

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 3

EXGAE030 – EXGAE039

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

Avril 04

EXGAE030– FCSA, ULG, Liège, juillet 2003.

Pour tous réels a, b, c non simultanément nuls, on considère le plan

$$\pi_{abc} \equiv ax + by + cz = 1$$

1. Déterminer les conditions sur a, b, c pour que la distance de π_{abc} à l'origine soit égale à 1
2. Déterminer les conditions sur a, b, c pour que π_{abc} soit parallèle à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

3. Déterminer le lieu géométrique de l'intersection de π_{abc} et de la droite perpendiculaire à π_{abc} passant par l'origine, quand les paramètres a, b, c satisfont les conditions 1) et 2)

1) Vecteur normal à π_{abc} : $\vec{n} : (a, b, c)$

Vecteur normal unitaire : $\vec{1}_n : \frac{(a, b, c)}{\|\vec{n}\|}$

Soit un point du plan : $\left(\frac{1}{a}; 0; 0\right)$

Distance de l'origine au plan : $d(\pi_{abc}, O) = \left(\frac{1}{a}; 0; 0\right) \frac{(a, b, c)}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} = 1$

$\rightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$. C'est la première condition.

2) Soient deux points de la droite d : $O(0; 0; 0)$ et $P(1, 1, 1)$

Vecteur directeur de la droite d : $\vec{v}_d : (1, 1, 1)$

π_{abc} est parallèle à d si : $(a, b, c)(1, 1, 1) = 0$

$\rightarrow a + b + c = 0$ C'est la deuxième condition.

Note : On peut déterminer \vec{v}_d comme suit

Plan $x = y$ vecteur normal $(1, -1, 0)$

Plan $y = z$ vecteur normal $(0, 1, -1)$

$\rightarrow \vec{v}_d = (1, -1, 0) \wedge (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$

3) Equation de la droite perpendiculaire à π_{abc} et passant par l'origine

$$\begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases} \rightarrow \text{point de percée vérifie l'équation du plan : } a^2k + b^2k + c^2k = 1$$

$\rightarrow k = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \text{point d'intersection } (a, b, c)$

Et le lieu cherché est donc : $x + y + z = 0$ (En vertu de la deuxième condition)

EXGAE031– FACSA, ULG, Liège, septembre 2003.

On considère les droites d_1 et d_2 données par leurs équations dans un repère orthonormé de l'espace :

$$d_1 \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} ; \quad d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que d_1 et d_2 sont gauches.
2. Ecrire l'équation du plan π parallèle à d_1 et d_2 et qui contient le point P de coordonnées $(1, 1, 1)$
3. Ecrire l'équation d'une droite perpendiculaire à π et qui s'appuie sur d_1 et d_2 .

1) Il suffit de vérifier que le système suivant est impossible :

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{Impossible}$$

2) Soient deux points de d_1 $(0,0,0)$ et $(1,2,3) \rightarrow \vec{v}_{d_1} : (1,2,3)$

Soient deux points de d_2 $(1,0,0)$ et $(1,1,2) \rightarrow \vec{v}_{d_2} : (0,1,2)$

$$\rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_{d_1} \wedge \vec{v}_{d_2} = (1,2,3) \wedge (0,1,2) = (1,-2,1)$$

$$\rightarrow \pi \equiv x - 2y + z - d = 0$$

$$\text{Et comme } \pi \text{ passe par l'origine } P : 1 - 2 + 1 - d = 0 \rightarrow d = 0$$

$$\rightarrow \pi \equiv x - 2y + z = 0$$

3) La droite p est définie par deux plans.

π_1 contenant d_1 et parallèle à \vec{n}_π avec $(0,0,0) \in d_1$

$$\rightarrow \begin{cases} x = h + t \\ y = 2h - 2t \\ z = 3h + t \end{cases} \rightarrow \pi_1 \equiv 4x + y - 2z = 0$$

π_2 contenant d_2 et parallèle à \vec{n}_π avec $(1,0,0) \in d_2$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = k - 2t \\ z = 2k + t \end{cases} \rightarrow \pi_2 \equiv 5x + 2y - z = 5$$

$$\rightarrow p \equiv \begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ 5x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

EXGAE032– FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X, Y et Z , on donne le point $P(1, 2, -3)$, le plan β d'équation $2X - Y - 2Z = 0$ et la droite d parallèle au vecteur $(2, -1, -2)$ et qui passe par le point $A(4, -1, -3)$.

- Formez une équation cartésienne du plan α passant par P et contenant d .
- Formez une équation cartésienne du plan γ passant par P et parallèle au plan β .
- Formez des équations cartésiennes de la droite c , intersection des plans α et β .
- Déterminez l'angle des droites d et c .
- Déterminez les coordonnées du point Q , intersection de c et d ainsi que la distance de P à Q .

$$P(1, 2, -3) \quad \beta \equiv 2x - y - 2z = 0 \quad d \equiv \begin{cases} \vec{u}_d : (2, -1, -2) \\ A(4, -1, -3) \end{cases}$$

$$a) \vec{AP}(-3, 3, 0) \rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k - 3h \\ y = 2 - k + 3h \\ z = -3 - 2k \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0}$$

$$b) \vec{n}_\beta : (2, -1, -2) \rightarrow \gamma \equiv 2x - y - 2z = d$$

or $P \in \gamma \rightarrow 2 \times 1 - 2 + 2 \times 3 = d \rightarrow d = 6$

$$\boxed{\gamma \equiv 2x - y - 2z = 6}$$

$$c) \boxed{c \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - 2z = 6 \end{cases}}$$

$$d) \vec{u}_c = (2, 2, 1) \wedge (2, -1, -2) = (-1, 2, -2)$$

angle (d, c) : Les deux droites sont perpendiculaires car $\vec{u}_c \cdot \vec{u}_d = 0$

$$e) d \equiv \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = -3 - 2k \end{cases}$$

$$\text{On remplace l'équation de } \gamma \rightarrow 2(4 + 2k) - (-1 - k) - 2(-3 - 2k) = 6$$

$$\rightarrow k = -1 \rightarrow \boxed{Q(2, 0, -1)}$$

$$|PQ| = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (-1+3)^2} = \boxed{3}$$

EXGAE033– FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2003.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X, Y et Z , on donne le point $P(1, 2, 1)$ et le plan β d'équation $X + Y + Z - 2 = 0$.

- Formez des équations cartésiennes de la droite d passant par P qui est parallèle au vecteur $(2, 1, 1)$
- Déterminez les coordonnées cartésiennes du point Q , intersection de d et β .
- Déterminez des équations cartésiennes de la droite c , projection orthogonale de d sur le plan β .
- Déterminez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à d et contenant P .
- Déterminez des équations cartésiennes de la droite e , intersection des plans α et β .
- Calculez l'angle formé par les droites c et e .

$$P(1, 2, 1) \quad \beta \equiv x + y + z - 2 = 0 \quad (1)$$

$$a) d \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad (1) \rightarrow \boxed{d \equiv \frac{x-1}{2} = y-2 = z-1}$$

$$b) (1) \text{ et } (2) \rightarrow 1 + 2k + 2 + k + 1 + k - 2 = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{Q: \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)}$$

c) c est formé par le plan β lui-même, et le plan dont le vecteur normal est

$$\vec{n}_\beta \wedge \vec{u}_d = (1, 1, 1) \wedge (2, 1, 1) = (0, 1, -1) \rightarrow y - z = D$$

et comme ce plan passe par $Q \rightarrow D = 1$

$$\rightarrow \boxed{c \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}}$$

$$d) \alpha \equiv 2x + y + z = D$$

Ce plan passe par $P \rightarrow 2 + 2 + 1 = 5 = D$

$$\rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x + y + z = 5}$$

$$e) e \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$f) \vec{u}_c : (1, 1, 1) \wedge (0, 1, -1) = (-2, 1, 1)$$

$$\vec{u}_e : (2, 1, 1) \wedge (1, 1, 1) = (0, -1, 1)$$

Comme $\vec{u}_c \cdot \vec{u}_e = 0$, les deux droites sont perpendiculaires

EXGAE034– EPL, UCL, Louvain, juillet 2002, série 1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère les éléments suivants :

- Deux points : $A(a, 2, 2)$ et $B(2, a, -3)$.
- La droite $p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$
- Le plan $\alpha \equiv x + 3y - 2az + 10 = 0$

Où a est un paramètre réel.

On vous demande :

- De donner les valeurs de a telles que les droites p et AB soient parallèles
- De donner une équation pour le plan β parallèle au plan α et passant par B .
- De donner les valeurs de a telles que la droite AB soit parallèle au plan α .

$$A:(a, 2, 2) \quad B:(2, a, -3) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AB}:(2-a, a-2, -5)$$

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u_p}:(0, 0, 1)$$

$$a) \overrightarrow{AB} // p \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2-a = k \cdot 0 \\ a-2 = k \cdot 0 \\ 1 = k \cdot (-5) \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = 2$$

$$b) \alpha \equiv x + 3y - 2az + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n_\alpha}:(1, 3, -2a)$$

$$\alpha // \beta \quad \rightarrow \quad \beta \equiv x + 3y - 2az + d = 0$$

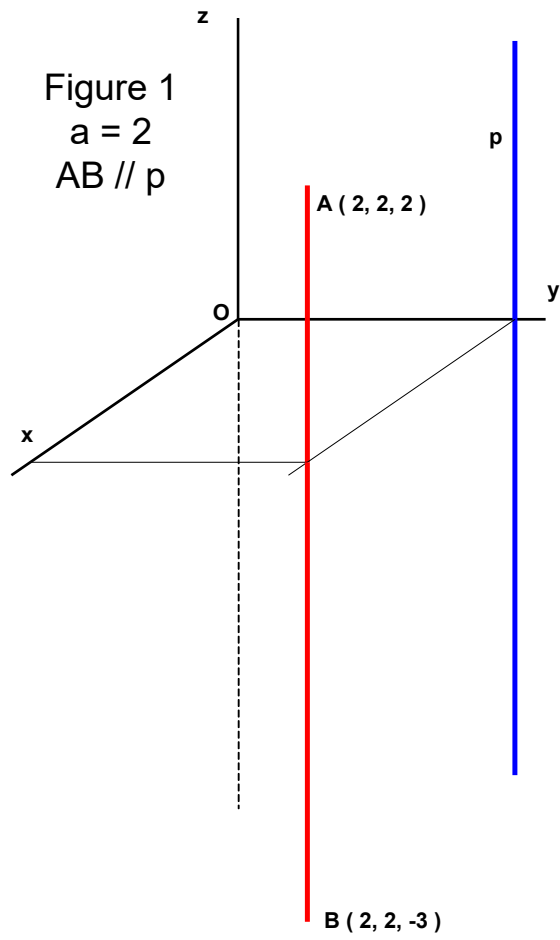
$$B \in \beta \quad \rightarrow \quad 2 + 3a + 6a + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -(2 + 9a)$$

$$\beta \equiv x + 3y - 2az - (2 + 9a) = 0$$

$$c) \overrightarrow{AB} // \alpha \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_\alpha} = 0$$

$$\rightarrow 1 \cdot (2-a) + 3 \cdot (a-2) + 5 \cdot (2a) = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{3}$$



EXGAE035– EPL, UCL, Louvain, juillet 2002, série 2.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère les éléments suivants :

- Les droites $p \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 \\ z = 9 + s \end{cases}$ $q \equiv \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$
 - Une sphère S de rayon $r = 9$ et de centre $A : (a, b, c)$
 - On vous demande de déterminer les coordonnées (a, b, c) afin de satisfaire les conditions ci-dessous.
 - d. Le centre A de la sphère appartient à la droite p .
 - e. La sphère est tangente à la droite q : en d'autres mots, on peut définir B comme l'unique intersection entre S et q , et on peut observer que le vecteur \overline{AB} est perpendiculaire à la droite q .
-

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 \\ z = 9 + s \end{cases} \rightarrow \vec{u}_p : (1, 0, 1) \quad q \equiv \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_q : (4, 1, -1)$$

Soit $B : (i, j, k) \in q$, le point de tangence de q à la sphère

On a aussi $A : (a, b, c) \in p$

$$\rightarrow \vec{AB} : (i - a, j - b, k - c)$$

$$\text{Or } \vec{AB} \perp q \rightarrow \vec{AB} \times \vec{u}_q = 0 \rightarrow 4i - 4a + j - b - k + c = 0$$

On remplace i, j, k et a, b, c

$$\rightarrow -12 + 16t - 8 - 4s + t - 5 - 2 + t + 9 + s = 0 \rightarrow s = 6t - 6$$

$$\text{D'autre part, } |\vec{AB}| = r = 9$$

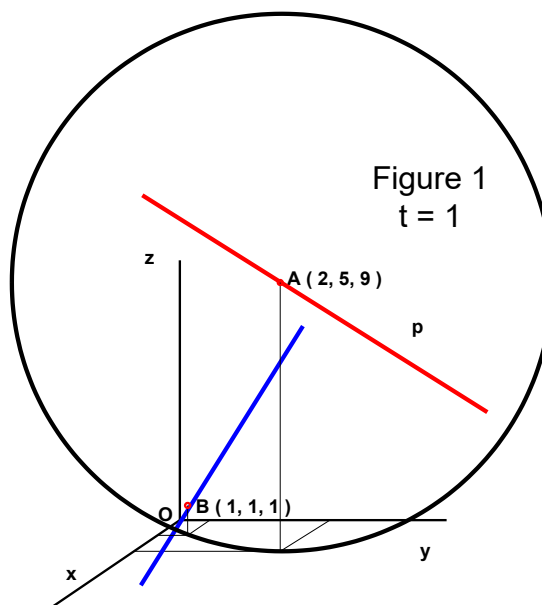
$$\rightarrow |\vec{AB}|^2 = (i - a)^2 + (j - b)^2 + (k - c)^2 = 81$$

$$\rightarrow (2t - 1)^2 + (t - 5)^2 + (7t + 1)^2 - 81 = 0 \rightarrow t = \pm 1$$

Conclusions

$$t = 1 \rightarrow A : (2, 5, 9) \quad B : (1, 1, 1)$$

$$t = -1 \rightarrow A : (-10, 5, -3) \quad B : (-7, -1, 3)$$



Résolu le 24 juin 2004

EXGAE036– EPL, UCL, Louvain, septembre 2002.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère les éléments suivants :

- Les droites $p \equiv \begin{cases} -2x - 2 = y + 3 \\ y + 3 = -4 + 2z \end{cases}$ et $q \equiv \begin{cases} x + 1 = -2y - 6 \\ y + 3 = 2 - z \end{cases}$
 - Le plan $\alpha \equiv 7x + y - 7z = 0$
-

On vous demande de déterminer le(s) point(s) P de la droite p et Q de la droite q tels que :

- f. Le segment de droite PQ soit de longueur $3\sqrt{2}$
- g. Et le segment de droite soit parallèle au plan α

$$\alpha \equiv 7x + y - 7z = 0 \rightarrow n_{\alpha} : (7, 1, -7)$$

$$PQ : (a, b, c) // \alpha \rightarrow PQ \times n_{\alpha} = 0 \rightarrow 7a + b - 7c = 0$$

Transformons les équations cartésiennes des droites en équations

$$\text{paramétriques : } p \equiv \begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}h \\ y = -3 + h \\ z = 2 + \frac{1}{2}h \end{cases} \quad q \equiv \begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = -3 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

$$\text{Soit } P : (x_P, y_P, z_P) \rightarrow P : \left(-1 - \frac{1}{2}h, -3 + h, 2 + \frac{1}{2}h \right)$$

$$\text{et } Q : (x_Q, y_Q, z_Q) \rightarrow Q : (-1 - 2k, -3 + k, 2 - k)$$

On déduit donc le système :

$$\begin{cases} -1 - \frac{1}{2}h + 1 + 2k = a \\ -3 + h + 3 - k = b \\ 2 + \frac{1}{2}h - 2 + k = c \\ 7a + b - 7c = 0 \end{cases} \rightarrow \text{En remplaçant } a, b \text{ et } c \text{ dans la dernière équation}$$

$$\rightarrow h = k \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}h \\ b = 0 \\ c = \frac{3}{2}h \end{cases} \rightarrow a = c \text{ et } b = 0$$

$$\text{D'autre part, } |\overline{PQ}|^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 18$$

$$\rightarrow a = \pm 3$$

$$1) \underline{a=3} \rightarrow b=0, c=3$$

$$\rightarrow h = k = 2 \rightarrow P : (-2, -1, 3) \text{ et } Q : (-5, -1, 0)$$

$$\text{On vérifie facilement } \overline{PQ} : (-3, 0, -3); |\overline{PQ}| = 3\sqrt{2}; \overline{PQ} \times \overline{n_\alpha} = 0$$

$$1) \underline{a=-3} \rightarrow b=0, c=-3$$

$$\rightarrow h = k = -2 \rightarrow P : (0, -5, 1) \text{ et } Q : (3, -5, 4)$$

$$\text{On vérifie facilement } \overline{PQ} : (3, 0, 3); |\overline{PQ}| = 3\sqrt{2}; \overline{PQ} \times \overline{n_\alpha} = 0$$

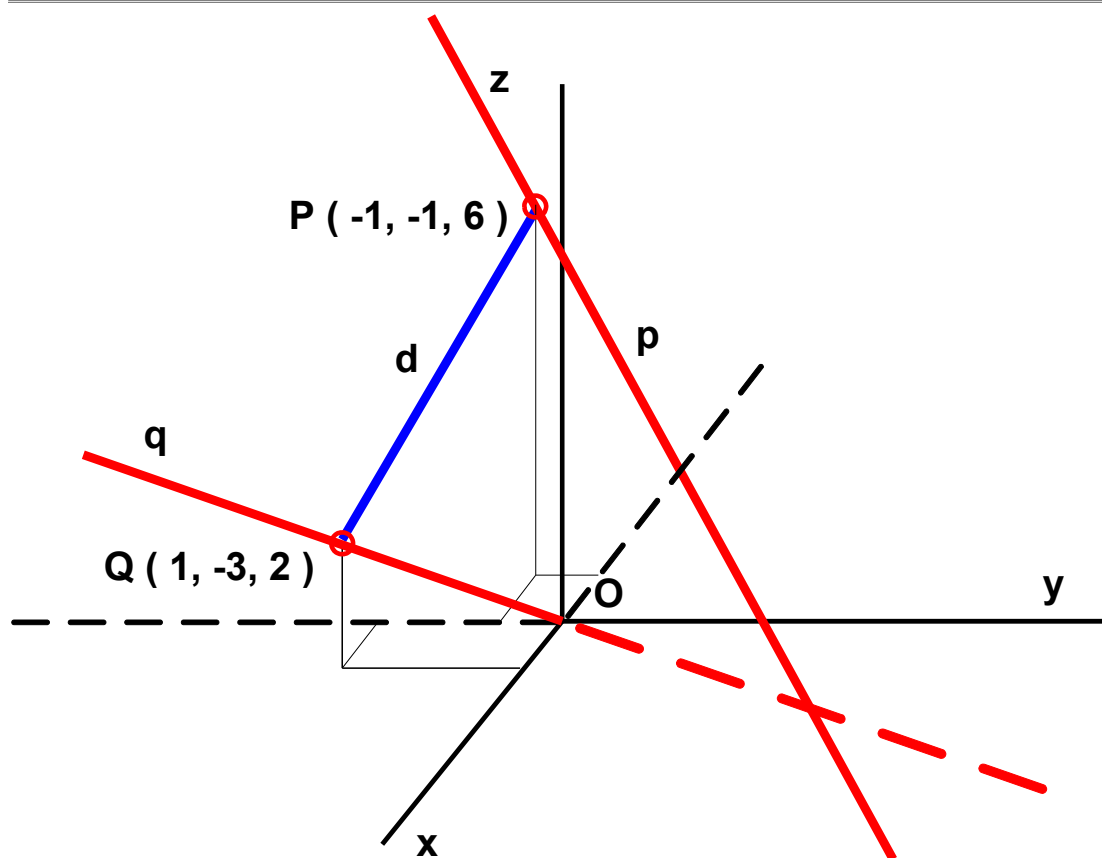
Résolu le 24 juin 2004

EXGAE037– EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$ on considère les droites

$$p \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 6 \end{cases} \quad q \equiv \begin{cases} y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

On vous demande de donner les équations paramétriques de la droite d perpendiculaire à chacune de ces droites.



$$p \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 6 \end{cases} \rightarrow p \equiv \begin{cases} x = h \\ y = h \\ z = 6 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_p : (1, 1, 0)$$

$$q \equiv \begin{cases} y = -3x \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow q \equiv \begin{cases} x = k \\ y = -3k \\ z = 2k \end{cases} \rightarrow \vec{u}_q : (1, -3, 2)$$

Le vecteur directeur de la droite perpendiculaire à p et q est donné par :

$$\vec{u}_d = \vec{u}_p \wedge \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

Soit $P' : (0, 0, 6)$ un point quelconque de la droite p .

Le plan α_p est déterminé par \vec{u}_p et \vec{u}_n et P'

$$\alpha_p \equiv \begin{cases} x = 0 + l + m \\ y = 0 + l - m \\ z = 6 - 2m \end{cases} \rightarrow \alpha_p \equiv x - y + z = 6$$

Soit Q , le point de percée de q dans α_p

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + z = 6 \\ y = -3x \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow Q : (1, -3, 2)$$

Les équations de d , perpendiculaire à p et q , sont donc

$$\text{Paramétriques : } d \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3 - k \\ z = 2 - 2k \end{cases}$$

$$\text{Cartésiennes : } d \equiv 1 - x = y + 3 = \frac{z - 2}{2}$$

Bien que ce ne soit pas demandé dans la question, calculons la distance des deux droites p et q

Méthode 1

On détermine P point de percée de p dans le plan α_q déterminé par

\vec{u}_q et \vec{u}_n et $Q' : (0, 0, 0)$ un point de q

$$\alpha_q \equiv \begin{cases} x = l + m \\ y = -3l - m \\ z = 2l - 2m \end{cases} \rightarrow \alpha_q \equiv 4x + 2y + z = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ x = y \\ z = 6 \end{cases} \rightarrow P : (-1, -1, 6)$$

$$\rightarrow d(p, q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

Méthode 2

Soit le vecteur unitaire $\vec{1}_n = \frac{\vec{u}_n}{|\vec{u}_n|} = \frac{(1, -1, -2)}{\sqrt{6}}$

$\overline{P'Q'} : (0, 0, -6)$ (on peut prendre deux points quelconques)

$$d(p, q) = \vec{1}_n \cdot \overline{P'Q'} = \frac{(1, -1, -2)}{\sqrt{6}} \cdot (0, 0, -6) = 2\sqrt{6}$$

EXGAE038– EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 2.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les éléments suivants :

- Deux points $A = (5 ; 0 ; 3)$ et $B = (-1 ; 4 ; 4)$,
- La droite $d \equiv \begin{cases} x = -6 - k \\ y = k \\ z = 2 - 8k \end{cases}$
- Le plan α contenant d et perpendiculaire au plan Oxy
- Le plan $\beta \equiv 2x + 2y + z + 1 = 0$

On vous demande :

- 1- De donner une équation du plan α
- 2- De déterminer le (ou les) point(s) pour que le triangle ABC soit rectangle, AC soit parallèle à α et BC soit parallèle à β .

$$a) d \equiv \begin{cases} x = -6 - k \\ y = k \\ z = 2 - 8k \end{cases} \rightarrow \vec{u}_d : (-1, 1, -8) \quad D : (-6, 0, 2)$$

Où D est un point quelconque de d

Si α est perpendiculaire au plan Oxy , alors $\vec{Oz} : (0, 0, 1)$ est parallèle à α .

$$\rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} x = -6 - k \\ y = k \\ z = 2 - 8k + h \end{cases} \rightarrow \alpha \equiv x + y + 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_\alpha : (1, 1, 0)$$

b) On doit envisager les cas où le triangle est rectangle en A , en B et en C

Soit $C : (x_c, y_c, z_c)$, le point cherché,

$$\rightarrow \vec{AC} : (x_c - 5, y_c, z_c - 3) \text{ et } \vec{BC} : (x_c + 1, y_c - 4, z_c - 4)$$

$$\text{et } \vec{AB} : (-1 - 5, 4 - 0, 4 - 3) = (-6, 4, 1)$$

Triangle rectangle en A

$$\rightarrow \overline{AB} \perp \overline{AC} \rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-6, 4, 1) \cdot (x_c - 5, y_c, z_c - 3) = -6x_c + 4y_c + z_c + 27 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Si } \overline{AC} // \alpha \rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{n_\alpha} = (x_c - 5, y_c, z_c - 3) \cdot (1, 1, 0) = x_c + y_c - 5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Si } \overline{BC} // \beta \rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{n_\beta} = (x_c + 1, y_c - 4, z_c - 4) \cdot (2, 2, 1) = 2x_c + 2y_c + z_c - 10 = 0 \quad (3)$$

(1), (2) et (3) forment un système qui a pour solution $C : \left(\frac{47}{10}, \frac{3}{10}, 0 \right)$

Triangle rectangle en B $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$

$$\rightarrow (-6, 4, 1) \cdot (x_c + 1, y_c - 4, z_c - 4) = -6x_c + 4y_c + z_c - 26 = 0 \quad (4)$$

(4), (2) et (3) forment un système qui a pour solution $C : \left(-\frac{3}{5}, \frac{28}{5}, 0 \right)$

Triangle rectangle en C $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0$

$$\rightarrow (x_c - 5, y_c, z_c - 3) \cdot (x_c + 1, y_c - 4, z_c - 4) = 0$$

$$\rightarrow (x_c - 5)(x_c + 1) + y_c(y_c - 4) + (z_c - 3)(z_c - 4) = 0 \quad (5)$$

(5), (2) et (3) forment un système

De (2) et (3), on tire $z_c = 0$ et $y_c = 5 - x_c$

On remplace dans (4) $\rightarrow x_c^2 - 5x_c + 6 = (x_c - 3)(x_c - 2) = 0$

1) $x_c = 3$ $C : (3, 2, 0)$

2) $x_c = 2$ $C : (2, 3, 0)$

EXGAE039– Louvain, septembre 2003.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les droites

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad q \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

On vous demande :

- 1- De dessiner les deux droites de l'énoncé du problème.
- 2- De déterminer analytiquement des équations cartésiennes et paramétriques de la droite d qui coupe les deux droites p et q sachant que le vecteur directeur de d est $(1 ; 2 ; 3)$

Soit $D : (0, y_D, z_D)$ un point de d

$$\rightarrow d \equiv \frac{x}{1} = \frac{y - y_D}{2} = \frac{z - z_D}{3}$$

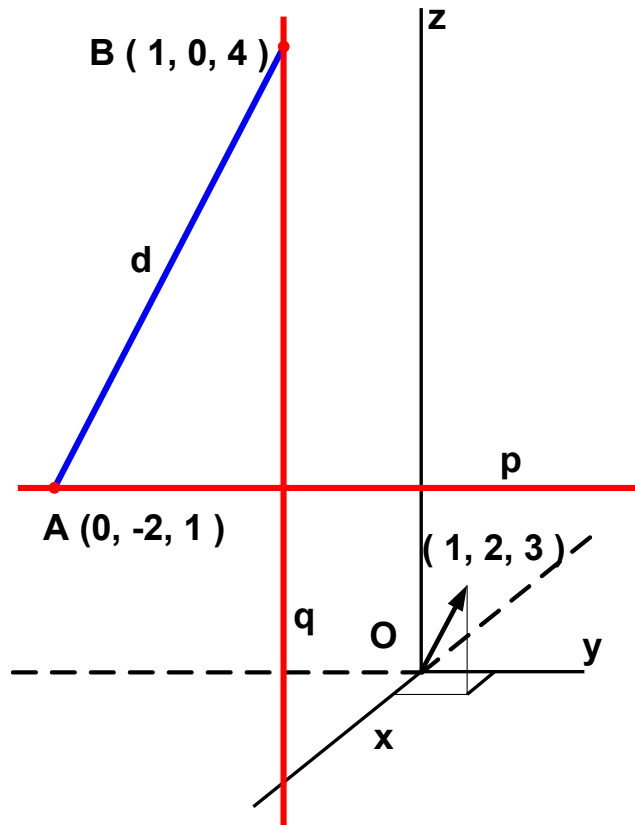
$$\text{Cherchons } A : (x_A, y_A, z_A) = p \cap d \rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ z_A = 1 \\ 2x_A = y_A - y_D \\ 3x_A = z_A - z_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = y_D \\ z_A = 1 \\ z_D = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Cherchons } B : (x_B, y_B, z_B) = q \cap d \rightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 0 \\ 2x_B = y_B - y_D \\ 3x_B = z_B - z_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 0 \\ y_D = -2 \\ z_B - z_D = 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2)} \rightarrow \begin{cases} A : (0, -2, 1) \\ B : (1, 0, 4) \\ D : (0, -2, 1) \end{cases}$$

Et les équations de la droite sont :

$$\begin{cases} x = k \\ y = -2 + 2k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad x = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 1}{3}$$



Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004.