Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 4

EXGAE040 – EXGAE049

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Décembre 04

EXGAE040– Bruxelles, juillet 2004.

Dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne les plans α et β ainsi que la droite d, d'équations respectives :

$$\alpha \equiv 5x+5y-3z=2;\quad \beta \equiv 2x-y+z=6;\quad d \equiv \begin{cases} x=z+2 \\ y=-z+1 \end{cases}$$

On demande de trouver tous les plans π contenant d tels que $\pi \cap \alpha$ et $\pi \cap \beta$ soient deux droites orthogonales.

Définissons le plan π passant par d, en exprimant que son vecteur normal $\overrightarrow{n_\pi}$ est perpendiculaire à d.

$d \equiv \begin{cases} x-z=2 \\ y+z=1 \end{cases} \rightarrow$ Vecteur directeur de d : $\overline{v_d}(1,-1,1)$

$\pi \equiv x+\alpha y+(\alpha-1)z=d \quad \overrightarrow{n_\pi}(1,\alpha,\alpha-1)$ On vérifie : $\overrightarrow{v_d}.\overrightarrow{n_\pi}=0$

La direction de $a=\pi\cap\alpha$ est donnée par

$$\overrightarrow{v_a}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\pi}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 5 & -3 \\ 1 & \alpha & \alpha-1 \end{vmatrix}=\big((8\alpha-5),(-5\alpha+2),(5\alpha-5)\big)$$

La direction de $b=\pi\cap\beta$ est donnée par

$$\overrightarrow{v_b}=\overrightarrow{n_\beta}\wedge\overrightarrow{n_\pi}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha-1 \end{vmatrix}=\big((-2\alpha+1),(-2\alpha+3),(2\alpha+1)\big)$$

a et b sont orthogonales $\rightarrow \overrightarrow{v_a}.\overrightarrow{v_b}=0$

$\rightarrow \big((8\alpha-5),(-5\alpha+2),(5\alpha-5)\big).\big((-2\alpha+1),(-2\alpha+3),(2\alpha+1)\big)=0$

$$\rightarrow 2\alpha^2-3\alpha-2=0 \rightarrow \alpha=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\begin{cases} \alpha_1=2 \\ \alpha_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\underline{\alpha_1=2} \rightarrow \overrightarrow{n_{\pi_1}}(1,2,1) \rightarrow \pi_1 \equiv x+2y+z=p$

Ce plan passe par la droite d. Soit un point de d : $A(2,1,0)\in d \rightarrow p=4$

$\rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv x+2y+z=4}$

$\underline{\alpha_2=-\frac{1}{2}} \rightarrow \overline{n_{\pi_2}}(2,-1,-3) \rightarrow \pi_2 \equiv 2x-y-3z=p$

Ce plan passe par la droite d. $A(2,1,0)\in d \rightarrow p=3$

$\rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv 2x-y-3z=3}$

Résolu le 15 décembre 04. Modifié le 12 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXGAE041– Bruxelles, septembre 2004.

Dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne les droites *a, b, c* et la direction δ définies par :

$$a \equiv \begin{cases} y = x+1 \\ z = -1 \end{cases} ; \quad b \equiv \begin{cases} y = -x+1 \\ z = 0 \end{cases} ; \quad c \equiv \begin{cases} y = x-1 \\ z = 1 \end{cases} ; \quad \delta \equiv (1,2,3)$$

On demande de trouver toutes les droites de l'espace rencontrant *a, b* et *c* qui sont orthogonales à δ.

<u>Méthode 1</u>

On va considérer un plan π perpendiculaire à la direction δ donnée.

Puis, on calcule les points de percée des droites *a*, *b* et *c* dans ce plan.

On ajustera ensuite notre paramètre pour que les trois points de percée soient colinéaires.

$$\pi_\delta \equiv x+2y+3z = t$$

$$A = a \cap \pi_\delta \equiv \begin{cases} x-y=-1 \\ z=-1 \\ x+2y+3z=t \end{cases} \rightarrow A : \left(\frac{t+1}{3}, \frac{t+4}{3}, -1\right)$$

$$B = b \cap \pi_\delta \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \\ x+2y+3z=t \end{cases} \rightarrow B : (-t+2, t-1, 0)$$

$$C = c \cap \pi_\delta \equiv \begin{cases} x-y=-1 \\ z=1 \\ x+2y+3z=t \end{cases} \rightarrow A : \left(\frac{t-5}{3}, \frac{t-2}{3}, 1\right)$$

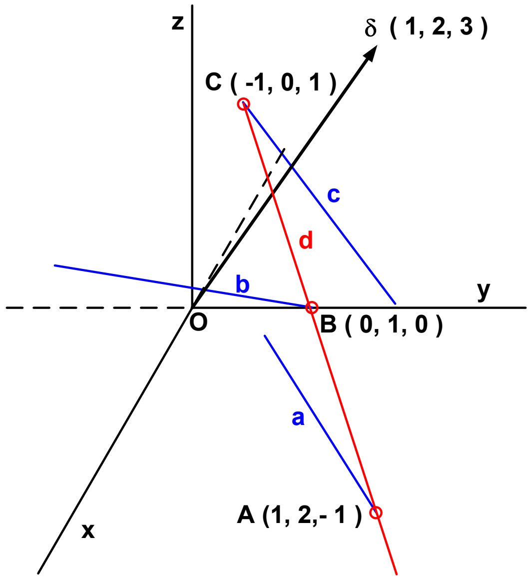
$$\rightarrow \overrightarrow{AC} : (-1,-1,1) \text{ et } \overrightarrow{AB} : \left(\frac{-4t+5}{3}, \frac{2t-7}{3}, 1\right)$$

Pour que A, B et C soient colinéaires, il suffit que les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient proportionnelles $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4t+5}{3} = -1 \\ \dfrac{2t-7}{3} = -1 \\ 1 = 1 \end{cases}$ Ce qui est vérifié pour $t = 2$

$\rightarrow$ Le vecteur directeur de d : $\overrightarrow{v_d} = \overrightarrow{AB} = (-1,-1,1)$ ou $(1,1,\text{-}1)$

Il ne reste plus qu'à écrire l'équation de d en utilisant le point C par exemple

$$d \equiv \begin{cases} x = -1+k \\ y = k \\ z = 1-k \end{cases} \quad \text{ou} \quad d \equiv x+1 = y = 1-z$$



Méthode 2

On peut remarquer que les droites a et c sont parallèles et orthogonales avec b.

On peut donc écrire l'équation du plan π définit par a et c. Ensuite calculer le point de percée C de c dans le plan π.

On écrit alors l'équation d'une droite d contenue dans π et passant par C.

Cette droite rencontrera donc a, b et c.

Il restera à imposer que d est orthogonale à δ.

$\overrightarrow{v_a}(1,1,0)\,;\;\; \overrightarrow{v_b}(1,-1,0)\,;\;\; \overrightarrow{v_c}(1,1,0) \;\rightarrow\; a \,//\, c \perp b$

Plan perpendiculaire a $b : \pi \equiv x - y = \alpha$. Il passe par $A(0,1,-1) \in a \rightarrow \alpha = -1$

$\rightarrow \pi \equiv x - y = -1$.

Point de percée C dans π : $\begin{cases} x - y = -1 \\ z = 1 \\ x - z = -1 \end{cases} \rightarrow C : (-1,0,1)$

Une droite $d \subset \pi$ est orthogonale à $\overrightarrow{v_b}$. Soit $\overrightarrow{v_d}(\alpha,\beta,\chi) \rightarrow \overrightarrow{v_b}.\,\overrightarrow{v_d} = \alpha - \beta = 0$

$\rightarrow \overrightarrow{v_d}(\alpha,\alpha,\chi)$ que l'on peut ramener à $\overrightarrow{v_d}(1,1,\lambda)$

De plus d est orthogonale à δ $\rightarrow 1+2+3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow \overrightarrow{v_d}(1,1,-1)$

Et l'équation de d est : $d \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases} \rightarrow d \equiv x + 1 = y = 1 - z$

EXGAE042 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les deux droites

$$p \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} x = -s \\ y = 1 \\ z = s \end{cases}$$

On vous demande de déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la droite s'appuyant sur les droites p et q et passant par le point $P = (0, 1, 2)$

Soient π_1 formé par P et p, et π_2 formé par P et q. La droite cherchée est simplement l'intersection de ces deux plans.

Soit X un point quelconque de p : $X(1,1,0) \to \overrightarrow{PX} : (1,0,-2)$

Soit $\overrightarrow{v_p}$ un vecteur directeur de p : $\overrightarrow{v_p}(2,-1,1)$

Soit $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$ le vecteur normal à π_1. On a $\overrightarrow{n_{\pi_1}} = \overrightarrow{PX} \times \overrightarrow{v_p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-5,-1)$

$\to \pi_1 \equiv 2x+5y+z = d \quad$ Or $P \in \pi_1 \to 0+5\times1+2 = d \to d = 7$

$\to \pi_1 \equiv 2x+5y+z-7 = 0$

De même : $Z:(0,1,0) \in q \to \overrightarrow{PZ}:(0,0,-2) \quad ; \quad \overrightarrow{v_q}(-1,0,1)$

$\to \overrightarrow{n_{\pi_2}} = \overrightarrow{PZ} \times \overrightarrow{v_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,2,0)$

$\to \pi_2 \equiv 2y = d \quad$ Or $P \in \pi_2 \to 0+2\times1+0 = d \to d = 2$

$\to \pi_2 \equiv y-1 = 0$

Finalement, la droite cherchée a pour équations cartésiennes $\begin{cases} 2x+5y+z-7=0 \\ y-1=0 \end{cases}$

et pour équations paramètriques : $\begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 2-2r \end{cases}$

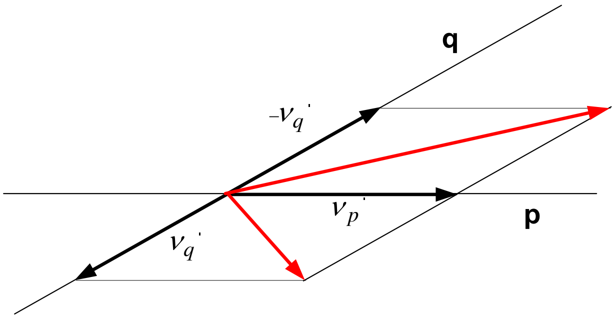
Issu le 7 mars 05. Modifié le 12 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXGAE043 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les deux droites

$$p \equiv \begin{cases} x = -1-t \\ y = 3-2t \\ z = 2+t \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} x = -1+2s \\ y = 3-s \\ z = 2+s \end{cases}$$

On vous demande de trouver le lieu de l'ensemble de points équidistants des deux droites p et q.



Remarquons que les deux droites sont coplanaires.

Soit le point $R = p \cap q$. $R:(-1,3,2)$

Les vecteurs directeurs des droites sont : $\begin{cases} \overrightarrow{v_p}:(-1,-2,1) \text{ et } \left|\overrightarrow{v_p}\right| = \sqrt{6} \\ \overrightarrow{v_q}:(2,-1,1) \text{ et } \left|\overrightarrow{v_q}\right| = \sqrt{6} \end{cases}$

En d'autres termes, les modules des deux vecteurs directeurs sont égaux.

Par conséquent, leur somme et leur différence indique les directions des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle formé par les deux droites.

De plus, rappelons que les bissectrices intérieure et extérieure sont perpendiculaires.

Or le lieu cherché est précisément formé par les plans perpendiculaires au plan déterminé par les deux droites coplanaires, et, passant par les deux bissectrices.

Soient π_1 et π_2 les deux plans cherchés.

On a $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{v_p} + \overrightarrow{v_q} = (1,-3,2) \to \pi_1 \equiv x-3y+2z+d=0$

Or $R \in \pi_1 \to d = 6 \to \boxed{\pi_1 \equiv x-3y+2z+6=0}$

On a $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{v_p} - \overrightarrow{v_q} = (3,1,0) \to \pi_2 \equiv 3x+y+d=0$

Or $R \in \pi_2 \to d = 0 \to \boxed{\pi_1 \equiv 3x+y=0}$

Vérification

Calculons la distance d'un point $Y \in \pi_1$ au deux droites p et q.

$Y(-6,0,0) \to \overrightarrow{RY}=(-5,-3,-2) \quad \left|\overrightarrow{RY}\right|=\sqrt{38}$

$\overrightarrow{1_p}=\frac{\overrightarrow{v_p}}{\left|\overrightarrow{v_p}\right|}=\frac{(-1,-2,1)}{\sqrt{6}} \quad \left(\overrightarrow{1_p} \text{ est un vecteur unitaire}\right)$

$\overrightarrow{1_p}.\overrightarrow{RY}=\frac{1}{\sqrt{6}}(5+6-2)=\frac{9}{\sqrt{6}}$

$d(Y,p)=\sqrt{\left|\overrightarrow{RY}\right|^2-\left|\overrightarrow{1_p}.\overrightarrow{RY}\right|^2}=\sqrt{38-\frac{81}{6}}=4.95$

$\overrightarrow{1_q}=\frac{\overrightarrow{v_q}}{\left|\overrightarrow{v_q}\right|}=\frac{(2,-1,1)}{\sqrt{6}} \quad \left(\overrightarrow{1_q} \text{ est un vecteur unitaire}\right)$

$\overrightarrow{1_q}.\overrightarrow{RY}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-10+3-2)=-\frac{9}{\sqrt{6}}$

$d(Y,q)=\sqrt{\left|\overrightarrow{RY}\right|^2-\left|\overrightarrow{1_q}.\overrightarrow{RY}\right|^2}=\sqrt{38-\frac{81}{6}}=4.95$

Issu le 9 mars 2005

EXGAE044 – Louvain, septembre 2004.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- le plan $\alpha = x + 2y + 2z = 0$
- le plan $\beta = 3x - 4z = 5$

On vous demande de trouver l'équation de toutes les sphères tangentes aux deux plans, dont le centre se trouve sur le plan Oxyz et dont le rayon vaut 5.

Soit P le centre d'une des sphères : $P \in Oxy \rightarrow P(a,b,0)$

Calculons la distance de P aux plans α et β.

Soit X un point quelconque de α : $X(0,0,0) \rightarrow \overrightarrow{PX} : (a,b,0)$

Vecteur normal à α : $\overrightarrow{n_\alpha}(1,2,3) \rightarrow \overrightarrow{1_{v_\alpha}} = \dfrac{\overrightarrow{n_\alpha}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \dfrac{(1,2,3)}{3}$ $\overrightarrow{1_{v_\alpha}}$ est un vecteur unitaire

$\rightarrow d(P,\alpha) = \left| \overrightarrow{1_{v_\alpha}}.\overrightarrow{PX} \right| = \dfrac{a}{3} + \dfrac{2b}{3} = 5$

Soit Y un point quelconque de β : $Y(3,0,1) \rightarrow \overrightarrow{PY} : (a-3,b,-1)$

Vecteur normal à α : $\overrightarrow{n_\beta}(3,0,-4) \rightarrow \overrightarrow{1_{v_\beta}} = \dfrac{\overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \dfrac{(3,0,4)}{5} \rightarrow d(P,\beta) = \left| \overrightarrow{1_{v_\beta}}.\overrightarrow{PY} \right| = \dfrac{3a-9+4}{5} = 5 \rightarrow a = 10$

Donc : $\begin{cases} a+2b=15 \\ a=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

$\rightarrow$ L'équation de la sphère : $S_1 \equiv (x-10)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 + z^2 = 25$

En fait, il y a quatre solutions car on peut prendre $\overrightarrow{n_\alpha}$ et $\overrightarrow{n_\beta}$ dans le sens opposé. Ce qui donne

$$\begin{cases} -a-2b=15 \\ a=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=-\dfrac{25}{2} \end{cases} \rightarrow S_2 \equiv (x-10)^2 + \left(y + \dfrac{25}{2}\right)^2 + z^2 = 25$$

$$\begin{cases} a+2b=15 \\ -a=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=\dfrac{25}{2} \end{cases} \rightarrow S_3 \equiv (x+10)^2 + \left(y - \dfrac{25}{2}\right)^2 + z^2 = 25$$

$$\begin{cases} -a-2b=15 \\ -a=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow S_4 \equiv (x+10)^2 + \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 + z^2 = 25$$

Issu le 9 mars 05

EXGAE045 – Liège, septembre 2004.

On se place dans des axes orthonormés et on considère la famille de plans d'équation

$$\pi_r \equiv r^2x+\left(-r^2+2r+1\right)y-\left(2r+1\right)z-1=0$$

où r est un paramètre réel.

1. Démontrer que ces plans sont tous parallèles à une même droite d contenant l'origine et donner une équation cartésienne de d.
2. Calculer les coordonnées de la projection orthogonales de l'origine sur les plans π_r

---

Nous reprenons la résolution proposée par l'université

a) Une droite d de vecteur directeur $\left(v_1,v_2,v_3\right)$ est parallèle aux plans π_r si et seulement si

$r^2v_1+\left(-r^2+2r+1\right)v_2-\left(2r+1\right)v_3=0$ pour tout $r\in\mathbb{R}$ $\qquad (1)$

L'équation (1) s'écrit encore $r^2\left(v_1-v_2\right)+2r\left(v_2-v_3\right)+\left(v_2-v_3\right)=0 \qquad (2)$

Nous cherchons un vecteur non nul $\left(v_1,v_2,v_3\right)$ tel que l'équation (2) soit satisfaite pour tout r. Il est alors nécessaire et suffisant que $\begin{cases} v_1=v_2 \\ v_2=v_3 \end{cases}$.

La droite d passant par l'origine et de vecteur directeur $(1,1,1)$ est donc parallèle à π_r pour tout r. Ses équations cartésiennes sont : $x=y=z$

b) Ecrivons les équations de la droite d_r passant par l'origine et perpendiculaire à π_r

Cette droite a pour vecteur directeur $\left(r^2,-r^2+2r+1,-(2r+1)\right)$ et admet donc pour

équation : $\dfrac{x}{r^2}=\dfrac{y}{-r^2+2r+1}=-\dfrac{z}{2r+1}\rightarrow\begin{cases}\left(-r^2+2r+1\right)x=r^2y\\ -(2r+1)x \qquad =r^2z\end{cases}$ si $r\neq 0$

Son intersection avec π_r satisfait donc : $\begin{cases}y=\dfrac{-r^2+2r+1}{r^2}x\\ z=-\dfrac{-(2r+1)}{r^2}x\\ r^2x+\dfrac{\left(-r^2+2r+1\right)^2}{r^2}x+\dfrac{(2r+1)^2}{r^2}x-1=0\end{cases}$

$$\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{r^2}{r^4+\left(-r^2+2r+1\right)^2+(2r+1)^2}\\ y=\dfrac{-r^2+2r+1}{r^4+\left(-r^2+2r+1\right)^2+(2r+1)^2}\\ z=\dfrac{-(2r+1)}{r^4+\left(-r^2+2r+1\right)^2+(2r+1)^2}\end{cases}$$

Ce résultat reste valable si r est nul.

Le 23 avril 05

EXGAE046 – Liège, juillet 2005.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminerl'équation du plan médiateur de $[A, B]$.
2. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonales de C sur la droite AB.
3. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Déterminer l'aire du triangle ABC.

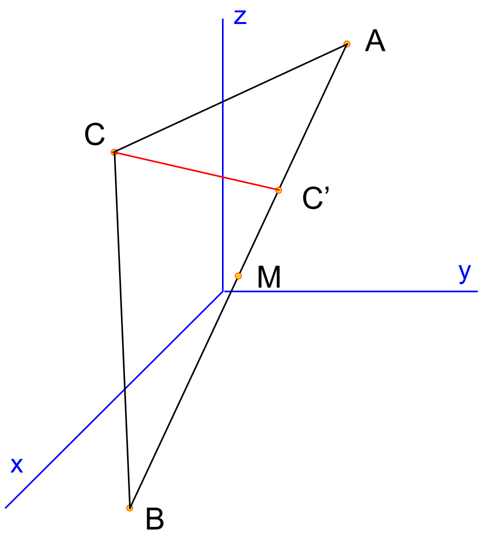
$$A:\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, B:\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, C:\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}:\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Les coordonéees de M milieu de AB sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{v_{AB}}:\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le plan médiateur a donc pour équation : $\pi_M \equiv x - y - 3z + d = 0$

Il passe par $M \rightarrow d = 3 \rightarrow \boxed{\pi_M \equiv x - y - 3z + 3 = 0}$



b) La méthode générale est la suivante :

Plan perpendiculaire à AB et passant par C : $\pi_C \equiv x - y - 3z + d = 0$

Il passe par $C \rightarrow d = 7 \rightarrow \pi_C \equiv x - y - 3z + 7 = 0$

Point de percée C' de AB dans π_C : $AB \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 2 - k \\ z = 4 - 3k \end{cases}$

On remplace dans l'équation de $\pi_C \rightarrow k - (2-k) - -(4-3k) + 7 = 0$

$$\rightarrow k = \frac{7}{11} \rightarrow C' : \begin{pmatrix} 7/11 \\ 15/11 \\ 23/11 \end{pmatrix}$$

c) $\cos BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{(2,-2,-6).(1,-3,-1)}{\left|(2,-2,-6)\right|.\left|(1,-3,-1)\right|} = \dfrac{+2+6+6}{\sqrt{4+4+36}.\sqrt{1+9+1}} = \dfrac{7}{11}$

$\rightarrow BAC = 50.478°$

d) La méthode générale est :

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(-16,-4,-4)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 4^2 + 4^2} = 6\sqrt{2}$$

Deuxième méthode

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right| \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{44}\sqrt{11}\sqrt{1 - \left(\frac{7}{11}\right)^2} = 6\sqrt{2}$$

Troisième méthode.

On remarque que CC' est la hauteur du triangle ABC

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|.\left|\overline{CC'}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{44}\sqrt{\left(\frac{7}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{11} + 1\right)^2 + \left(\frac{23}{11} - 3\right)^2} = 6\sqrt{2}$$

Issu le 7 août 2005. Modifié le 5 septembre 2005 (Anis H)

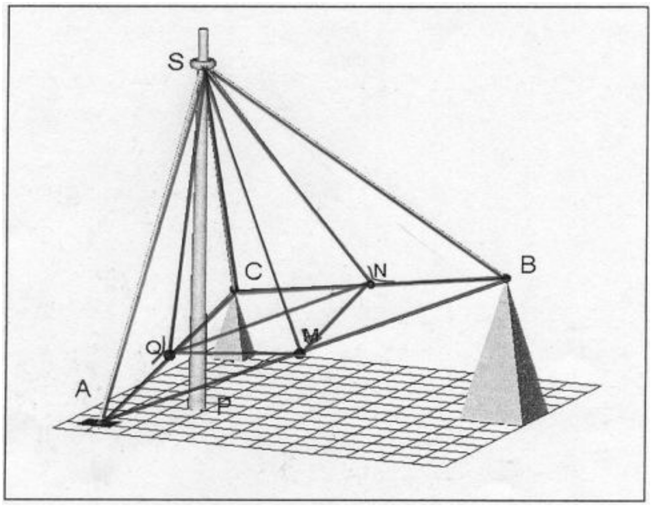
EXGAE047 – Mons, juillet 2005.

Sur un terrain plan et horizontal, il existe 3 massifs d'ancrage munis d'anneaux permettant d'y attacher les extrémités de 3 câbles d'acier qui, accrochés à leurs extrémités vers le sommet d'un mât vertical en un point commun S de ce mât, en assurent le soutien.

Dans un système de référence orthonormé $Oxyz$, les coordonnées de ces points d'ancrage A,B,C sont : A (0, 0, 0), B (10, 6, 4) et C (0, 10 2).

Les longueurs des 3 câbles sont identiques.

1. Quelles sont les coordonnées du point d'attache « S » du mât dans le cas où ce point S est à la hauteur $Z_S = 10$, puis dans le cas où la longueur L des câbles serait fixée à 10 ?
2. Quel est le volume du tétraèdre $SABC$ dans le cas où ce point est à la hauteur $Z_S = 10$?



Note : Cet exercice est couplé avec EXGSE065

$1.a)$ Les coordonnées de S sont : $(x, y, 10)$. Exprimons que les longueurs d des câbles sont égales :

$$\begin{cases} x^2+y^2+10^2=d^2 \\ (x-10)^2+(y-6)^2+36=d^2 \\ x^2+(y-10)^2+64=d^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=d^2-10 \\ x^2-20x+10^2+y^2-16y+36+36=d^2 \\ x^2+y^2-20y+10^2+64=d^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 20x+12y=72 \\ 20y=64 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1.68 \\ y=3.2 \end{cases}$$

Les coordonnées de S sont :$(\ 1.68,\ 3.2,\ 10\ )$ et les longueurs des câbles sont égales à 10.633

$1.b)$ Nous procédons de la même façon :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10^2 \\ (x-10)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=10^2 \\ x^2+(y-10)^2+(z-2)^2=10^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=10^2 \\ 20x+12y+8z=152 \\ 5y+z=26 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=10^2 \\ x=\dfrac{7y-14}{5} \\ z=26-5y \end{cases} \rightarrow \left(\frac{7y-14}{5}\right)^2+y^2+(26-5y)^2=10^2$$

$$\rightarrow 699y^2-6696y+14596=0 \rightarrow \begin{cases} y=3.3544 \rightarrow \begin{cases} x=1.896 \\ z=9.228 \end{cases} \\ y=6.2249 \rightarrow \begin{cases} x=5.9149 \\ z=-5.1245 \quad \text{à rejeter} \end{cases} \end{cases}$$

Les coordonnées de S sont : $(\ 1.896,\ 3.354,\ 9.228\ )$

2) Calcul du volume d'un tétraèdre connaissant les coordonnées des sommets.

1er méthode

On applique simplement la formule : $V_{SABC}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\1 & x_2 & y_2 & z_2\\1 & x_3 & y_3 & z_3\\1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}$

Ici : $V_{SABC}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 10 & 6 & 4\\1 & 0 & 10 & 2\\1 & 1.896 & 3.354 & 9.228\end{vmatrix}=\frac{802.624}{6}=133.77$

2ème méthode

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\overline{AS}.\frac{\left(\overrightarrow{AB}\times\overline{AC}\right)}{2}$$

Cette formule est une traduction vectorielle de la formule de base : $V=\frac{1}{3}h.B$

Pour rappel : le produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ par $\vec{b}$ définit un vecteur $\vec{c}$ perpendiculaire au plan définit par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et dont la norme est égale à la surface du parallèlogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (Donc 2 fois la surface du triangle)

Ici : $\overrightarrow{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\10 & 6 & 4\\0 & 10 & 2\end{vmatrix}=(-28,-20,100)$

$\to V_{SABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}(\ 1.896, 3.354, 9.228\ ).(-28,-20,100)=133.77$

EXGAE048 – Mons, juillet 2003.

Soient les 5 points de l'espace suivants : A (2,3,1), B (0,1,3), C (-1,0,1), D (4,0,2) et E (4,5,3).

a. Donner l'équation paramétrique pour les droites d_1 passant par A et C et d_2 passant par B et E.
b. Quelle figure de l'espace ces 5 points forment-ils entre eux ?
c. Calculer le volume de cette figure.

---

a) Equations paramètriques de $d_1\ (AC)$ et de $d_2\,(BE)$:

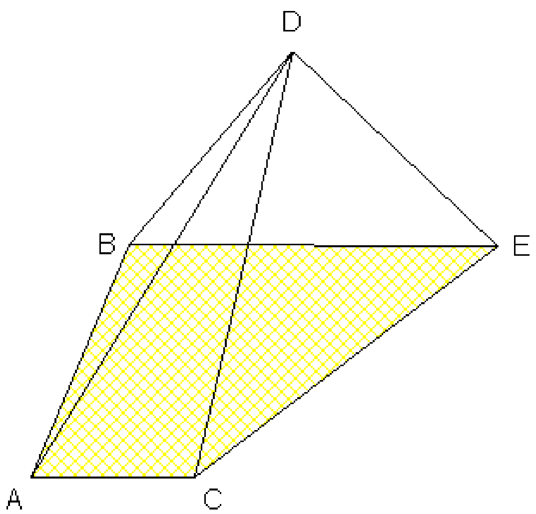
$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 3-3t \\ z = 1 \end{cases} \quad (1) \qquad d_2 \equiv \begin{cases} x = 4t \\ y = 1+4t \\ z = 3 \end{cases} \quad (2)$$

On peut remarquer que $d_1 // d_2$ $\left(\text{Vecteurs directeurs de même direction } (1,1,0)\right)$

b) Par a), on déduit que les points A,B,C et C sont coplanaires

- Ils appartiennent au plan $\pi \equiv x - y + 1 = 0$
- D n'appartient pas à ce plan
- $AC // BE, \left| AC \right| = 3\sqrt{2},\ \left| BE \right| = 4\sqrt{2}$

La quadrilatère $ACBE$ est par conséquent un trapèze. La figure $ABCDE$ représente donc une pyramide à base trapézoïdale



c) On détermine le plan α perpendiculaire à BE et passant par A et on détermine le point de percée de BE dans ce plan

Le plan α a pour équation cartésienne $4x+4y+d=0$ (cfr : équations paramètriques (2))

où $x+y+k=0$; il passe par $A(2,3,1) \to x+y-5=0$

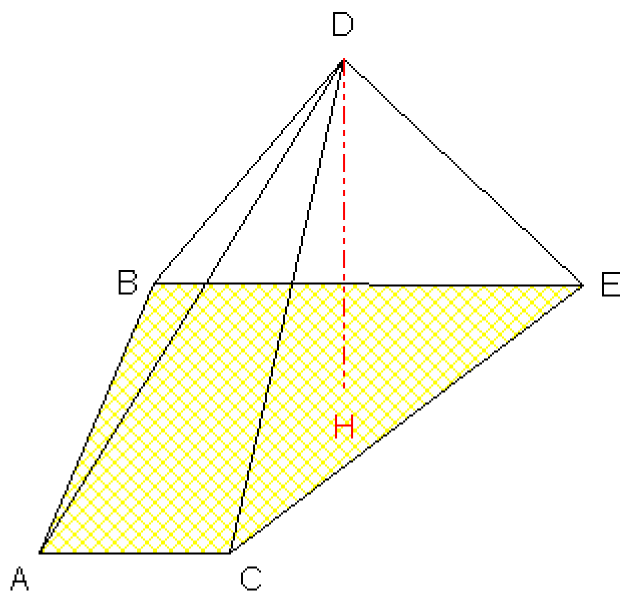
Le point de percée P de BE dans α s'obtient en remplaçant x et y par leurs expressions en fonction de t. On trouve $t=0.5$ et $P(2,3,3)$. Ainsi $d_{A,P}=2$

La surface de la base vaut donc $\dfrac{\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right).2}{2}=7\sqrt{2}$

- Abaissons maintenant la hauteur h de D sur $ACBE$

$$h \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases} \qquad h \cap \pi = \{H\} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{2}, 2\right\} \text{ d'où } |\,DH\,| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Finalement, le volume de la pyramide vaut $\dfrac{5.7\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{35}{3}$



Issu le 7 septembre 2005. Steve Tumson

EXGAE049 – Mons, juillet 2003.

Soient les points A (1,-1,0), B (0,1,-1) et D (α,0,1)

a. Pour quelle valeur de α le plan π passant par ces trois points est perpendiculaire au plan d'équation $y = 0$?
b. Soit une sphère S de centre C (1,2,-1) et de rayon 2. Déterminer l'intersection de π avec S.
c. Déterminer l'aire du triangle ABC.

---

a) Recherche de la valeur de α et de l'équation du plan π

- Equation cartésienne du paln $\pi \equiv ax+by+cz+1=0$

  Il passe par le point $A: a-b+1=0 \quad (1) \rightarrow a=b-1$

  Il passe par le point $B: b-c+1=0 \quad (2) \rightarrow c=b+1$

  Il passe par le point $C: \alpha a+a+1=0 \;\; (3) \rightarrow \alpha(b-1)+(b+1)+1=0 \rightarrow b=\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1}$

  $a=\dfrac{-3}{\alpha+1},\; b=\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1},\; c=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha+1}$. On trouve donc $\pi \equiv 3x+(2-\alpha)y+(1-2\alpha)z=\alpha+1$
- Vecteur $\vec{n}$ normal à $\pi:\left(\overline{3,2-\alpha,1-2\alpha}\right)$
- Vecteur $\overrightarrow{n_2}$ normal au plan $y=0:\left(\overline{0,1,0}\right)$
- $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\alpha=2$
- $\pi\equiv x-z=1 \quad (4)$

<u>*NB*</u> : Plus rapidement, si un plan est perpendiculaire à $y=0$, il est aussi parallèle à l'axe des y et son équation cartésienne ne contient pas de terme en y : d'où, en faisant $b=0$ dans $(1),(2)$ et (3), on trouve directement l'équation (4)

b) Intersection de la sphère S avec le plan π

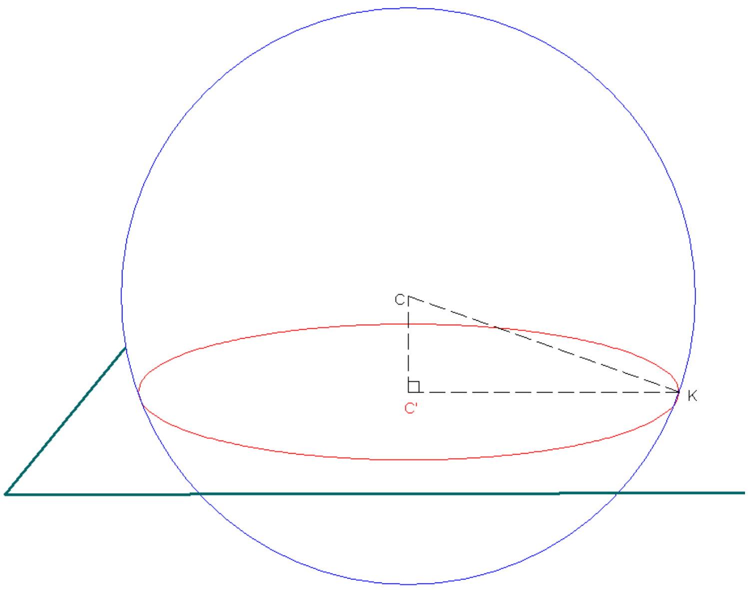
- Equation de $S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$
- $\pi \cap S \equiv \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4 \\ z = x+1 \end{cases}$
- On abaisse de $C(1,2,-1)$ la droite n perpendicualire à π et on cherche son point de de percée C'. La droite n a pour équation paramètrique $\{x = t+1,\ y = 2,\ z = -t-1\}$

Il vient : $(t+1)-(t-1)=1$ soit $t = -\frac{1}{2}$ et $C'\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$

Le carré de la distance de C à C' vaut : $d^2_{CC'} = (1-0.5)^2 + 0^2 + (-1-(-0.5))^2 = 0.5$

Le plan coupe donc la sphère en un cercle de centre $C'\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$

(Pythagore)



c) Aire du triangle ABC

- Aire du triangle $ABC =$ base $\times$ hauteur / 2. Soit la base AB

$$AB \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad \left| AB = \sqrt{\left(1 + 2^2 + 1\right)} = \sqrt{7} \right|$$

- Equation du plan cartésien π_1 passant par C et perpendiculaire à AB

$\pi_1 \equiv x - 2y + z = -4$

- L'intersection de π_1 avec AB donne le pied P de la hauteur

$(1\text{-t}) - 2(-1 + +2t) - t = -4 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{6}$ et donc

$$P \equiv \pi_1 \cap AB = \left\{ \left(\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6} \right) \right\}$$

Par la suite, $d_{PC} = \dfrac{\sqrt{42}}{6}$ et l'aire de ABC vaut : $\dfrac{\dfrac{\sqrt{42}}{6}\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$