|\vec{n}_\pi\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \vec{i}_{n_\pi} = \frac{\vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Soit un point quelconque de } \pi, E : \left(\frac{2}{a}, 0, 0\right) \rightarrow \overline{EA} : \left(\frac{2-2a}{a}, 0, 0\right)$$

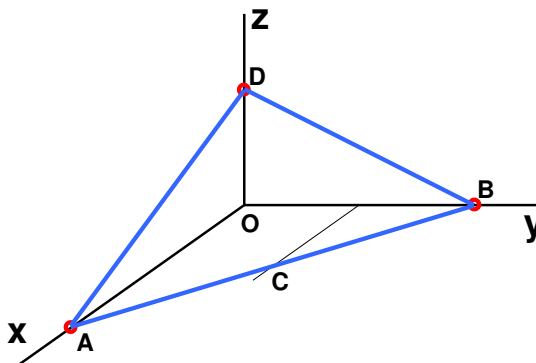
$$\text{Distance de } A \text{ au plan } \pi : d(A, \pi) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \left(\frac{2-2a}{a}, 0, 0\right) = \frac{2(1-a)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{De même : } d(B, \pi) = \frac{2(1-b)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Le plan passe par } C \text{ et } D : \begin{cases} C \in \pi \rightarrow a + b = 2 \\ D \in \pi \rightarrow c = 2 \end{cases}$$

$$\text{or } d(A, \pi) = d(B, \pi) \rightarrow 1 - a = 1 - b \rightarrow a = b = 1 \text{ et } c = 2$$

Le plan  $\pi \equiv x + y + 2z = 2$  passe donc aussi par  $A$  et  $B$



## EXGAE028 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2002.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $Oxyz$ .

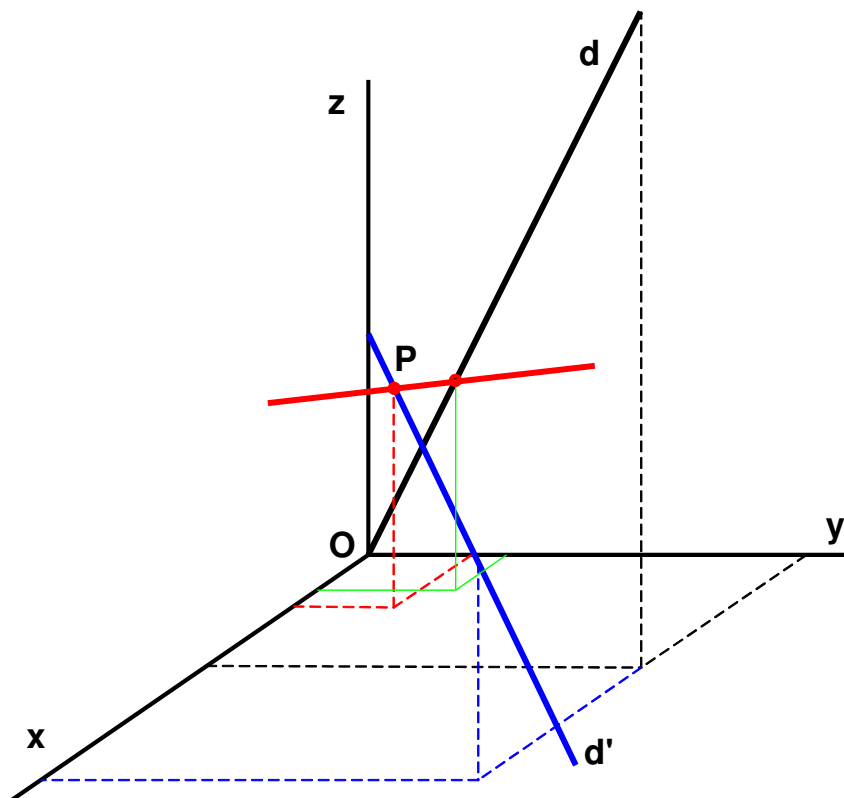
1. Démontrer qu'il existe une droite  $d$  passant par l'origine et telle que les plans d'équations

$$(2r^2 + 6r - 2)x - (r^2 - 1)y - 2rz + r^2 + 1 = 0$$

Où  $r$  parcourt  $\mathbf{R}$ , soient tous parallèles à  $d$ .

2. Déterminer la perpendiculaire commune à  $d$  et à la droite  $d'$  d'équation.

$$d' : \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$$





1) Soit  $\vec{v}_d : (\alpha, \beta, \gamma)$ , le vecteur directeur de la droite  $d$ .

Si  $d$  est parallèle au plan alors  $\vec{v}_d$  est orthogonal avec le vecteur normal aux plans.

$$\rightarrow (2r^2 + 6r - 2)\alpha - (r^2 - 1)\beta - 2r\gamma = 0$$

$$\rightarrow (2\alpha - \beta)r^2 + 2(3\alpha - \gamma)r - 2\alpha + \beta = 0$$

Cette équation doit être vérifiée quelque soit la valeur de  $r$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha - \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \gamma = 3\alpha \end{cases}$$

La droite de coefficients directeurs  $(\alpha; 2\alpha; 3\alpha) = (1; 2; 3)$  et passant par l'origine,

$$\text{donc d'équations } d : \begin{cases} x = h \\ y = 2h \\ z = 3h \end{cases} \text{ est parallèle aux plans donnés quelque soit la}$$

valeur de  $r$ .

## 2) Première méthode

Soit  $\pi_1$  le plan parallèle à  $d$  ( $\vec{v}_d = (1, 2, 3)$ ) et  $d'$  ( $\vec{v}_{d'} = (1, 1, 0)$ ).

$$\text{Le vecteur normal à } \pi_1 \text{ est : } \vec{n}_{\pi_1} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 3, -1)$$

Soit  $\pi_2$  le plan perpendiculaire à  $\pi_1$ , contenant  $d$  et passant par l'origine

$$\pi_2 : \begin{cases} x = k - 3t \\ y = 2k + 3t \\ z = 3k - t \end{cases}$$

Déterminons le point de percée  $P$  de  $d'$  dans  $\pi_2$

$$\begin{cases} k - 3t - h = 0 \\ 2k + 3t - h = 0 \\ 3k - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{9}{19} \\ t = -\frac{1}{19} \\ h = \frac{9}{19} \end{cases} \rightarrow P : \left( \frac{9}{19}; \frac{9}{19}; 1 \right)$$

La perpendiculaire commune est la droite passant par  $P$  et parallèle  $\vec{n}_{\pi_1}$

$$p : \begin{cases} x = \frac{9}{19} - 3j \\ y = \frac{9}{19} + 3j \\ z = 1 - j \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que  $p$  est perpendiculaire à  $d$  et  $d'$ ;

et que  $p$  est coplanaire avec  $d$  et  $d'$ .

### Deuxième méthode

La perpendiculaire  $p$  est définie par les plans  $\pi_3$  et  $\pi_4$

$\pi_3$  contient la droite  $d$  et est parallèle à  $\overline{n_{\pi_1}} : (-3, 3, -1)$ , avec  $(0, 0, 0) \in d$

$$\rightarrow \pi_3 \equiv \begin{cases} x = h - 3t \\ y = 2h + 3t \\ z = 3h - t \end{cases} \rightarrow \pi_3 \equiv 11x + 8y - 9z = 0$$

$\pi_4$  contient la droite  $d'$  et est parallèle à  $\overline{n_{\pi_1}} : (-3, 3, -1)$ , avec  $(0, 0, 1) \in d'$

$$\rightarrow \pi_4 \equiv \begin{cases} x = k - 3t \\ y = k + 3t \\ z = 1 - t \end{cases} \rightarrow \pi_4 \equiv x - y - 6z = -6$$

$$\text{Finalement : } p \equiv \begin{cases} 11x + 8y - 9z = 0 \\ x - y - 6z = -6 \end{cases}$$

On peut vérifier que la point  $P\left(\frac{9}{19}, \frac{9}{19}, 1\right)$  appartient bien à ces deux plans

## EXGAE029 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2002.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les points  $P_1, P_2, P_3, P_4$  de coordonnées respectives.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan  $\Pi$  qu'ils déterminent.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\Pi'$  perpendiculaire à  $\Pi$  et passant par la droite d'équation

$$d' : \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

---

1)  $\overrightarrow{P_1P_2} : (2, -4, 2)$     $\overrightarrow{P_1P_3} : (0, -1, 2)$     $\overrightarrow{P_1P_4} : (1, -2, 1)$

Si les quatre points sont coplanaires alors un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres. Vérifions que  $\alpha \overrightarrow{P_1P_2} + \beta \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_4}$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 0\beta = 1 \\ -4\alpha - \beta = -2 \\ 2\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \quad \text{Ce système est vérifié pour : } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Les équations paramétriques du plan sont :

$$\begin{cases} x = 0 + 2k - 0h \\ y = 1 - 4k - h \\ z = 0 + 2k - 2k \end{cases} \rightarrow \Pi \equiv 3x + 2y + z - 2 = 0 \quad (\text{donc } \vec{n}_\Pi : (3, 2, 1))$$

2) Soient deux points de la droite  $d$  :  $P_5(0, 1, 0)$  et  $P_6(1, 3, 3) \rightarrow \overrightarrow{P_5P_6} : (1, 2, 3)$

$$\rightarrow \Pi' : \begin{cases} x = 0 + h + 3k \\ y = 1 + 2h + 2k \\ z = 0 + 3h + k \end{cases} \rightarrow \Pi' \equiv x - 2y + z + 2 = 0$$