Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 6

EXGAE060 – EXGAE069

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXGAE60 - Polytech, UMONS, Mons – Juillet 2006 – Série A

1°. Dans le système orthonormé *OXYZ*, soit un plan *ABC*. Les points *A*, *B* et *C* présentent les coordonnées (*X*,*Y*,*Z*) suivantes : *A* (10, 0, 0), *B* (0, 20, 0), *C* (0, 0, 30).
Déterminer l'équation cartésienne de ce plan ABC, en considérant sa formulation telle que n'intervient <u>aucun</u> dénominateur dans les termes de cette équation.

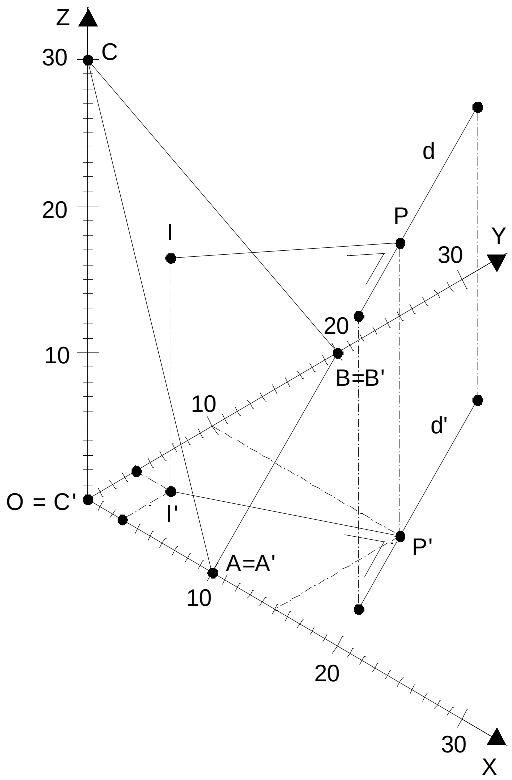
2°. Par un point *P* de coordonnées (15, 10, 20), une perpendiculaire est menée au plan *ABC* et soit I son pied sur *ABC*.
Quelles sont les équations paramétriques de cette perpendiculaire et quelles sont les coordonnées du point I ?

3°. Par ce même point *P*, faisons passer une droite quelconque *d* qui soit parallèle au plan *ABC*.
Démontrer, par les méthodes de la Géométrie Synthétique, que cette droite *d* est perpendiculaire à la droite *IP*.

4°. Parmi l'infinité de droites passant par *P* et qui sont parallèles au plan *ABC*, déterminer la droite *d* qui soit telle que l'angle droit que forment *d* et *IP* se projette orthogonalement sur le plan *OXY*.

5°. Par la droite *d*, faisons passer un plan β perpendiculaire au plan *ABC*.
Quelle est l'équation cartésienne de ce plan ?

Nous reprenons la solution proposée par l'université.
http://ressourcescms.fpms.ac.be/DocuWebFpms/Forms/AllItems.aspx?RootFolder=%2fDocuWebFpms%2fDossier%20admission&View={0F3B00E4-EA3B-4EF2-B23C-446AB398F606}



1°

Cette équation cartésienne peut s'écrire directement étant donné que les points d'intersection *A*, *B* et *C* de ce plan avec les axes OX, OY et OZ sont connus :

$$\frac{X}{10}+\frac{Y}{20}+\frac{Z}{30}-1=0$$

ou encore, en y éliminant les dénominateurs :

$$6\,X+3\,Y+2\,Z-60=0 \qquad (\ 1\ )$$

2°

Comme la droite recherchée est perpendiculaire au plan *ABC*, les paramètres directeurs de cette droite ne sont rien d'autre que les coefficients de X, Y et Z dans l'équation cartésienne du plan.

Par ailleurs, cette droite passe par le point P de coordonnées (15, 10, 20).

Les équations paramétriques de la perpendiculaire recherchée sont directement déduites de toutes ces données :

$$\begin{cases} X = 15 + 6\,\lambda \\ Y = 10 + 3\,\lambda \\ Z = 20 + 2\,\lambda \end{cases} \qquad (\ 2\ )$$

Le pied I de la perpendiculaire au plan *ABC* n'est autre que le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le plan *ABC*.

Il suffit donc de remplacer X, Y et Z par leurs expressions paramétriques (2) dans l'équation cartésienne (1) du plan *ABC* pour déterminer la valeur du paramètre λ correspondant à ce point d'intersection et donc :

$$6(15+6\lambda)+3(10+3\lambda)+2(20+2\lambda)-60=0$$

$$\rightarrow \qquad \lambda_I=-\frac{100}{49}=-2.041 \qquad (\ 3\ )$$

Les coordonnées du point I sont déduites de (2) et (3) :

$$X_I=15+6\lambda_I=+2.755$$

$$Y_I=10+3\lambda_I=+3.878$$

$$Z_I=20+2\lambda_I=+15.918$$

$$\rightarrow \qquad I\ (+2.755,\ +3.878,\ +15.918\ )$$

3°

La droite *IP* est perpendiculaire au plan *ABC* : elle est donc orthogonale à n'importe quelle droite appartenant à ce plan *ABC*.

Toute droite parallèle à un plan est parallèle à une droite appartenant à ce plan.

Comme tout droite d passant par le point P et parallèle au plan *ABC* est donc parallèle à une droite de ce plan et comme toutes les droites de ce plan sont orthogonales à la droite *IP*, toute droite d est aussi orthogonale à *IP*.

Mais comme ces droites d et *IP* ont un point commun *P*, cette orthogonalité devient ici une perpendicularité. cqfd.

4°

Le théorème suivant de Géométrie synthétique 3D est à prendre en considération pour résoudre la question :

" *Si un angle droit présente l'un de ses côtés parallèle au plan de projection, cet angle droit se projette sur le plan de projection selon un angle droit*. "

IP n'étant pas parallèle au plan de projection OXY, c'est la droite d qui doit l'être.

Cette droite, étant à la fois parallèle au plan ABC et au plan OXY, est nécessairement parallèle à leur intersection.

En effet, cette droite doit nécessairement être simultanément parallèle à l'une des droites du plan ABC et à l'une des droites du plan OXY.

Cette condition ne saurait évidemment être remplie que si et seulement si la droite du plan ABC et la droite du plan β sont parallèles entre elles.

Comme l'un des 2 plans, OXY, est horizontal, toutes ses droites sont horizontales.

Donc, les droites du plan ABC à prendre en compte sont ses horizontales.

Parmi l'infinité de telles droites horizontales du plan ABC, il en existe une particulière : l'intersection des 2 plans.

Déterminons alors les paramètres directeurs de cette droite d'intersection.

Considérons des Vecteurs Normaux (et leurs composantes) à chacun des plans :

$$ABC\ (\ 6,\ 3,\ 2\ )$$
$$OXY\ (\ 0,\ 0,\ 1\ )$$

Comme chacun de ces vecteurs perpendiculaires à un plan est orthogonal à toute droite du plan, il est en particulier perpendiculaire à l'intersection des 2 plans.

L'intersection des 2 plans a donc comme direction celle du produit vectoriel des 2 vecteurs normaux.

Etablissons ce produit vectoriel :

$$\overrightarrow{N}_{ABC} \wedge \overrightarrow{N}_{OXY} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\,\overrightarrow{u_x} - 6\overrightarrow{u_y} + 0\,\overrightarrow{u_z}$$

Le triplet $(3,\ -6,\ 0)$ peut donc être admis comme triplet de paramètres directeurs de la droite d'intersection entre les 2 plans.

Sans faire appel à la Géométrie Vectorielle, il est possible d'arriver au même résultat en considérant les 2 équations cartésiennes des plans et en recherchant 2 points dont les coordonnées vérifient simultanément ces 2 équations ; par exemple :

$6X + 3Y + 2Z - 60 = 0$ (Equation du plan ABC)

$Z = 0$ (Equation du plan OXY)

Soit le point d'abscisse $X = 1$ et de cote Z obligatoirement 0 (pour satisfaire à la seconde équation) :
son ordonnée Y se détermine en remplaçant X par 1 et Z par 0 dans la 1ère équation $\rightarrow Y = 18$

Soit le point d'abscisse $X = 3$ et de cote Z obligatoirement 0 (pour satisfaire à la seconde équation) :
son ordonnée Y se détermine en remplaçant X par 3 et Z par 0 dans la 1ère équation $\rightarrow Y = 14$

De ces 2 points de coordonnées (1, 18, 0) et (3, 14, 0), il est alors possible de déduire les paramètres directeurs de cette droite d'intersection :

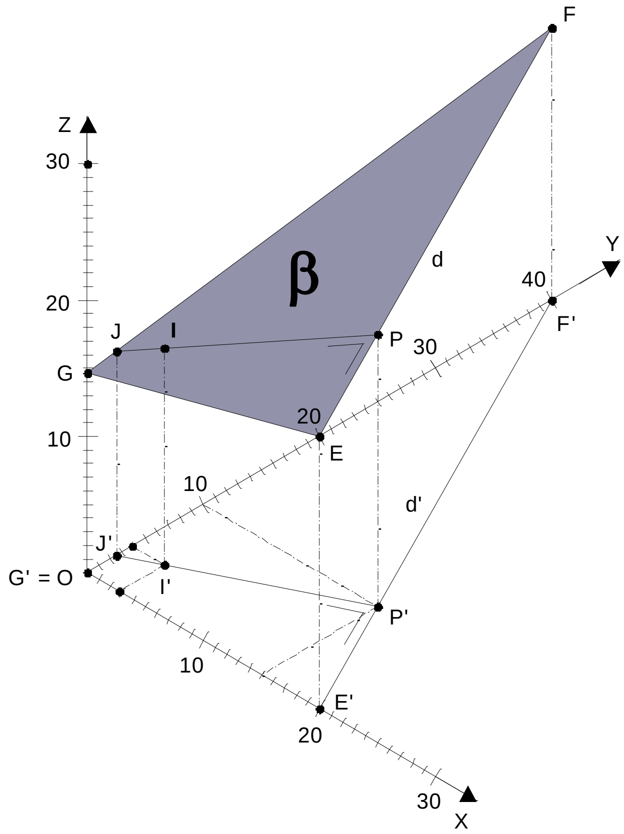
$$[\ (1-3),\ (18-14),\ (0-0)\ ] \quad \text{ou} \quad (-2,\ 4,\ 0)$$

Et, comme les triplets de paramètres directeurs caractérisant une droite sont proportionnels, il est aussi possible, en multipliant chacun des termes de ce triplet par $-\dfrac{3}{2}$, de retrouver le triplet $(3, -6,\ 0)$ obtenu par la méthode vectorielle.

La droite d étant parallèle à cette droite d'intersection, il est possible de choisir comme triplet de paramètres directeurs pour cette droite un triplet identique (ou proportionnel) au triplet de paramètres directeurs caractérisant la droite d'intersection.

Faisons choix du même triplet . Les équations paramétriques de la droite d recherchée qui passe par P (15, 10, 20) s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{cases} X = 15 + 3\mu \\ Y = 10 - 6\mu \\ Z = 20 + 0\mu \end{cases}} \qquad \text{où } \mu = \text{paramètre} \qquad (4)$$



5°

Le théorème de Géométrie Synthétique 3D suivant est à prendre en considération pour résoudre la question :

" *Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire au plan donné* "

Dès lors, le plan recherché est tout simplement celui formé de la droite d et de la perpendiculaire IP au plan ABC.

1ère méthode (vectorielle) :

Le vecteur Normal $\overrightarrow{N_P}$ au plan β recherché est orthogonal aux vecteurs directeurs de d et de IP, soit :

$$\overrightarrow{N}_{IP}\ (6,3,2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{N}_d\ (3,-6,0)$$

Ce vecteur Normal $\overrightarrow{N_P}$ au plan recherché est donc parallèle au vecteur " Produit Vectoriel des 2 vecteurs $\overrightarrow{N}_{IP}$ et $\overrightarrow{N}_d$" :

$$\overrightarrow{N}_P = \overrightarrow{N}_{IP} \wedge \overrightarrow{N}_d = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\overrightarrow{u_x} + 6\,\overrightarrow{u_y} - \overrightarrow{u_z}$$

Les paramètres directeurs de ce vecteur $\overrightarrow{N_P}$ normal au plan β sont ainsi (12, 6, – 45) ou encore, en considérant un triplet proportionnel au précité : (4, 2, –15).

L'équation cartésienne du plan β peut donc s'écrire : $4\,X + 2\,Y - 15\,Z - k = 0$

Pour déterminer le terme indépendant k, il suffit de considérer le fait que le plan β passe par $P(15,10,20)$

$\rightarrow$ $\boxed{4\,X + 2\,Y - 15\,Z + 220 = 0}$ (5)

2ème méthode :

Déterminons un point quelconque de d, autre que P et, p. ex., son intersection F avec OYZ :

Rappelons les équations paramétriques (4) de d :

$$\begin{cases} X = 15 + 3\mu \\ Y = 10 - 6\mu \\ Z = 20 + 0\mu \end{cases}$$

Pour $X_F = 0 \rightarrow \mu = -5$

Et, par suite, les ordonnée et cote de F sont : $Y_F = +40$ et $Z_F = +20$

Etablissons alors l'équation cartésienne du plan en exprimant qu'il passe par les 3 points connus $P(15,10,20)$, $F(0,40,20)$ et $I(+2.755,\ +3.878, +15.918)$:

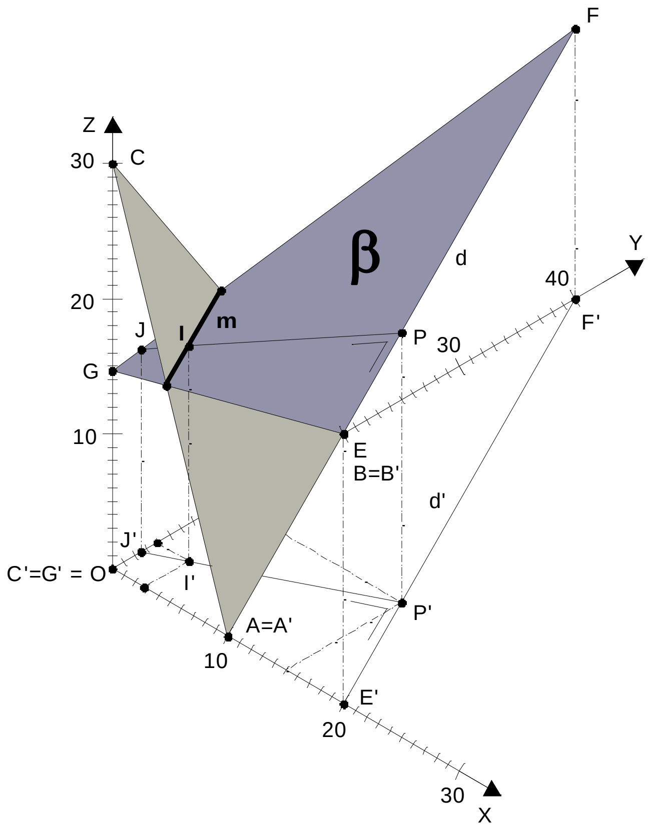
$$\begin{vmatrix} X-15 & Y-10 & Z-20 \\ 0-15 & 40-10 & 20-20 \\ 2.755-15 & 3.878-10 & 15.918-20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-15 & Y-10 & Z-20 \\ -15 & 30 & 0 \\ 12.245 & 6.122 & 4.082 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ $122.460\ (X-15) + 61.230\ (Y-10) - 459.180\ (Z-20) = 0$

En divisant chacun des termes par (61.230 / 2) :

$\rightarrow$ $4\ (X-15) + 2\ (Y-10) - 15\ (Z-20) = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{4\ X + 2\ Y - 15\ Z + 220 = 0}$



EXGAE61 - Polytech, UMONS, Mons – Juillet 2006 – Série B

Dans le système orthonormé *OXYZ*, considérons 2 sphères : la 1ère, de centre O_1 [coordonnées (5, 15, 20)] et de rayon $R_1 = 5$ et la Sde , de centre O_2 [coordonnées (30, 20, 40)] et de rayon $R_2 = 15$.
3 plans simultanément tangents à ces 2 sphères sont considérés : ils sont, tous trois, tels qu'ils coupent le plan *OYZ* selon des droites verticales.

Le 1er, soit τ_1, est un plan extérieurement tangent aux 2 sphères. Comme il existe cependant 2 plans extérieurement tangents aux 2 sphères, une condition est imposée pour le choix de l'un d'entre eux : celui qui sera choisi coupe l'axe *OY* selon la plus grande des 2 ordonnées des points d'intersection des 2 plans.

Les 2 autres plans sont les plans intérieurement tangents aux 2 sphères. Le plan dénommé « τ_2 » coupe l'axe des *Y* selon la plus grande des 2 ordonnées des points d'intersection de l'axe *OY* avec ces 2 plans intérieurement tangents. L'autre plan sera dénommé « τ_3 ».

1°. **Déterminer les équations cartésiennes des plans τ_1, τ_2 et τ_3.**
[Indication : le problème peut être résolu selon diverses méthodes, l'**une** de celles-ci fait appel à la formulation de calcul de la distance d'un point de coordonnées (*u*, *v*) à une droite d'équation $ay + bx + c = 0$, soit :
distance point – droite = $|\ (av + bu + c) / (a^2 + b^2)^{0.5}\ |$
De toute façon, quelle que soit la méthode utilisée, il faut garder à l'esprit qu'un problème de géométrie spatiale peut, dans certains cas, se ramener à un problème de géométrie plane]

2°. **Proposer des équations paramétriques pour ces 3 plans**

Dans le système orthonormé $OXYZ$, considérons 2 sphères : la 1ère, de centre O_1 $\left[\text{coordonnées } (5,\ 15,\ 20)\right]$ et de rayon $R_1 = 5$ et la Sde, de centre O_2 $\left[\text{coordonnées } (30,\ 20,\ 40)\right]$ et de rayon $R_2 = 15$. Trois plans simultanément tangents à ces 2 sphères sont considérés : ils sont, tous trois, tels qu'ils coupent le plan OYZ selon des droites verticales.

Le 1er, soit τ_1, est un planextérieurementtangent aux 2 sphères. Comme il existe cependant 2 plans extérieurement tangents aux 2 sphères, une condition est imposée pour le choix de l'un d'entre eux : celui qui sera choisi coupe l'axe OY selon la plus grande des 2 ordonnées des points d'intersection des 2 plans.

Les 2 autres plans sont les plans intérieurement tangents aux 2 sphères. Le plan dénommé «τ_2 » coupe l'axe des Y selon la plus grande des 2 ordonnées des points d'intersection de l'axe OY avec ces 2 plans intérieurement tangents. L'autre plan sera dénommé «τ_3 ».

1°

Nous reprenons la solution proposée par l'université.
http://ressourcescms.fpms.ac.be/DocuWebFpms/Forms/AllItems.aspx?RootFolder=%2fDocuWebFpms%2fDossier%20admission&View={0F3B00E4-EA3B-4EF2-B23C-446AB398F606}

1°. Déterminer les équations cartésiennes des plans τ_1, τ_2 et τ_3.

Comme il s'agit de plans coupant OYZ selon des droites verticales, ces plans seront eux-mêmes verticaux.

1ère conséquence : les équations cartésiennes de ces plans sont du type : $Y = aX + b$

2ème conséquence : les rayons des sphères joignant leurs centres aux points de contact sont des segments horizontaux appartenant aux grands cercles équatoriaux des sphères.

Comm ces cercles équatoriaux et le rayons joignant centres des sphères et points de contact appartiennent à des plans horizontaux passant respectivement par chacun des centres des sphères, ces éléments se projettent en vraie grandeur $\gg$ sur le plan horizontal OXY, ce qui signifie que ces cercles ne sont pas dégénérés en ellipses sur le projection.

Les plans tangents eux-mêmes, étant verticaux, se projettent sur OXY selon des droites qui sont d'ailleurs tangentes aux cercles précités.

Le problème se ramène dès lors à un cas plan où l'examen peut se faire sur OXY.

Nous fournissons, enpage suivante, une figure spatiale où, à titre d'exemple, le plan extérieurement tangent $\tau_1$est dessiné, puis, nous fournissons la figure plane, projection de la scène spatiale sur le plan OXY.

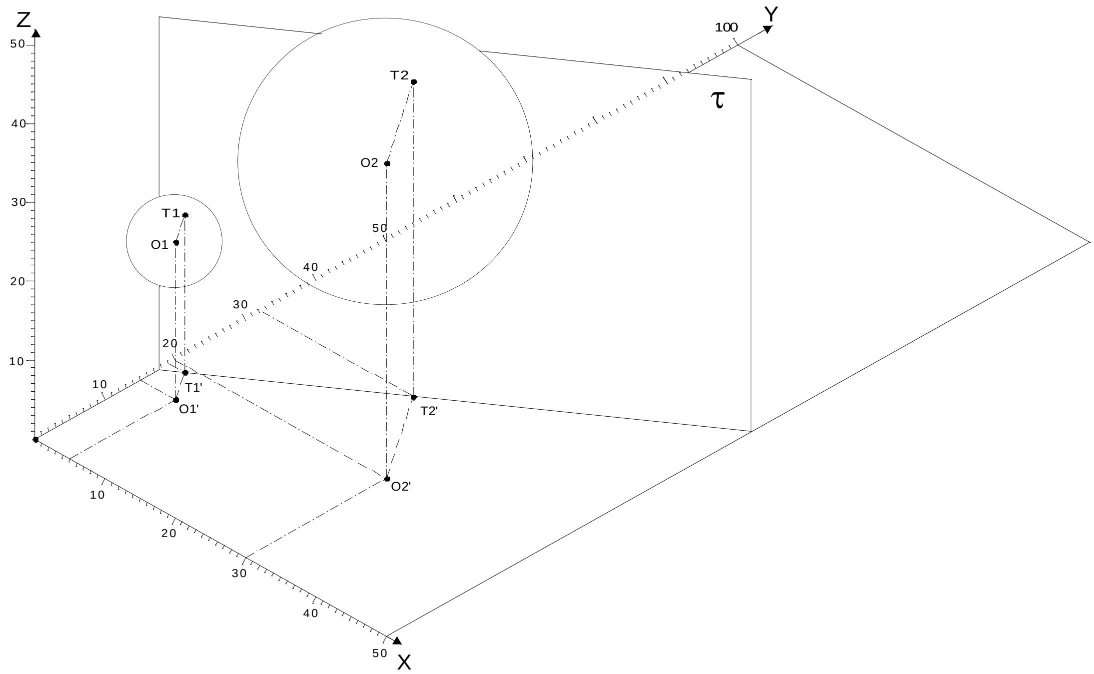


FIGURE SPATIALE

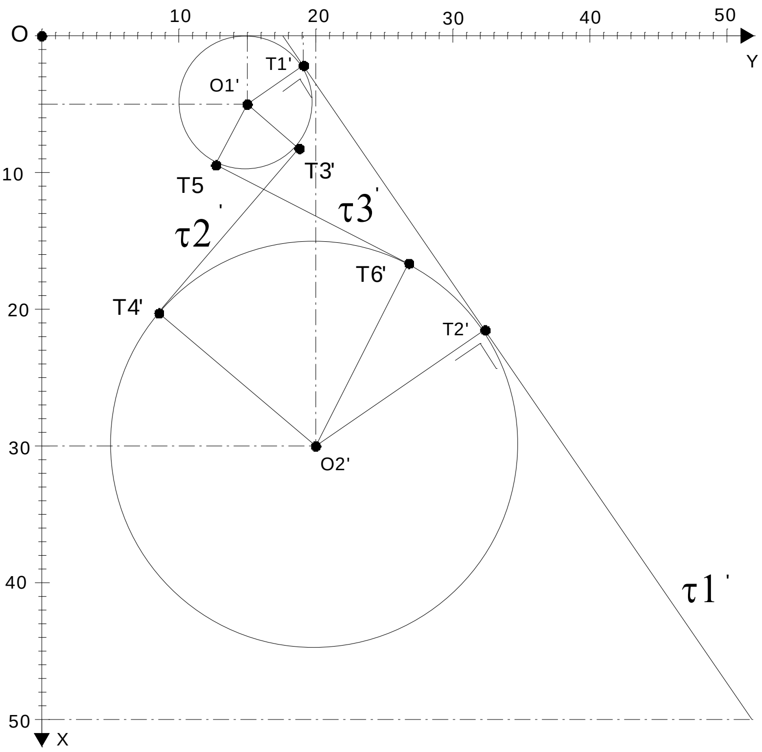


FIGURE PLANE EN PROJECTION SUR OXY

1ère méthode

L'équation générale des tangentes peut s'écrire : $Y = aX + b$ où a et b sont les inconnues.

Ecrivons cette équation sous sa forme implicite : $aX - Y + b = 0$

Exprimons que la distance de $O_1^{'}(5,15)$ à cette droite doit valoir $R_1 = 5$ et que la distance de $O_2^{'}(30,20)$ à cette droite doit valoir $R_2 = 15$:

$$\frac{5a-15+b}{\sqrt{a^2+1}} = 5 \qquad (1) \qquad\qquad \frac{30a-20+b}{\sqrt{a^2+1}} = 15 \qquad (2)$$

ou $\quad (5a-15+b)^2 = 25(a^2+1) \qquad\qquad (30a-20+b)^2 = 225(a^2+1)$

ou $\quad 9(5a-15+b)^2 = 225(a^2+1) \quad (3) \qquad (30a-20+b)^2 = 225(a^2+1) \quad (4)$

$(3)-(4) \rightarrow \quad 9(5a-15+b)^2 - (30a-20+b)^2 = 0$

$\rightarrow \quad \left[3(5a-15+b)-(30a-20+b)\right].\left[3(5a-15+b)+(30a-20+b)\right] = 0$

$\rightarrow \quad (-15a-25+2b)(45a-65+4b) = 0$

$\rightarrow \quad 1^{ère}$ solution : $b = \dfrac{15a+25}{2} \quad (5) \qquad 2^{ème}$ solution : $b = \dfrac{65-45a}{4} \quad (6)$

Exploitons la 1èresolution :

Remplaçons b par son expression (5) dans (1) ou (2), p.ex. dans (1) élevé au carré:

$$\left(4a-15+\frac{15a+25}{2}\right)^2/\left(a^2+1\right)=25\rightarrow(10a-30+15a+25)^2=100\left(a^2+1\right)$$

$$\rightarrow 525a^2-250a-75=0\rightarrow 21a^2-10a-3=0$$

$\rightarrow$ $\boxed{a=+0.6848}$ ou $\boxed{a=-0.2086}$

En remplaçant ensuite a par ces 2 valeurs dans (5):

$\rightarrow$ $\boxed{a=+17.6360}$ ou $\boxed{a=+10.9355}$

Exploitons ensuite la 2ème solution :

Remplaçons b dans (6) dans (1) ou (2), p.ex. dans (1) élevé au carré :

$$\left(5a-15+\frac{65-45a}{4}\right)^2/\left(a^2+1\right)=25\rightarrow(20a-60+65-45a)^2=400\left(a^2+1\right)$$

$$\rightarrow 9a^2-10a-15=0$$

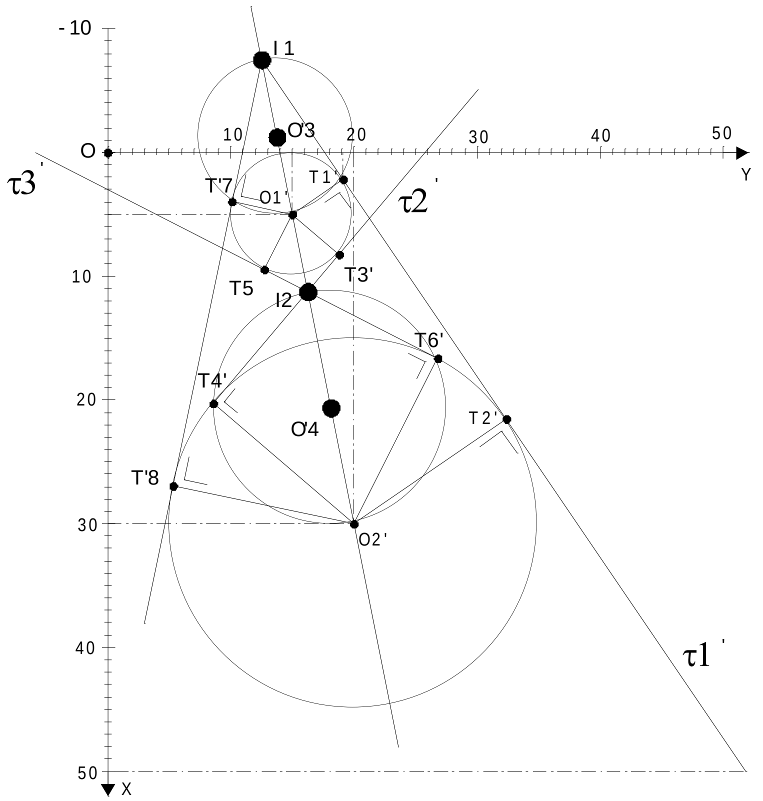
$\rightarrow$ $\boxed{a=+1.9610}$ ou $\boxed{a=-0.8499}$

En remplaçant ensuite a par ces 2 valeurs dans (5):

$\rightarrow$ $\boxed{b=-5.8113}$ ou $\boxed{b=+25.8114}$

Les équations cartésiennes des 3 plans tangents à considérer sont donc :

$Y=+0.6848X+17.6360$	(Plan τ_1)
$Y=-0.8499X+25.8114$	(Plan τ_2)
$Y=+1.9610X-5.8114$	(Plan τ_3)


- 10
I 1
O'3
O
10
20
30
40
50
Y
τ3 '
T'7
O1'
T 1'
τ2 '
T5
T3'
I2
T6'
T4'
O'4
T 2'
T'8
O2'
τ1 '
X

$2^{\text{ème}}$ méthode

Les tangentes à une circonférence se croisent sur la droite joignantles centres de ces circonférences.
Les tangentes extérieures se croisent en I_1 et les tangentes extérieures en I_2.
Les rayons joignant les 2 centres aux points de contact de chacune de ces tangentes aux circonférences sont respectivement parallèles entre eux.
Dans chacun des cas, l'un des rayons est donc l'image de l'autre rayon dans une homothétie admettant comme centre l'un des 2 points I_1 ou I_2 et comme rapport le rapport de ces rayons.
Or, ces 2 points I_1 et I_2 peuvent aussi être considérés comme centres d'homothétie pour les 2 circonférences : considérons en effet, p.ex., la similitude des triangles $I_1O_1^{'}T_1^{'}$ et $I_2O_2^{'}T_2^{'}$.
Cette similitude implique : $\dfrac{I_1O_1^{'}}{I_1O_2^{'}} = \dfrac{R_1}{R_2}$. Les centres des 2 circonférences sont ici 2 points homothétiques dans l'homothétie de centre I_1 et de rapport R_1 / R_2.
Nous allons appliquer ce principe d'homothétie pour le calcul descoordonnées de I_1 et de I_2 :
Appelons (s,t) les coordonnées de I_1 et considérons la relation $\dfrac{I_1O_1^{'}}{I_1O_2^{'}} = \dfrac{R_1}{R_2}$.
Sachant que les coordonnées de $O_1^{'}$ sont $(5,15)$et que celles de $O_2^{'}$ sont $(30,20)$ et que les rayons sont $R_1 = 5$ et R_2=15, cette relation implique que :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{5-s}{30-s} = \dfrac{5}{15} & \rightarrow & s = -7.5 \\ \dfrac{15-t}{20-t} = \dfrac{5}{15} & \rightarrow & t = +12.5 \end{array}\right\} \rightarrow \quad I_1(-7.5,+12.5)$$

Appelons (u,v) les coordonnées de I_2 et considérons la relation $\dfrac{I_2O_1^{'}}{I_2O_2^{'}} = \dfrac{R_1}{R_2}$
Sachant que les coordonnées de $O_1^{'}$ sont $(5,15)$ et que celles de $O_2^{'}$ sont $(30,20)$ et que les rayons sont $R_1 = 5$ et $R_2 = 15$, cette relation implique :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{u-5}{30-u} = \dfrac{5}{15} & \rightarrow & u = +11.25 \\ \dfrac{v-15}{20-v} = \dfrac{5}{15} & \rightarrow & v = +16.25 \end{array}\right\} \rightarrow \quad I_2(+11.25,+16.25)$$

Connaissant à présent les coordonnées de I_1 et de I_2, le problème seramène à la détermination des tangentes à l'une des 2 circonférences $\left(\text{ au choix}\right)$, issues de I_1 et de I_2.

Le quadrilatère $I_1T_1^{'}O_1^{'}T_7^{'}$ est inscriptible $\left(2 \textit{ angles opposés en } T_1^{'} \textit{ et } T_7^{'} \textit{ valant } 90\ ° \right)$

Son diamètre est $O_1^{'}I_1$.Les coordonnées de son centre $O_3^{'}$ sont donc :

$$\frac{5-7.5}{2}=-1.25 \qquad \text{et} \qquad \frac{15+12.5}{2}=13.75 \qquad \rightarrow \qquad O_3^{'}\left(-1.25,+13.75\right)$$

Le carré de son rayon $R_3=O_3^{'}O_1^{'}$ vaut $R_3^2=\left(5+1.5\right)^2+\left(15-13.75\right)^2=40.625$

L'équation de la circonférence de centre $O_3^{'}$ et de rayon R_3 s'établit ainsi selon :

$$\left(X+1.25\right)^2+\left(Y-13.75\right)^2=40.625$$

Les points $T_1^{'}$ et $T_7^{'}$ sont les intersections de la circonférence de centre $O_1^{'}$ et de rayon R_1 et de la circonférence de centre $O_3^{'}$ et de rayon R_3. Exprimons-le par le système formé des équations de ces 2 circonférences, complètement développées :

$$\begin{cases} X^2+Y^2-10X-30Y+225=0 & (1) \\ X^2+Y^2+2.5X-27.5Y+150=0 & (2) \end{cases}$$

Soustrayons (1) de (2):$\rightarrow 12.5X+2.5Y-75 \qquad (3)$

Cette expression (3)établit la relation entre l'abscisse et l'ordonnée des points d'intersection des 2 circonférences ; exprimons alors, à partir de cette expression (3), l'ordonnée en fonction de l'abscisse : $\qquad Y=30-5X \qquad (4)$

Reportons alors cette expression de Y dans (1) pour déterminer les abscisses de $T_1^{'}$ et $T_7^{'}$:

$$X^2+\left(30-X\right)^2-10X-30\left(30-5X\right)+225=0$$

ou $\qquad 26X^2-160X+225=0 \qquad \rightarrow \qquad X=+3.987926 \quad \text{et} \quad X=+2.174920$

En introduisant ces valeurs dans (4): $\rightarrow \qquad Y=10.105370 \quad \text{et} \quad Y=+19.125400$

L'équation du plan $\boldsymbol{\tau_1}$, passant par $T_1^{'}$ et par I_1, sont déduites du second couple de ces valeurs $\left(X,Y\right)$: $\qquad Y-19.1254=\dfrac{19.1254-12.5}{2.174920+7.5}\left(X-2.17492\right)$

ou $\qquad \boxed{Y=+0.6848X+17.6360 \quad \left(\text{Plan } \tau_1\right)}$

De même, le quadrilatère $I_2T_6^{'}O_2^{'}T_4^{'}$ est inscriptible $\left(2 \textit{ angles opposés en } T_6^{'} \textit{ et } T_4^{'} \textit{ valant } 90°\right)$.

Son diamètre est $O_2^{'}I_2$. Son diamètre est $O_2^{'}I_2$.Les coordonnées de son centre $O_4^{'}$ sont donc :

$$\frac{30+11.25}{2}=+20.625 \quad \text{et} \quad \frac{20+16.25}{2}=18.125 \quad \rightarrow \quad O_4^{'}\left(+20.625,+18.125\right)$$

Le carré de son rayon $R_4=O_4^{'}O_2^{'}$ vaut : $R_3^2=\left(30-20.625\right)^2+\left(20-18.125\right)^2=91.40625$

L'équation de la circonférence de centre $O_3^{'}$ et de rayon R_3 s'établit ainsi selon :

$$\left(X-20.625\right)^2+\left(Y-18.125\right)^2=91.40625$$

Les points $T_6^{'}$ et $T_4^{'}$ sont les intersections de la circonférence de centre $O_2^{'}$ et de rayon R_2 et de la circonférence de centre $O_4^{'}$ et de rayon R_4.

$$\begin{cases} X^2+Y^2-60X-40Y+1075=0 & (5) \\ X^2+Y^2-41.25X-36.25Y+662.5=0 & (6) \end{cases}$$

Soustrayons (5) et (6):$\rightarrow 18.75X+3.75Y-412.5=0 \quad (7)$

Cette expression (7)établit la relation entre l'abscisse et l'ordonnée des points d'intersection des 2 circonférences ; exprimons alors, à partir de cette expression (7), l'ordonnée en fonction de l'abscisse : $\quad Y=110-5X \quad (8)$

Reportons alors cette expression de Y dans (5)pour déterminer les abscisses de $T_6^{'}$ et $T_4^{'}$:

$$X^2+\left(110-5X\right)^2-60X-40\left(110-5X\right)+1075=0$$

$$\rightarrow \quad 26X^2-960X+8775=0 \quad \rightarrow \quad X=+20.285929 \quad \text{et} \quad X=+26.814263$$

Les équations des plans $\boldsymbol{\tau_2}$ et $\boldsymbol{\tau_3}$, passant respectivement par $T_4^{'}$ et par I_2 et par $T_6^{'}$ et par I_2, sont déduites de ces couples $\left(X,Y\right)$:

$$Y-8.570355=\frac{8.570355-16.25}{20.285929-11.25}\left(X-20.285929\right)$$

$$Y-26.814263=\frac{26.814263-16.25}{16.637148-11.25}\left(X-16.637148\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} Y=-0.8499X+25.8114 & \left(\text{Plan } \tau_2\right) \\ Y=+1.9610X-5.8114 & \left(\text{Plan } \tau_3\right) \end{array}}$$

3ème méthode

Cette 3ème méthode est une variante de la 2èmeméthode, en ce sens que cette 3ème méthode calcule encore les points I_1 et I_2, exactement comme dans la 2ème méthode.

Par contre, le calcul des équations des plans s'opère autrement que dans la 2ème méthode, en s'intéressant aux pentes des droites $\tau_1^{'}$, $\tau_2^{'}$ et $\tau_3^{'}$. Ses développements sont donc une application de la trigonométrie.

La pente de la droite des centres $I_1 - O_1^{'} - I_2 - O_2^{'}$ est directement calculable en considérant, soit les coordonnées de $O_1^{'}$ et $O_2^{'}$, soit les coordonnées de I_1 et I_2.

Considérons celles de $O_1^{'}$ et $O_2^{'}$:

$$\text{Pente de la droite des centres } = \frac{20-15}{30-5} = 0.2$$

L'angle que forme cette droite avec l'axe OX vaut donc : $\arctan 0.2 = +11.309932°$

L'angle formé par cette droite des centres avec $I_1T_2^{'}$ est calculable dans le triangle rectangle $I_1\mathrm{T}_2^{'}\mathrm{O}_2^{'}$ et sa valeur s'établit selon : $\arcsin \frac{T_2^{'}O_2^{'}}{I_1O_2^{'}}$

Or, $$I_1\mathrm{O}_2^{'} = \sqrt{(30+7.5)^2 + (20-12.5)^2} = 38.24646$$

Donc : $$\arcsin \frac{T_2^{'}O_2^{'}}{I_1O_2^{'}} = \arcsin \frac{15}{38.242646} = +23.093470°$$

Par suite, l'angle formé par la droite $I_1T_2^{'}$ avec l'axe OX vaut :

$$+\ 11.309932\ ° \ +23.093470\ ° \ = \ \mathbf{+\,34.403402\,°}$$

L'angle formé par la droite des centres avec la droite $I_2T_4^{'}$ se calcule dans le triangle rectangle $I_2\mathrm{O}_2^{'}T_4^{'}$ et sa valeur s'établit selon : $\arcsin \frac{T_4^{'}O_2^{'}}{I_2O_2^{'}}$

Or, $$I_2O_2^{'} = \sqrt{(30-11.25)^2 + (20-16.25)^2} = 19.121323$$

Donc : $$\arcsin \frac{T_4^{'}O_2^{'}}{I_2O_2^{'}} = \arcsin \frac{15}{19.121323} = 51.671183\ °$$

Par suite, l'angle formé par la droite $I_2T_4^{'}$ avec l'axe OX vaut :

$$+\ 11.309932\ ° - 51.671183\ ° \ = \mathbf{-40.\,361251\,°}$$

L'angle formé par la droite des centres avec la droite $I_2T_6^{'}$ se calcule dans le triangle rectangle $I_2O_2^{'}T_6^{'}$ et sa valeur s'établit selon : $\arcsin \frac{T_6^{'}O_2^{'}}{I_2O_2^{'}}$

Donc : $$\arcsin \frac{T_6^{'}O_2^{'}}{I_2O_2^{'}} = \arcsin \frac{15}{19.121323} = 51.671183\ °$$

Par suite, l'angle formé par la droite $I_2T_6^{'}$ avec l'axe OX vaut :

$$+\ 11.309932\ ° \ +51.671183\ ° \ = \ \mathbf{+\,62.\,981115\,°}$$

Les équations des droites $\tau_1^{'}$, $\tau_2^{'}$ et $\tau_3^{'}$ s'établit sur base des angles qui viennent d'être calculés et du fait que ces droites passent par I_1 $\left(\text{pour } \tau_1^{'}\right)$ et par I_2 $\left(\text{pour } \tau_2^{'} \text{ et } \tau_3^{'}\right)$:

Droite $\tau_1^{'}$: $\quad Y-12.5 = \tan +34.4033402°\left(X+7.5\right) \rightarrow Y=+0.6848X+17.6360$

Droite $\tau_2^{'}$: $\quad Y-16.25 = \tan +40.361251°\left(X-11.25\right) \rightarrow Y=-0.8499X+25.8114$

Droite $\tau_3^{'}$: $\quad Y-16.25 = \tan +62.981115°\left(X-11.25\right) \rightarrow Y=+1.9610X-5.8114$

$\rightarrow$ Les équations cartésiennes des 3 plans tangents à considérer sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{ll} Y=+0.6848X+17.6360 & \left(\text{Plan } \tau_1\right) \\ Y=-0.8499X+25.8114 & \left(\text{Plan } \tau_2\right) \\ Y=+1.9610X-5.8114 & \left(\text{Plan } \tau_3\right) \end{array}}$$

Remarques à propos d'autres méthodes possibles

Il est également possible, *en principe*, de travailler selon les 2 autres méthodes suivantes :

a) Exprimer qu'unedroite d'équation $Y=aX+b$ est simultanément tangente aux 2 cercles en exprimant dans chaque cas les équations aux abscisses et en exprimant dans chaque cas, par la nullité du résultant, que l'intersection correspond à un point double : on obtient ainsi 2 relations du second degré en a et b, mais la résolution du système est pour le moins compliquée : cette méthode est donc à éviter.

b) En appelant $\left(s,t\right)$ et $\left(u,v\right)$ les coordonnées inconnues des points de contact , il faut alors d'abord exprimer que ces points decontact appartiennent respectivement à l'une et à l'autre des circonférences,ce qui conduit à 2 équations du second degré en $\left(s,t\right)$ et en$\left(u,v\right)$.
On calcule ensuite les équations des tangentes aux circonférences en ces points, puis on exprime quec es 2 droites sont confondues, c.à.d.qu'elles présentent la même pente, ce qui conduit à nouveau à une équation du second degré $\left(\text{les termes du second degré étant } v \times s \text{ et } u \times t\right)$.
Il faut alors résoudre un système de 3 équations du second degré :cette méthode est donc aussi à éviter.

2°. Proposer des équations paramétriques pour ces 3 plans.

Nous considérerons, dans chacun de ces plans, 2 vecteurs : le 1er $\overrightarrow{V_1}$, sera vertical et de paramètres directeurs $\left(0,0,1\right)$[les 3 plans sont en effet tous verticaux] et le second, $\overrightarrow{V_2}$ sera aligné sur l'intersection du plan avec OXY.
Nous appellerons le vecteur $\overrightarrow{V_3}$ joignant l'origine O du système d'axes au point d'intersection de la droite d'intersection du plan avec OY.
la Fonction Vectorielle de chacun de ces plans s'établit alors selon :

$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V_3}+\lambda\overrightarrow{V_1}+\mu\overrightarrow{V_2} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont les paramètres pris en compte}$$

A. Plan τ_1 d'équation cartésienne : $Y=+0.6848X+17.6360$ qui est aussi l'équation cartésienne, en 2D rapporté à OXY, de la droite d'intersection du plan avec OXY.

Du coefficient angulaire + 0.6848 peut être tiré l'angle que fait cette droite avec OX :

$$\arctan 0.6848=+34.403°$$

Les composantes d'un vecteur unitaire aligné sur cette droite sont ainsi, en 3D :

Selon X : $\cos 34.403°=+0.825$

Selon Y : $\sin\ 34.403°=+0.565$

Selon Z : 0

Du terme indépendant de l'équation cartésienne peuvent être tirées les cordonnées du point où le plan coupe l'axe OY : $(0,+17.6360,0)$

En synthèse : $\vec{V_1}(0,01)$ $\quad\vec{V_2}(0.825,0.565,0)$ $\quad\vec{V_3}(0,17.6360,0)$

Et donc : $\vec{V}\left[(0+0\lambda+0.825\mu),(17.6360+0\lambda+0.562\mu),(0+1\lambda+0\mu)\right]$

Des équations paramétriques du plan τ_1 sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned}X&=0+0\lambda+0.825\mu\\Y&=17.6360+0\lambda+0.562\mu\\Z&=0+1\lambda+0\mu\end{aligned}}$$

B. Plan τ_2 d'équation cartésienne: $Y=-0.8499X+25.8114$ qui est aussi l'équation cartésienne, en 2D rapporté à OXY, de la droite d'intersection du plan avec OXY.

Du coefficient angulaire – 0.8499 peut être tiré l'angle que fait cette droite avec OX :

$$\arctan-0.8499=-40.3612°$$

Les composantes d'un vecteur unitaire aligné sur cette droite sontainsi, en 3D :

Selon X : $\cos-40.3612°=+0.762$

Selon Y : $\sin-40.3612°=-0.648$

Selon Z : 0

Du terme indépendant de l'équation cartésienne peuvent être tirées les cordonnées du point où le plan coupe l'axe OY : $(0,+25.8114,0)$

En synthèse: $\vec{V_1}(0,0,1)$ $\quad\vec{V_2}(0.762,-0.648,0)$ $\quad\vec{V_3}(0,25.8114,0)$

Et donc: $\vec{V}\left[(0,+0\lambda+0.762\mu),(25.8114+0\lambda-0.648\mu),(0+1\lambda+0\mu)\right]$

Des équations paramétriques du plan τ_2 sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned}X&=0+0\lambda+0.762\mu\\Y&=25.8114+0\lambda-0.648\mu\\Z&=0+1\lambda+0\mu\end{aligned}}$$

C. Plan τ_3 d'équation cartésienne : $Y = +1.9610X - 5.8113$ qui est aussi l'équation cartésienne, en 2 D rapporté à OXY, de la droite d'intersection du plan avec OXY.

Du coefficient angulaire +1.9610 peut être tiré l'angle que fait cette droite avec OX :

$$\arctan +1.9610 = +62.981°$$

Les composantes d'un vecteur unitaire aligné sont ainsi, en 3D:

Selon $X : \cos +62.981° = 0.454$ Selon $Y : \sin +62.981° = +0.891$ Selon $Z : 0$

Du terme indépendant de l'équation cartésienne peuvent être tirées les coordonnées du point où le plan coupe l'axe OY : $(0, -5.8113, 0)$

En synthèse : $\vec{V_1}(0;0;1)$ $\vec{V_2}(0.454, 0.891, 0)$ $\vec{V_3}(0, -5.8113, 0)$

Et donc : $\vec{V}\left[(0+0\lambda+0.454\mu),(-5.8113+0\lambda+0.891\mu),(0+1\lambda+0\mu)\right]$

Des équations paramètriques du plan τ_3 sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned} X &= 0+0\lambda+0.454\mu \\ Y &= -5.8113+0\lambda+0.891\mu \\ Z &= 0+1\lambda+0\mu \end{aligned}}$$

EXGAE62 –Polytech, UMONS, Mons – Juillet 2006 – Série C

Dans le système orthonormé *OXYZ*, considérons 2 droites *a* et *b*.
Les équations cartésiennes de la droite *a* sont : [$X = 10$] , [($Y - 10$) $- Z = 0$].
Les équations cartésiennes de la droite *b* sont : [$X = 20$], [$Y = 15$]

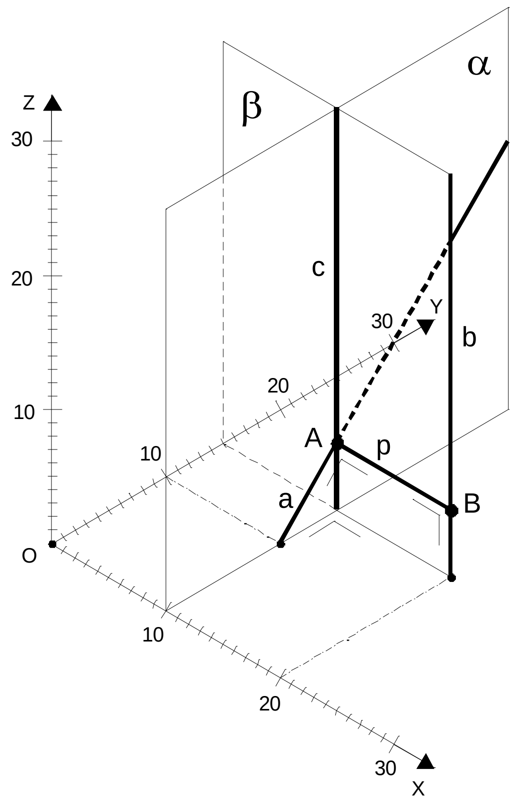
1°. Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, établir comment construire la droite *p*, en appui sur *a* et *b* et simultanément perpendiculaire à ces 2 droites *a* et *b*.

2°. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer des équations paramétriques de la droite *p*.

3°. Considérons à nouveau la droite *a*. Une droite *d* est donnée par les 2 points *E* et *F* de coordonnées *E* (25, 5, 20) et *F* (15, 30, 0).

- A. Etablir des équations paramétriques des droites *a* et *d* et établir leurs paramètres directeurs
- B. Déterminer des équations paramétriques de la droite *q* qui est en appui sur *a* et *d* et qui est simultanément perpendiculaire à ces 2 droites *a* et *d*.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.
http://ressourcescms.fpms.ac.be/DocuWebFpms/Forms/AllItems.aspx?RootFolder=%2fDocuWebFpms%2fDossier%20admission&View={0F3B00E4-EA3B-4EF2-B23C-446AB398F606}



1°

La droite p est perpendiculaire à la droite a qui est contenue dans le plan α d'équation [$X = 10$] :
ce plan α est un plan vertical, parallèle à OYZ.
La droite p est aussi perpendiculaire à la droite b qui est une droite verticale.
Par le point A de contact entre a et p, il est donc possible de construire une droite c parallèle à la droite verticale : cette droite c appartient entièrement au plan vertical α.
Comme p est perpendiculaire à b, p est aussi perpendiculaire à c, parallèle à b.
Comme la droite p est ainsi perpendiculaire aux 2 droites a et c du plan α, cette droite p est perpendiculaire au plan α.
Les 2 droites p et b, sécantes en B, constituent alors un plan β qui est simultanément :

- perpendiculaire au plan α puisqu'il contient la perpendiculaire p au plan α
- vertical puisqu'il contient la droite verticale b

Il suffit donc, pour opérer la construction de la droite c, de mener par la droite b un plan vertical α perpendiculaire au plan donné α et de déterminer l'intersection A de ce plan β avec la droite donnée a.
Pour déterminer le point B, il suffit alors de mener, par A, une horizontale vers la droite b ou bien de mener par A un plan horizontal et d'en rechercher l'intersection B avec la droite B.

2°

Le plan β étant vertical et perpendiculaire au plan α d'équation [$X = 10$] parallèle au plan OYZ est donc parallèle au plan OXZ.
Son équation est : $Y = 15$
Les coordonnées du point A d'intersection entre ce plan β et la droite a se déterminent en considérant le système des 2 équations cartésiennes de la droite a, auxquelles est adjoint l'équation cartésienne du plan β :

$$\left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} X = 10 \\ (Y - 10) - Z = 0 \end{array} \right. \\ Y = 15 \end{array} \right.$$

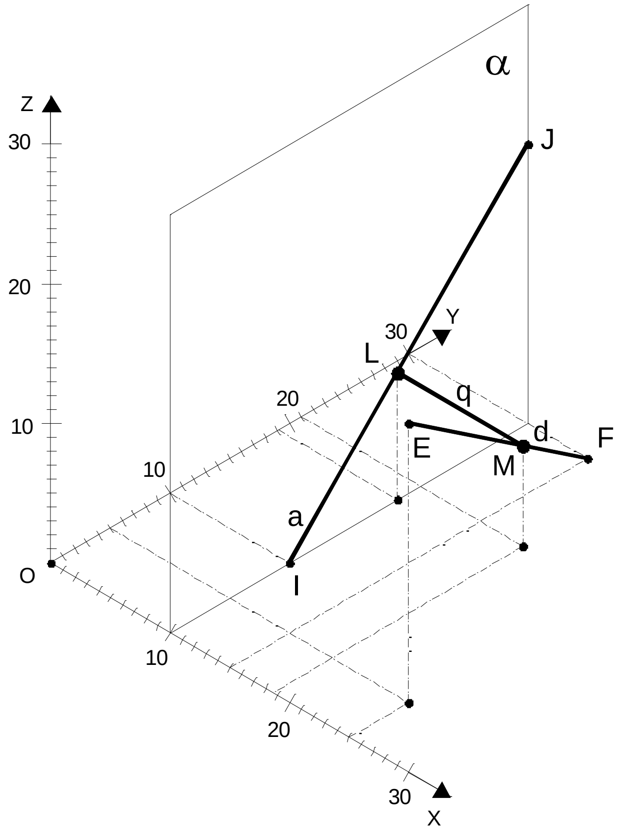
Et donc : $A\,(10, 15, 5)$

Comme AB est une horizontale, la cote Z du point B = la cote $Z = 5$ du point A.
Comme, par ailleurs, les équations cartésiennes de B sont :

$$X = 20$$
$$Y = 15$$

les coordonnées du point B en sont immédiatement déduites : $B(20, 15, 5)$
Les équations paramétriques de la droite $p = AB$ se déduisent des coordonnées à présent connues de A et de B :

$$\begin{cases} X = 10 + (20 - 10)\rho \\ Y = 15 + (15 - 15)\rho \\ Z = 5 + (5 - 5)\rho \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} X = 10 + 10\rho \\ Y = 15 \\ Z = 15 \end{cases}} \quad \text{où } \rho = \text{ paramètre}$$



3°

A. La droite a passe par le point I (intersection de a avec OXY) de coordonnées I (10, 10, 0) et par le pont J de coordonnées $J(10,30,20)$.

Les équations paramétriques de la droite a sont ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} X = 10 + 0\lambda \\ Y = 10 + 20\lambda \\ Z = 0 + 20\lambda \end{cases}} \qquad \text{où } \lambda = \text{ paramètre}$$

Les paramètres directeurs de cette droite a sont : $\boxed{[\ 0,\ 20,\ 20\ ]}$

La droite d passe par les points $E(25,5,20)$ et $F(15,30,0)$.

Les équations paramétriques de la droite d sont ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} X = 25 - 10\mu \\ Y = 5 + 25\mu \\ Z = 20 - 20\mu \end{cases}} \qquad \text{où } \mu = \text{ paramètre}$$

Les paramètres directeurs de cette droite d sont : $\boxed{[-10,\ 25,\ -20]}$

B. Soit L et M les points d'appui de la perpendiculaire commune q aux 2 droites a et d sur, respectivement, a et d.
Il y correspond des valeurs particulières λ_L et μ_M des paramètres λ et μ, tels que :

$$\begin{cases} X_L = 10 + 0\lambda_L \\ Y_L = 10 + 20\lambda_L \\ Z_L = 0 + 20\lambda_L \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} X_M = 25 - 10\mu_M \\ Y_M = 5 + 25\mu_M \\ Z_M = 20 - 20\mu_M \end{cases} \quad (2)$$

Les paramètres directeurs de la perpendiculaire commune $q = LM$ sont donc :

$$[(15 - 10\mu_M)\ ,\ (-5 + 25\mu_M - 20\lambda_L)\ ,\ (20 - 20\mu_M - 20\lambda_L)]$$

Si 2 vecteurs (caractérisés par leurs composantes, soit aussi par les paramètres directeurs des droites qu'ils portent) sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul : la somme des produits de leurs composantes est donc nulle. Appliquons ce principe 2 fois :

Exprimons d'abord la perpendicularité de $a[0, 20, 20]$
et de $q[(15 - 10\mu_M), (-5 + 25\mu_M - 20\lambda_L), (20 - 20\mu_M - 20\lambda_L)]$:

$$20(-5 + 25\mu_M - 20\mu_L) + 20(20 - 20\mu_M - 20\lambda_L) = 0 \rightarrow \ + \mu_M - 8\lambda_L + 3 = 0 \qquad (3)$$

Exprimons ensuite la perpendicularité de $d[-10, 25, -20]$
et de q $[(15 - 10\mu_M), (-5 + 25\mu_M - 20\lambda_L), (20 - 20\mu_M - 20\lambda_L)]$:

$$-10(15 - 10\mu_M) + 25(-5 + 25\mu_M - 20\lambda_L) - 20(20 - 20\mu_M - 20\lambda_L) = 0$$

$$\rightarrow \qquad 45\mu_M - 4\lambda_L - 27 = 0 \quad (4)$$

De (3) et (4) $\rightarrow$ $\boxed{\lambda_L = +0.4551}$ $\boxed{\mu_M = +0.6404}$ (5)

(5) dans (1) et (2) :

Coordonnées du point d'appui L : $\boxed{\begin{cases} X_L = 10 + 0 & = 10 \\ Y_L = 10 + 20 \times 0.4551 & = 19.102 \\ Z_L = 0 + 20 \times 0.4551 & = 9.102 \end{cases}}$

Coordonnées du point d'appui M : $\boxed{\begin{cases} X_M = 25 - 10 \times 0.6404 = 18.596 \\ Y_M = 5 + 25 \times 0.6404 = 21.010 \\ Z_M = 20 - 20 \times 0.6404 = 7.192 \end{cases}}$

Des équations paramétriques de la droite q sont donc : $\boxed{\begin{cases} X = 10 & + 8.596\,\delta \\ Y = 19.102 & + 1.908\,\delta \\ Z = 9.102 & - 1.910\,\delta \end{cases}}$

EXGAE63 - Mons – Juillet 2006 – Série D

Dans le système orthonormé *OXYZ*, considérons une sphère de centre *C* dont les coordonnées sont *C* (20, 30, 20) et dont le rayon $R = 10$.
Par le point *A* de coordonnées *A* (10, 10, 0), menons l'ensemble des tangentes t_i à la sphère : elles constituent un cône de révolution autour de l'axe *AC* ; la base de ce cône est le petit cercle défini sur la sphère comme l'ensemble des points de contact T_i des tangentes à la sphère.

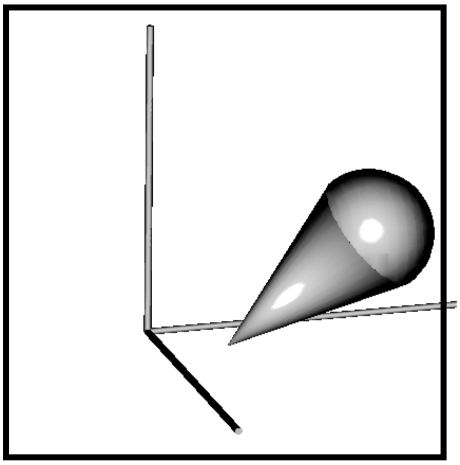
1°. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer les caractéristiques de ce cône (rayon du cercle de base et hauteur du cône ?) en réfléchissant au fait que, dans certains cas, un problème de géométrie spatiale peut se ramener à un problème de géométrie plane. Déterminer aussi l'équation cartésienne du plan β contenant la base de ce cône et les coordonnées (*X, Y, Z*) du centre *M* du cercle de base.

2°. Démontrer, par les méthodes de la Géométrie Synthétique, qu'un cône tangent à une sphère de rayon *R* est tel qu'il existe entre le rayon *r* de sa base, soit le cercle constitué des points de contact des tangentes à la sphère issues du sommet de ce cône, le rayon *R* de la sphère et la hauteur *h* du cône, une relation :

$$\boxed{h = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}}$$

Contrôler ensuite qu'elle est vérifiée par les valeurs numériques déterminées en question 1°.

3°. Que vaut le rapport du volume du cône et du volume de la sphère ?



1°. **Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer les caractéristiques de ce cône (rayon du cercle de base et hauteur du cône ?) en réfléchissant au fait que, dans certains cas, un problème de géométrie spatiale peut se ramener à un problème de géométrie plane. Déterminer aussi l'équation cartésienne du plan β contenant la base de ce cône et les coordonnées (X, Y, Z) du centre M du cercle de base.**

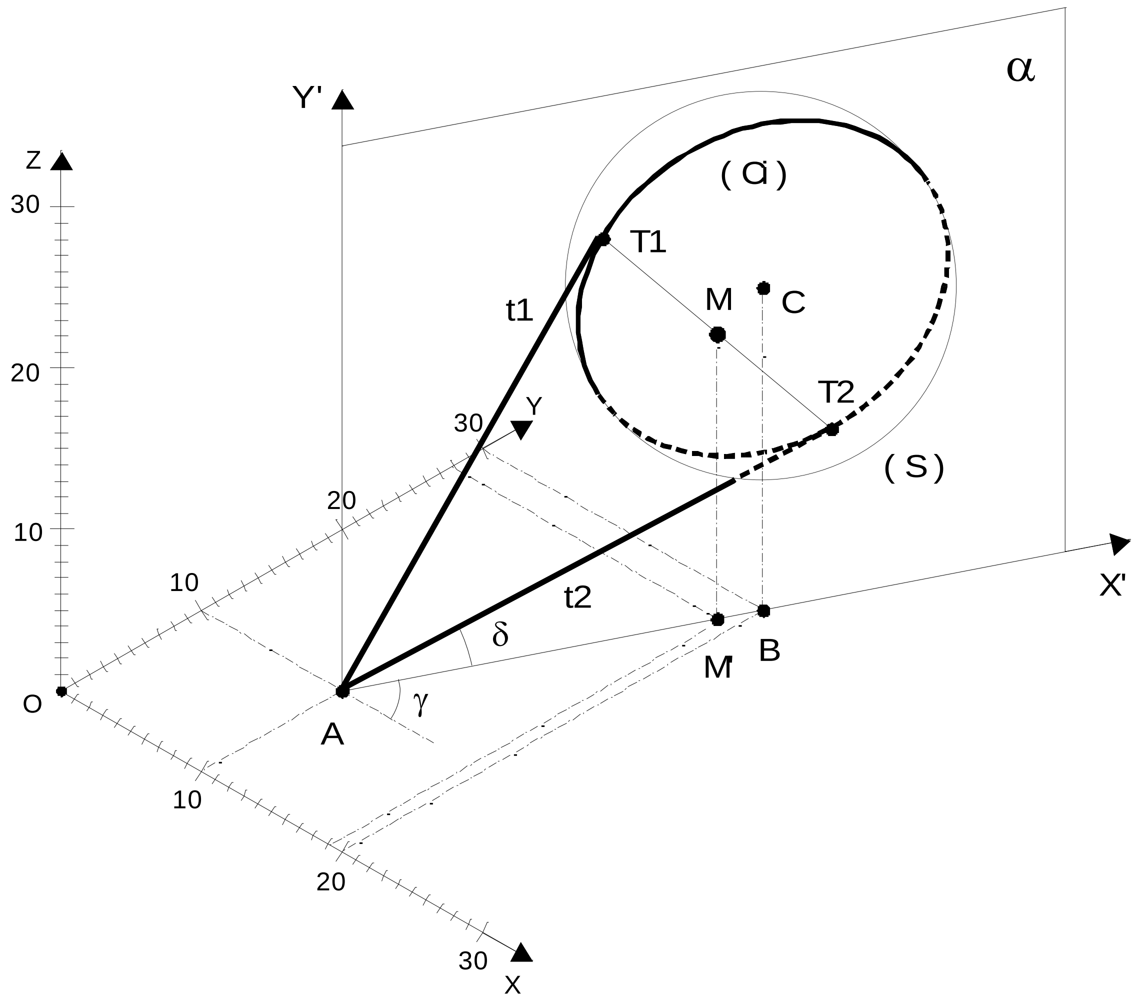
1°

Coupons la sphère par le plan vertical α passant par les points A et C (et aussi par la projection orthogonale B de C sur OXY).

Ce plan, passant par le centre C de la sphère, la coupe selon un "*Grand Cercle*" (C_i) de rayon égal à celui de la sphère et dont le centre est le centre C de la sphère.

Il suffira donc d'étudier le problème de la détermination des points de contact T_1 et T_2 des 2 tangentes t_1 et t_2 à la sphère appartenant au plan α dans ce plan vertical α, en le rapportant à un nouveau système orthonormé $AX'Y'$, l'axe AX' étant aligné sur AB et l'axe AY' étant vertical.

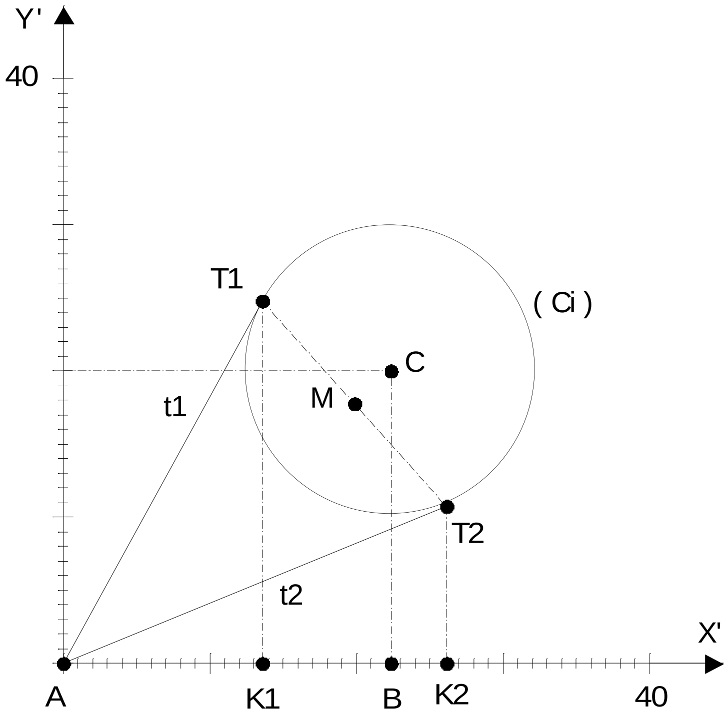
Connaissant en effet les 2 points T_1 et T_2 et sachant que le cône est symétrique de révolution autour de AC, son cercle de base aura comme diamètre T_1T_2.



Calculons alors les coordonnées de C dans $AX'Y'$: $X'_C = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 22.361$

et, bien entendu : $Y'_C = 20$.

Il est évident aussi que $X'_A = 0$ et $Y'_A = 0$.


Y'
40
T1
(Ci)
C
M
t1
T2
t2
X'
A
K1
B
K2
40

<u>1ère méthode</u> :

Les 2 tangentes t_1 et t_2 sont des droites passant par l'origine A du système d'axes $AX'Y'$; leur équation générale se présente donc comme suit : $Y' = a\,X'$ (1)

L'équation de la circonférence (C_i) est :

$$(X'-22.361)^2 + (Y'-20)^2 = 100 \qquad (2)$$

Déterminons les abscisses des intersections de la droite et de la circonférence en remplaçant Y' par son expression (1) dans (2) :

$$(X'-22.361)^2 + (a\,X'-20)^2 = 100$$

$$\rightarrow \quad (1+a^2)\,X'^2 - (44.722 + 40\,a)\,X' + 800 = 0 \qquad (3)$$

Comme les droites t_1 et t_2 considérées sont des tangentes, l'équation (3) du second degré en X doit présenter 2 solutions confondues : il faut donc que son réalisant ρ soit nul.

$$\rightarrow \quad \rho = (44.722 + 40\,a)^2 - 3200\,(1+a^2) = 0 \qquad (4)$$

$$\rightarrow \quad 1600\,a^2 - 3577.760\,a + 1199.943 = 0 \qquad (5)$$

Les 2 solutions pour a, c.à.d. les coefficients angulaires des 2 tangentes t_1 et t_2, sont ainsi :

$$a = +\,1.8252 \qquad \text{et} \qquad a = +\,0.4109$$

En introduisant ces valeurs dans (3) et en tenant compte de la nullité du réalisant, il en résulte les valeurs des abscisses des points de contact T_1 et T_2 :

Pour $a = +1.8252$ $\qquad X'_{T1} = \dfrac{44.722 + (40 \times 1.8252)}{2 \times (1 + 1.8252^2)} = +13.590$

Pour $a = +0.4109$ $\qquad X'_{T2} = \dfrac{44.722 + (40 \times 0.4109)}{2 \times (1 + 0.4109^2)} = +\,26.162$

Les valeurs correspondantes des ordonnées Y' des points T_1 et T_2 s'obtiennent en remplaçant, dans (1), X' par les valeurs qui viennent d'être déterminées :

$$Y'_{T1} = +1.8252 \times 13.590 = +24.804 \qquad \text{et} \qquad Y'_{T2} = +0.4109 \times 26.162 = +10.750$$

Ainsi, en synthèse de cette étude <u>dans $AX'Y'$</u> :

$$\boxed{\begin{cases} T_1\left(+13.590, +24.804\right) \\ T_2\left(+26.162, +10.750\right) \end{cases}}$$

Le diamètre du cercle de base du cône est la longueur T_1T_2 :

$$\boxed{T_1T_2 = ((26.162 - 13.590)^2 + (10.750 - 24.804)^2)^{0.5} = 18.857}$$

Les coordonnées du centre M du cercle de base, milieu de T_1T_2, exprimées dans $AX'Y'$ sont :

$$\begin{cases} X'_M = \dfrac{13.590 + 26.162}{2} = +19.876 \\ Y'_M = \dfrac{24.804 + 10.750}{2} = +17.778 \end{cases}$$

La hauteur du cône est le segment AM :

$$\boxed{AM = ((19.876 - 0)^2 + (17.777 - 0)^2)^{0.5} = 26.666}$$

Les coordonnées du centre M du cercle de base, exprimées cette fois dans OXYZ, s'obtiennent comme suit :

Le coefficient angulaire de la droite $AB = \dfrac{30-10}{20-10} = 2$

Donc, l'angle γ que fait cette droite AB avec OX vaut : γ = arc tg 2 = 63.435°

Par suite, l'angle δ que fait cette droite AB avec l'axe OY vaut : $\delta = 90° - 63.435° = 26.565°$

La longueur de la projection AM' de AM sur OXY n'est autre que $X'_M = 19.876$

Donc : $$\boxed{\begin{cases} X_M = X_A + AM' \sin 26.565° & = +18.889 \\ Y_M = Y_A + AM' \cos 26.565° & = +27.778 \\ Z_M = Y'_M & = +17.778 \end{cases}}$$

L'équation cartésienne du plan β contenant la base du cône se détermine ainsi :

Les paramètres directeurs de AM, perpendiculaire à ce plan β, sont :

$$[(18.889 - 10), (27.778 - 10), (17.777 - 0)] \quad \rightarrow \quad [8.889, 17.778, 17.777]$$

L'équation cartésienne du plan β s'écrit donc :

$$8.889\,X + 17.778\,Y + 17.777\,Z - k = 0$$

Le terme indépendant k résulte du fait que ce plan β passe par le point M de coordonnées $M(18.889, 27.778, 17.777)$ et donc :

$$k = (8.889 \times 18.889) + (17.778 \times 27.778) + (17.777 \times 17.777) = 977.763$$

Par suite, l'équation recherchée est : $8.889\,X + 17.778\,Y + 17.778\,Z - 977.763 = 0$

ou $$\boxed{X + 2\,Y + 2\,Z - 110 = 0}$$

Variante pour le calcul des coordonnées de M et de l'équation du plan β

La droite AC contient le point M.

Or, les paramètres directeurs de $AC[A(10,10,0)$ et $C(20,30,20)]$ sont $(20-10),(30-10)$ et $(20-0)$, soit $[10,20,20]$.

L'équation cartésienne du plan β en est déduite : $10\ X+20\ Y+20\ Z+k=0$

Les coordonnées de M peuvent aussi en être déduites sous une forme paramétrique :

$X_M=10+10\ t\ Y_M=10+20\ t$ $Z_M=0+20\ t$ où $t=$ paramètre

Et donc $|\overrightarrow{AM}|=[((10+10\ t)-10)^2+((10+20\ t)-10)^2+(20\ t-0)^2]^{0.5}=30\ t$

Or, $\overline{AM}\ |\ =\ 26.666$ (cf. calcul précédent de $|\overline{AM}|$).

Donc : $t=\dfrac{26.666}{30}=0.8889$

Par suite, les coordonnées de M sont :

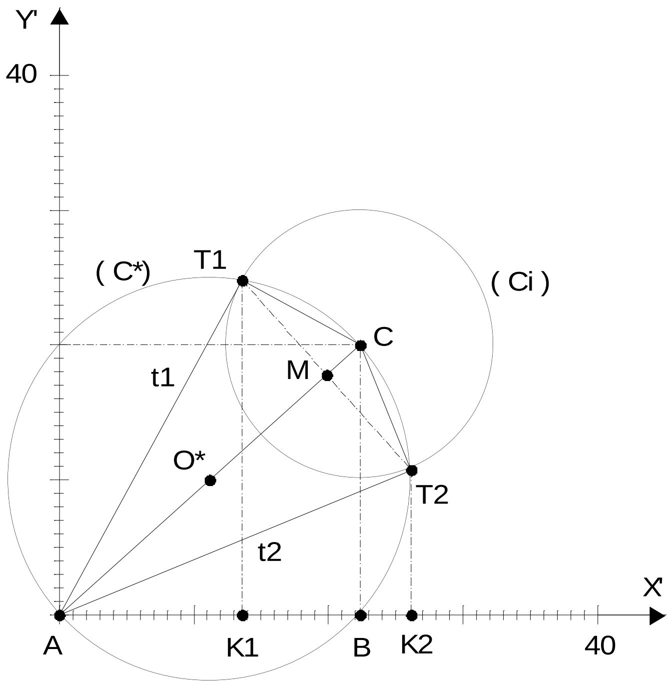
$$\begin{cases} X_M=10+10\times 0.8889=18.889 \\ Y_M=10+20\times 0.8889=27.778 \\ Z_M=0+20\times 0.8889=17.778 \end{cases}$$

Le plan β passe par ce point M et donc :

$$(10\times 18.889)+(20\times 27.778)+(20\times 17.778)+k=0\rightarrow k=-1100$$

L'équation du plan β s'établit donc selon :

$$\boxed{X+2\ Y+2\ Z-110=0}$$



2ème méthode :

T_1 et T_2 sont les points d'intersection de la circonférence $(C*)$ de centre $O*$ (milieu de AC) et de rayon $O*A$ et de la circonférence (C_i) de centre $C\left(X_C^{'}=22.361 \text{ et } Y_C^{'}=20\right)$ et de rayon $R=10$.

(C_i): $\left(X'^2-44.722X'+500.014321\right)+\left(Y'^2-40Y'+400\right)-100=0$

ou $\quad X'^2+Y'^2-44.722X'-40Y'+800.014321=0 \qquad (1)$

$(C*)$: $\left(X'^2-22.361X'+125.003580\right)+\left(Y'^2-20Y'+100\right)-225.003580=0$

ou $\quad X'^2+Y'^2-22.361X'-20Y'=0 \qquad (2)$

$(2)-(1)$: $22.361X'+20Y'-800.014321=0 \rightarrow Y'=+40.00071605-1.11805X' \qquad (3)$

(3) dans (2) :

$$X'^2+\left(+40.00071605-1.11805X'\right)^2-22.361X'-20\left(+40.00071605-1.11805X'\right)=0$$

ou $\quad 2.250035802X'^2-89.4456012X'+800.0429640=0 \qquad (4)$

Résolvons cette équation du second degré :

$X_1^{'}=+26.16183387 \qquad X_2^{'}=+13.59113847$

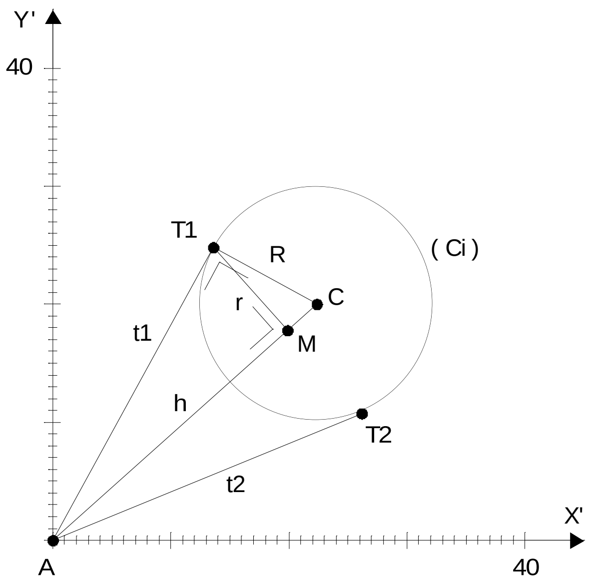
Et en introduisant ces valeurs dans (3) :

$Y_1^{'}=+10.75047769 \qquad Y_2^{'}=+24.80514368$

Les coordonnées de T_1 et T_2 sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1\left(+13.591,+24.805\right) \\ T_2\left(+26.162,+10.750\right) \end{array}}$$

La suite des calculs est alors identique à ce qui a été développe en 1ère méthode.



2°

Dans le triangle rectangle AT_1C, T_1M est la hauteur relative à l'hypoténuse. C'est aussi le rayon r du cercle de base du cône. Or, dans tout triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse y détermine 2 segments dont le produit vaut le carré de cette hauteur.

Donc : $AM \times MC = T_1M^2 \quad \rightarrow \quad h \times MC = r^2 \qquad (6)$

Or, dans le triangle rectangle T_1MC, la relation de Pythagore indique que :

$$MC = \sqrt{R^2 - r^2} \qquad (7)$$

De (6) et (7) $\rightarrow$ $\boxed{h = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}}$

Vérifions ensuite que cette relation est bien observée numériques déterminées en question 1°:

$$R = 10 \qquad r = \frac{T_1T_2}{2} = \frac{18.856}{2} = 9.428 \qquad h = AM = 26.666$$

$$\rightarrow \quad 26.666 = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{9.428^2}{\sqrt{10^2 - 9.428^2}} = 26.664 \approx 26.666$$

$\rightarrow$ **La relation est vérifiée** (à la précision des calculs près)

3°

Volume du cône $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 9.428^2 \times 26.666 = 2482.136$

Volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = 4188.790$

Le rapport $\ll \frac{Volume\ Sphère}{Volume\ Cône} \gg$ vaut donc : $\frac{4188.790}{2482.136} = \mathbf{1.688}$

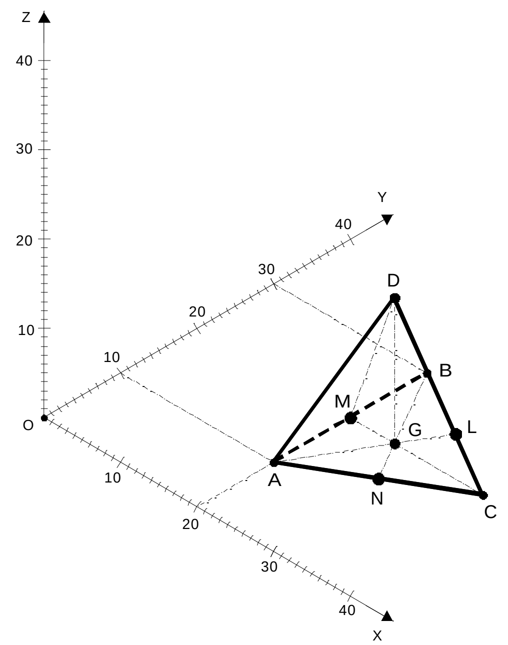
EXGAE64 - Mons – Juillet 2006 – Série E

Dans le système d'axes orthonormé *OXYZ*, soit un tétraèdre régulier *ABCD* dont la longueur des arêtes = 20.
Sa base *ABC* appartient au plan *OXY*. Son arête *AB* est parallèle à *OY*. Les coordonnées de son sommet *A* sont : *A* (20, 10, 0). L'abscisse de *C* est plus grande que les abscisses de *A* et de *B*.
L'ordonnée de *B* est plus grande que celle de *A*.

1°. Déterminer les coordonnées des sommets *B*, *C* et *D* de ce tétraèdre.

2°. Un second tétraèdre *A'B'C'D'* est créé en dupliquant *ABCD* par une rotation de + 45° autour de l'axe vertical passant par *D*. Déterminer les coordonnées des sommets *A', B', C', D'* de ce nouveau tétraèdre.

3°. Construire l'hexaèdre régulier *ABCDH* dont les 6 faces *ABC*, *ABD* et *BDC*, *ACH*, *ADH* et *CDH* sont isométriques et déterminer les coordonnées du nouveau sommet *H* dans *OXYZ*.



1°

Comme le tétraèdre est régulier, toutes ses arêtes sont égales et, en particulier, $AD = BD = CD$.
Le sommet D est donc équidistant de A et B : il appartient donc au plan médiateur de AB.
La médiatrice du côté AB du triangle ABC de base est donc contenue dans ce plan médiateur.
Par ailleurs, ce plan est vertical puisque le segment AB est horizontal.
La projection horizontale de D appartient donc à la médiatrice de AB dans ABC.

Le sommet D est aussi équidistant de B et C : il appartient donc au plan médiateur de BC.
La médiatrice du côté BC du triangle ABC de base est donc contenue dans ce plan médiateur.
Par ailleurs, ce plan est vertical puisque le segment AB est horizontal.
La projection horizontale de D appartient donc à la médiatrice de BC dans ABC.

Comme la projection horizontale du point D appartient simultanément aux 2 médiatrices précitées, cette projection horizontale du point D est le point d'intersection des médiatrices, soit le centre du cercle circonscrit au triangle de base ABC.

Comme toutes les arêtes de $ABCD$ sont égales, les côtés AB, BC et CA du triangle de base sont donc égales et, par suite, le triangle ABC est équilatéral.

Or, dans un triangle équilatéral, les médiatrices sont aussi les hauteurs, les bissectrices et les **médianes**. Le centre du cercle circonscrit est donc aussi simultanément l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le **centre de gravité** G $($ « barycentre » $)$ du triangle ABC.

Donc, en synthèse, <u>la projection horizontale du somment D est le centre de gravité G du triangle de base ABC. Autrement dit, le sommet D se trouve sur la verticale passant par G.</u>

Ce centre de gravité G se trouve aux 2/3 $($comptés à partir d'un sommet$)$ de chacune des médianes. Comme l'arête AB est // à OY, que l'ordonnée de B est supérieur à celle de A et que les coordonnées de A sont $(20,\ 10,\ 0)$, les coordonnées de B sont : $B(20,\ 30,\ 0)$
et les coordonnées de son milieu M sont : $M\,(20,\ 20,\ 0)$.

La médiane CM est identique à la médiatrice issue de M : il s'agit donc, dans OXY, d'une droite perpendiculaire à AB et donc,comme AB est // à OY, d'une // à OX.
Donc, MC est une parallèle à OX.

Dans le triangle rectangle ACM : $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17.3205$

Donc, les coordonnées de C sont : $\boxed{C(37{,}3205, 20, 0)}$

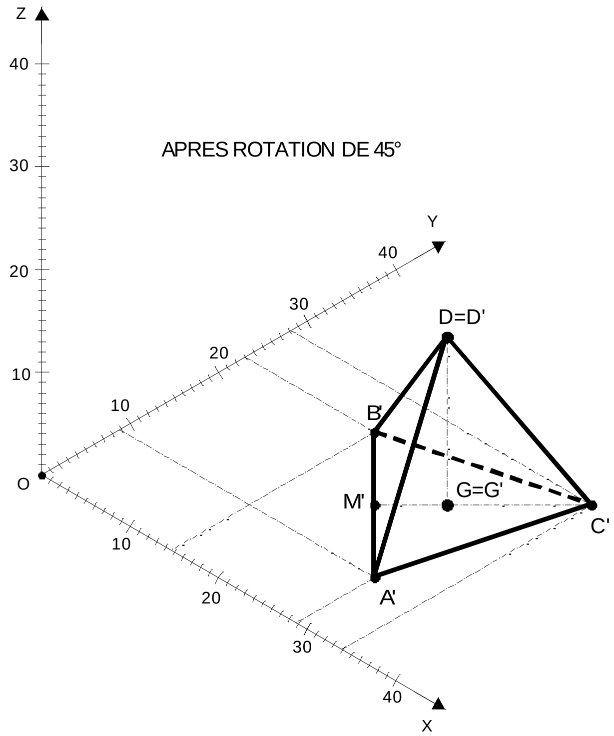
Le centre de gravité G se trouve aux 2/3de CM, comptés à partir de C ou, de façon équivalente, au 1/3 de CM, compté àpartir de M.

Donc, l'abscisse de G vaut : abscisse de G = abscisse de $M + \dfrac{CM}{3} = 20 + \dfrac{17.3205}{3} = 25.7735$

Par ailleurs, l'ordonnée de G est celle de M, soit $= 20$.
Le point G est la projection horizontale de D : donc, le triangle MGD est rectangle en G.
Les 2 triangles ABD et ABC sont équilatéraux et de mêmes longueurs des côtés $= 20$:
ils sont donc isométriques et, par suite, $MD = MC = 22.3607$.

Dans le triangle rectangle MGD: $GD = \sqrt{MD^2 - MG^2} = \sqrt{17.3205^5 - 5.7735^2} = 16.3299$

Donc, les coordonnées de D sont : $\boxed{D(25.7735, 20, 16.3299)}$

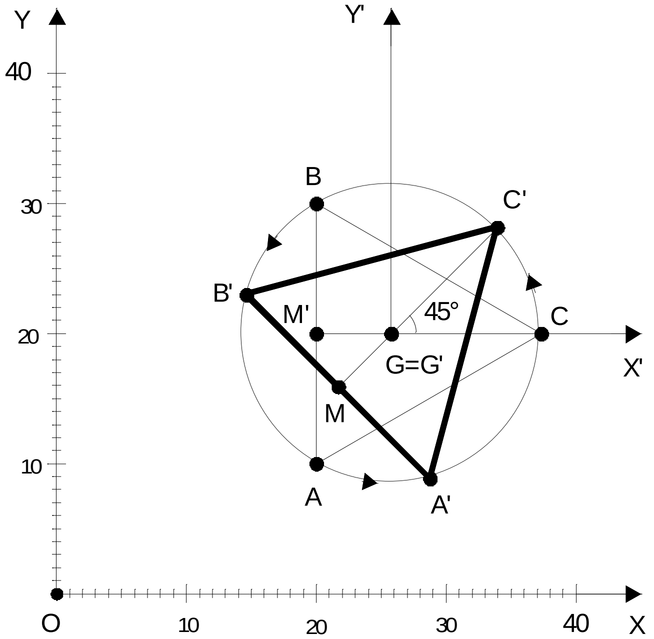


2°

Comme l'axe autour duquel la rotation de *ABCD* est imposée est vertical et passe par *D*, *D* tourne sur lui-même pendant cette rotation et, par suite, *D*' reste $\equiv$ *D*.

Seule, la base *ABC* du tétraèdre subit donc l'effet sensible de la rotation, les points *A*, *B*, *C* se déplaçant par rotation de 45° autour du point *G*, qui, lui-même, tourne sur lui-même et conserve donc sa position primitive dans *OXY*.

Les nouvelles positions *A*', *B*', *C*' de *A*, *B*, *C* peuvent donc être étudiées dans l'espace 2D référencé par *OXY* :



Les points $A,\ B$ et C se déplacent, pendant la rotation, sur la circonférence de centre G et de rayon $R = GC$:

$$R = GC = \frac{2}{3}CM = \frac{2\times 17.3205}{3} = 11.5470$$

Les coordonnées de G dans OXY sont : $G\ (25.7735,\ 20)$

Rapportons l'espace 2D à un nouveau système de référence $GX'Y'$ où GX' est // OX et où GY' est // OY etcalculons ce que deviennent les coordonnées des points $A,\ B$ et C dans ce nouveau système :

- Coordonnées de A dans OXY : $A(20,\ 10)$
- $\rightarrow$ Coordonnées de A dans $GX'Y'$: $A((20-25.7735),(10-20)) \rightarrow A(-5.7735,-10)$
- Coordonnées de B dans OXY : $B(20,30)$
- $\rightarrow$ Coordonnées de B dans $GX'Y'$: $B((20-25.7735),(30-20)) \rightarrow B(-5.7735,+10)$

Le coefficient angulaire de $GA = \dfrac{-10}{-5.7735}$=1.7321 $\rightarrow$ Angle de GA et de $GX' = 240°$

Le coefficient angulaire de $GB = \dfrac{+10}{-5.7735}$=-1.7321 $\rightarrow$ Angle de GA etde $GX' = 120°$

L'angle de GC et de GX' vaut évidemment 0.

L'angle de GA' avec GX' vaut donc : $240° + 45° = 285°$.

L'angle de GB' avec GX' vaut donc : $120° + 45° = 165°$.

L'angle de GC' avec GX' vaut donc : $0° + 45° = 45°$.

Les coordonnées de *A*' dans *GX'Y'* sont donc :

$$X'_{A'} = GC\cos 285° = 11.5470 \times \cos 285° = +2.9886$$

$$Y'_{A'} = GC\sin 285° = 11.5470 \times \sin 285° = -11.1535$$

Les coordonnées de B' dans $G'X'Y'$ sont donc :

$$X'_{B'} = GC\cos 165° = 11.5470 \times \cos 165° = -11.1535$$

$$Y'_{B'} = GC\cos 165° = 11.5470 \times \sin 165° = +2.9886$$

Les coordonnées de C' dans $CX'Y'$ sont donc :

$$X'_{C'} = GC\cos 45° = 11.5470 \times \cos 45° = +8.1650$$

$$Y'_{C'} = GC\sin 45° = 11.5470 \times \sin 45° = +8.1650$$

Les coordonnées de A' dans OXY sont donc :

$$X'_{A'} = +2.9886 + 25.7735 = +28.762$$

$$Y'_{A'} = -11.1535 + 20 \qquad = +8.847$$

Les coordonnées de B' dans OXY sont donc :

$$X'_{B'} = -11.1535 + 25.7735 = +14.620$$

$$Y'_{B'} = +2.9886 + 20 \qquad = +22.989$$

Les coordonnées de C' dans OXY sont donc :

$$X'_{C'} = +8.1650 + 25.7735 = +33.939$$

$$Y'_{C'} = +8.1650 + 20 \qquad = +28.165$$

En synthèse, les coordonnées des sommets A', B', C', D' du nouveau tétraèdre dans le système $OXYZ$ sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} A'(+28.792\ ,\quad +\ 8.847,\qquad 0\qquad\quad) \\ B'(+14.620\ ,\quad +22.989,\qquad 0\qquad\quad) \\ C'(+33.939\ ,\quad +28.165,\qquad 0\qquad\quad) \\ D'(+25.7735,\quad +20\qquad ,\quad +16,3299) \end{array}}$$

3°. **Construire l'hexaèdre régulier ABCDH dont les 6 faces ABC, ABD et BDC, ACH, ADH et CDH sont isométriques et déterminer les coordonnées du nouveau sommet H dans OXYZ.**

3°

Le nouveau sommet H est, tout simplement, le point symétrique de B par rapport au plan ACD.

Ce plan ACD a comme équation, sachant que $A(20,\ 10,\ 0), C(37.321,\ 20,\ 0)$ et $D(25.774,\ 20,\ 16.330)$:

<u>$1^{ère}$ méthode</u> (Vectorielle) :

Le vecteur Normal $\overrightarrow{N}$ au plan recherché est orthogonal aux vecteurs AC et AD, soit:

$$\overrightarrow{AC}\big((37.321-20),(20-10),0\big) \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{AC}(17.321,10,0)$$

et $$\overrightarrow{AD}\big((25.774-20),(20-10),(16.330-0)\big) \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{AD}(5.774,10,16.330)$$

Ce vecteur Normal $\overrightarrow{N}$ au plan recherché est donc parallèle au vecteur ≪ Produit Vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ≫:

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z}\\ 17.321 & 10 & 0\\ 5.774 & 10 & 16.330\end{vmatrix}=163.300\overrightarrow{u_x}-282.852\overrightarrow{u_y}+115.470\overrightarrow{u_z}$$

Les paramètres directeurs de ce vecteur $\overrightarrow{N}$ normal au plan β sont ainsi $(+163.300,-282.852,+115.470)$.

L'équation cartésienne du plan β peut donc s'écrire :

$$163.300X-282.852Y+115.470Z-k=0$$

Pour déterminer le terme indépendant k, il suffit de considérer le fait que ce plan passe par $A(20,10,0)$

$$\rightarrow k=163.300\times 20-282.852\times 10=+437.480$$

$$\rightarrow \text{ Equation du plan } ACD: \boxed{163.300X-282.852Y+115.470Z-437.480=0}$$

<u>$2^{ème}$ méthode</u>: espression du passage du plan par les 3 points connus A, C et D

$$\begin{vmatrix}X-20 & Y-10 & Z-0\\ 37.321-20 & 20-10 & 0-0\\ 25.774-20 & 20-10 & 16.330-0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-20 & Y-10 & Z\\ 17.321 & 10 & 0\\ 5.774 & 10 & 16.330\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow \quad 163.300(X-20)-282.852(Y-10)+115.470Z=0$$

$$\rightarrow \quad \text{Equation du plan } ACD: \boxed{163.300X-282.852Y+115.470Z-437.480=0}$$

Il esn résulte des équations paramètriques de la droite passantr par $B(20,30,0)$ et perpendiculaire à ce plan ACD, c'.à.d de la droite sur laquelle se situera le point H, symètrique de B par rapport au plan ACD:

$$\begin{cases}X=20+163.300\lambda\\ Y=30-282.852\lambda\\ Z=\ \ 0+115.470\lambda\end{cases} \qquad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre}$$

Le point d'intersection I de cette droite avec le plan ACD correspond à la valeur suivante du paramètre λ, obtenue en remplaçant X, Y et Z par leurs expressions paramètriques dans l'équation cartésienne du plan :

$$163.300(20+163.300\lambda)-282.852(30-285.852\lambda)+115.470(0+115.470\lambda)-437.480=0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda_I=0.04714}$$

Remarquons alors la signification du paramètre λ : il définit la position d'un point sur la droite passant par $B(20,30,0)$ et, à λ=0 correspond ce point $B,$ tandis que si $\lambda = 0.04714,$ alors, il y correspond le point I.

Comme le point H est symétrique de B par rapport à $ACD,$ la longueur BH est double de celle de BI et par suite :

$$\boxed{\lambda_H = 2\lambda_I = 2 \times 0.04714 = 0.09428}$$

Les coordonnées des points I et H résultent de l'introduction de ces valeurs particulières λ_I et λ_H de λ dans les équations paramètriques de la droite :

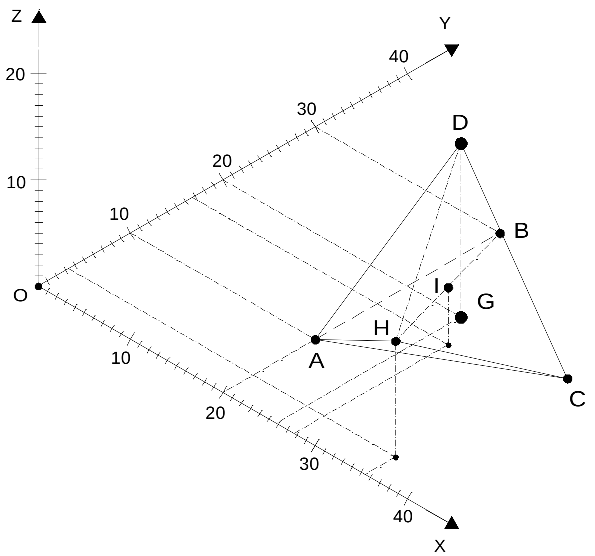
$$\boxed{\begin{cases} X_I = 20 + 163.300 \times 0.04714 = +27.698 \\ Y_I = 30 - 282.852 \times 0.04714 = +16.666 \\ Z_I = 0 + 115.470 \times 0.04714 = +5.443 \end{cases}} \text{ et } \boxed{\begin{cases} X_H = 20 + 163.300 \times 0.09428 = +35.396 \\ Y_H = 30 - 282.852 \times 0.09428 = +3.333 \\ Z_H = 0 + 115.470 \times 0.09428 = +10.887 \end{cases}}$$

Vérifions alors que les longueurs des arêtes HA, HC et HD valent bien 20, comme les arêtes BA, BC et $BD,$ ce qui prouvera que l'hexaèdre ainsi constitué grâce à ce point H est bien régulier:

$HA = \sqrt{(20-35.396)^2 + (10-3.333)^2 + (0-10.887)^2} = 20$ $\rightarrow$ vérifié

$HC = \sqrt{(37.3205-35.396)^2 + (20-3.333)^2 + (0-10.887)^2} = 20$ $\rightarrow$ vérifié

$HD = \sqrt{(25.7735-35.396)^2 + (20-3.333)^2 + (16.3299-10.887)^2} = 20$ $\rightarrow$ vérifié



Variante pour la solution de la question E- 3°

Variante pour la solution de la question 3°

H est le point symétrique de B par rapport au plan ACD.

En outre, compte tenu de l'isométrie des faces du polyèdre, HB coupe le plan ACD en son isobarycentre G (qui est d'ailleurs aussi son orthocentre et les centres des cercles inscrits et circonscrits puisque ACD est un triangleéquilatéral).

Les coordonnées de G se calculent selon :

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{X_A + X_C + X_D}{3} = \dfrac{20 + 37.3205 + 25.7735}{3} = 27.6980 \\ Y_G = \dfrac{Y_A + Y_C + Y_D}{3} = \dfrac{10 + 20 + 20}{3} = 16.6667 \\ Z_G = \dfrac{Z_A + Z_C + Z_D}{3} = \dfrac{0 + 0 + 16.3299}{3} = 5.4433 \end{cases}$$

Vectoriellement : $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{BG}$

Compte tenu des coordonnées connues de $B(20,30,0)$, les composantes de $\overrightarrow{BG}$ sont :

$$\overrightarrow{BG}\big((27.6980-20),(16.6667-30),(5.4433-0)\big) \to \overrightarrow{BG}(+7.6980,-13.3333,+5.4433)$$

Les composantes de $\overrightarrow{BH}$ sont donc :

$$\overrightarrow{BH}(+15.3960,-26.6666,+10.8866)$$

Vectoriellement : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH}$

Les coordonnées de H s'établissent donc selon :

$$\boxed{\begin{cases} X_H = 20 + 15.3960 = +35.3960 \\ Y_H = 30 - 26.6666 = +3.3334 \\ Z_H = 0 + 10.8866 = +10.8866 \end{cases}}$$

EXGAE65 - Mons – Juillet 2006 – Série F

Dans le système orthonormé *OXYZ*, soit 2 plans α et β verticaux.
Le plan α passe par l'axe *OZ* et par la droite *m* dont les équations paramétriques sont [$X = 5$, $Y = 30$, $Z = 5 + \lambda$].
Le plan β est perpendiculaire au plan α et passe par le point *B* de coordonnées *B* (30, 15, 15). Un point *A*, d'abscisse $XA = 4$ et de cote $ZA = 25$ appartient au plan α.

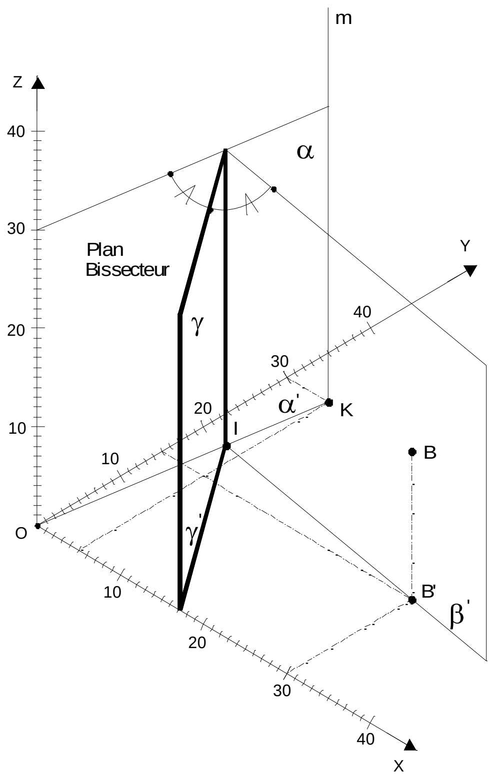
1°. Déterminer le point *C* qui est simultanément :

- équidistant des 2 plans α et β en précisant quelles sont les équations de ces plans ;
- équidistant des 2 points *A* et *B* ;
- à distance imposée $d = 25$ de l'origine *O* du système d'axes *OXYZ*.

A noter qu'il existe 2 entités géométriques distinctes qui sont les lieux possibles des points équidistants des 2 plans α et β : il sera fait choix ici de l'entité géométrique qui coupe l'axe *OX* selon une abscisse positive. De plus, le point *C* présentera une cote *Z* positive.

2°. A titre de contrôle des coordonnées du point *C*, trouvées à l'issue de la question 1°, calculer les distances de *C* à *A* et *B* et vérifier qu'elles sont égales entre elles, de *C* aux 2 plans α et β et vérifier qu'elles sont égales entre elles, de *C* à *O* et vérifier qu'elle est égale à 25.

3°. Soit 2 points *P* et *Q* appartenant à la droite *m* : *P* a comme cote $Z_P = 60$ et *Q* a comme cote $Z_Q = 45$.
Que vaut le volume du solide engendré par la rotation du triangle *PQC* autour de la droite *m* ?



1er Lieu de C : Plan Bissecteur du dièdre (α , β)

1°

A. <u>1er lieu de C, déterminé en fonction de la condition : "C équidistant des 2 plans α et ß "</u>

Le plan α étant vertical, passant par OZ et par le point K de coordonnées (5, 30, 0), son intersection avec le plan horizontal OXY est une droite passant par O et dont l'équation dans le plan OXY rapporté au système 2D OXY s'écrit : $\boxed{Y = 6\ X}$
Cette équation est d'ailleurs aussi celle du plan α dans l'espace 3D rapporté à $OXYZ$.
L'intersection avec le plan OXY du plan vertical β est aussi une droite dont l'expression dans l'espace 2D rapporté au système OXY est du type : $Y = aX + b$

Mais, comme les 2 plans α et β sont perpendiculaires entre eux et verticaux, OXY, α et β forment un trièdre trirectangle dont les 3 angles sont droits.

La droite d'équation ($Y = aX + b$) est donc perpendiculaire à la droite d'équation ($Y = 6X$) et cette droite passe par la projection horizontale B' du point B (30, 15, 15), c.à.d. par le point de coordonnées 2D : (30, 15).

Par suite, son coefficient angulaire est l'inverse de celui de la droite d'équation ($Y = 6X$).
Cette droite a donc comme équation : $Y = -\dfrac{X}{6} + 20$
Cette équation est d'ailleurs aussi celle du plan β dans l'espace 3D rapporté à OXYZ.
Le 1er lieu du point C est défini par le critère "point équidistant des 2 plans α et β" : ce point appartient donc à l'un des 2 plans bissecteurs du dièdre formé par les 2 plans α et β. Celui qui est à retenir est tel que son intersection avec OX est un point d'abscisse positive.

Ce plan bissecteur γ des 2 plans verticaux α et β est aussi un plan vertical puisqu'il passe par l'intersection verticale des 2 plans α et β.

Pour le définir, il suffit donc d'établir l'équation en 2D de sa droite d'intersection avec OXY.
Or, cette droite fait un angle de 45° avec la droite d'équation ($Y = 6X$).
Et l'angle que fait la droite d'équation ($Y = 6X$) avec l'axe OX = arc tg 6 = 80.538 °.

En considérant le triangle formé par ces 2 droites et par l'axe OX et en considérant le fait général que la somme des angles d'un triangle = 180°, il en résulte que l'angle formé par la droite d'intersection du plan bissecteur et de $OXY = 180° - (80.538° + 45°) = 54.452°$.

L'angle intervenant dans le calcul du coefficient angulaire de la droite d'intersection du plan bissecteur γ et de OXY est cependant le supplément de 54.452°, soit 125. 538 °.

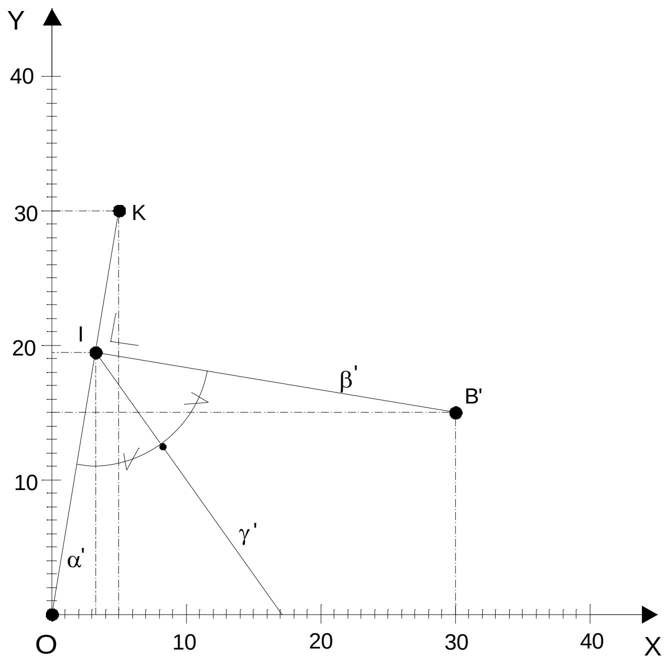
Le point de passage de cette droite d'intersection du plan bissecteur et de OXY correspond à l'intersection des 2 droites d'équations ($Y = 6X$) et ($Y = -\dfrac{X}{6} + 20$), soit le point I de coordonnées (3.243, 19.459) dans OXY.

L'équation de cette droite d'intersection du plan bissecteur et de OXY est donc :

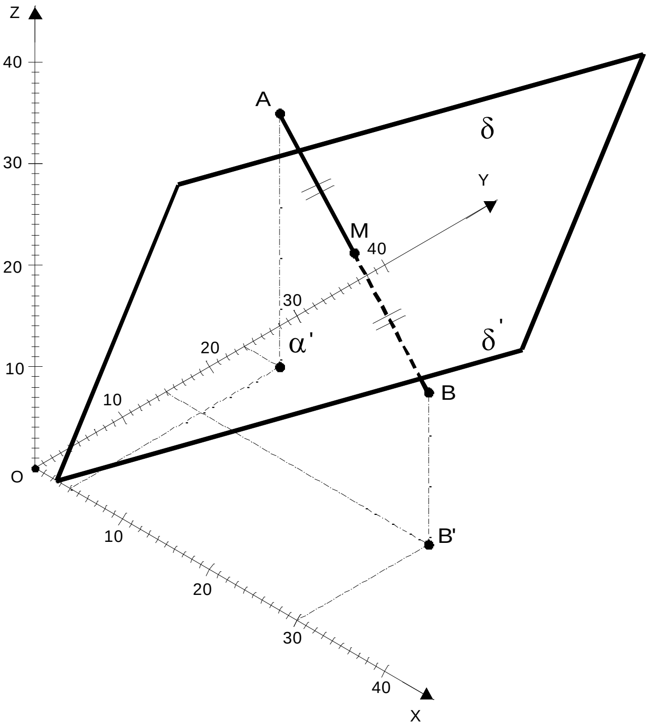
$$Y = (\tan 125.538°\ )(X - 3.243) + 19.459$$

→ $\boxed{Y = -1.4\ X + 24}$ 1er lieu de C

Cette équation est d'ailleurs aussi celle du plan bissecteur γ dans l'espace 3D rapporté à $OXYZ$, 1er lieu du point C. [Le plan γ est en effet un plan vertical]



Projection sur le plan OXY



2ème Lieu de C : Plan Médiateur du segment AB

B. <u>2ème lieu du point C, déterminé en fonction de la condition :</u>
<u>"C équidistant des 2 points A et B"</u>

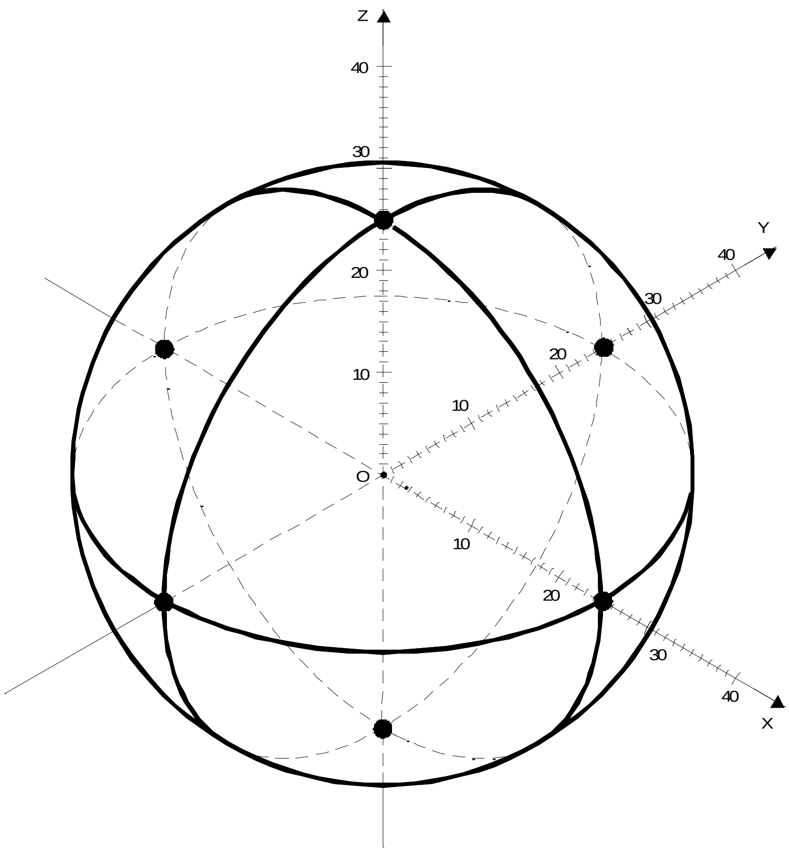
Le point A, d'abscisse $X_A = 4$ et de cote $Z_A = 25$ appartient au plan α d'équation $Y = 6X$.
Les coordonnées du point A sont donc : A (4, 24, 25).
Les coordonnées du point B sont : B (30, 15, 15).
Les paramètres directeurs de AB sont donc :$[(30-4),\ (15-24),\ (15-25)] = [+26, -9, -10]$.
Le 2ème lieu de C, C étant équidistant de A et de B, est le plan médiateur δ de AB.
Ce plan passe par le point M, milieu du segment AB. Ses coordonnées sont donc :

$$X_M = \frac{4+30}{2} = 17.0 \qquad Y_M = \frac{24+15}{2} = 19.5 \qquad Z_M = \frac{25+15}{2} = 20$$

L'équation de ce plan médiateur d de AB, passant par M et perpendiculaire à AB s'établit donc selon : $+\ 26\ X - 9\ Y - 10\ Z + d = 0$

$\rightarrow$ $+(26\times17)-(9\times19.5)-(10\times20)+d=0$

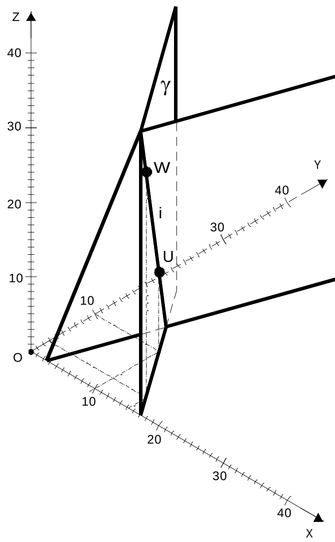
$\rightarrow$ $\boxed{+26X - 9Y - 10Z - 66.\ 5 = 0}$ 2ème lieu de C



3ème Lieu de C : Sphère de Centre O et de Rayon 25

C. <u>3ème lieu du point C, déterminé en fonction de la condition :</u>
<u>"C à distance imposée $d = 25$ de l'origine O du système d'axes $OXYZ$"</u>

Ce 3ème lieu a donc comme équation : $\boxed{X^2 + Y^2 + Z^2 = 25^2}$



D. Intersection des 2 premiers lieux :

Il s'agit de l'intersection de 2 plans : cette intersection est donc une droite dont les équations dans $OXYZ$ sont les équations des plans γ et δ :

$$Y = -1.4X + 24 \qquad (1)$$

$$+\ 26\ X - 9Y - 10Z - 66.5 = 0 \qquad (2)$$

Dans (2), remplaçons Y par son expression (1) :

$$\rightarrow \quad +\ 38.6\ X - 10\ Z * 282.5\ =\ 0 \qquad (3)$$

Cette expression (3) établit le lien qui existe, pour tous les points de la droite d'intersection, entre leurs abscisses X et leurs cotes Z. Il en résulte que cette relation (3) et la relation (1) vont permettre de déterminer les coordonnées de 2 points U et W de cette droite :

Soit le point U d'abscisse $X_U = 10$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De } (3) & \rightarrow & Z_U = 10.35 \\ \text{De } (1) & \rightarrow & Y_U = 10 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \underline{U\ (\ 10,\ 10,\ 10.35\ )}$$

Soit le point W d'abscisse $X_W = 15$

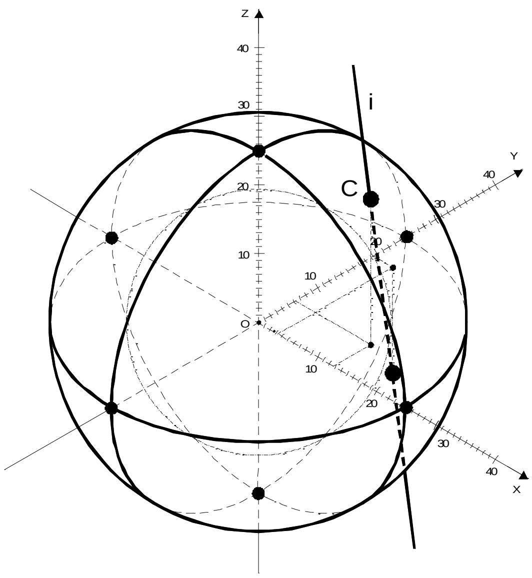
$$\left.\begin{array}{lll} \text{De } (3) & \rightarrow & Z_W = 29.65 \\ \text{De } (1) & \rightarrow & Y_W =\ 3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \underline{W\ (\ 15,\ 3,\ 29.65\ )}$$

Des paramètres directeurs de la droite UW en résultent :

$$[(15-10),(3-10),(29.65-10\ .35)] \rightarrow \qquad [5,-7,19.3]$$

Des équations paramétriques de cette droite d'intersection $i = UW$ entre le plan γ et le plan δ sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} X = 10 + 5\lambda \\ Y = 10 - 7\lambda \\ Z = 10.35 + 19.3\ \lambda \end{array}} \qquad \text{où } \lambda = \text{paramètre} \qquad (4)$$



E. Détermination du point C, intersection entre la droite $i = UW$ et la sphère de Centre O et de rayon 25

Remplaçons, dans l'équation de la sphère, X, Y et Z par leurs expressions paramétriques (4) :

$$(10+5\lambda)^2 + (10-7\lambda) + (10.35+19.3\lambda)^2 = 25^2$$

Il en résulte une équation du second degré en le paramètre λ, les solutions correspondant aux 2 valeurs de λ donnant lieu aux 2 points d'intersection de la droite $i = UW$avec la sphère :

$$446.49\lambda^2 + 359.51\lambda - 317.8775 = 0 \rightarrow \begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ solution : } & \lambda = +0.5323 \\ 2^{\text{ème}} \text{ solution : } & \lambda = -1.3375 \end{cases}$$

Il est cependant clair que la $2^{\text{ème}}$ solution, contrairement à la $1^{\text{ère}}$, va conduire à une cote négative du point d'intersection droite / sphère.

Or, l'énoncé prescrit que le point C doit présenter une cote positive.

La première solution est donc la seule à retenir.

En remplaçant cette première solution de λ dans les équations paramétriques (4) de la droite $i = UW$, il en résulte les coordonnées du point C recherché :

$$\boxed{\begin{array}{ll} X_C = 10 + (5 \times 0.5323) & = +12.6615 \\ Y_C = 10.35 - (7 \times 0.5323) & = +\ 6.2739 \\ Z_C = 10.35 + (19.3 \times 0.5323) & = +20.6234 \end{array}}$$

Variante pour le calcul des coordonnées de C :

Ces coordonnées peuvent être également déterminées en résolvant le système des 3 équations des 3 lieux, soit :

$$\begin{cases} 1.4X + Y - 24 = 0 & (1) \\ +26X - 9Y - 10Z - 66.5 = 0 & (2) \\ X^2 + Y^2 + Z^2 - 25^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

2°.

Distance de A à C

$$=\left(\left(12.6615-4\right)^2+\left(6.2739-24\right)^2+\left(20.6234-25\right)^2\right)^{0.5} \quad =\underline{20.2087}$$

Distance de A à C

$$=\left(\left(12.6615-30\right)^2+\left(62.2739-15\right)^2+\left(20.6234-15\right)^2\right)^{0.5} =\underline{20.2087}$$

Egalité!

Distance de C au plan α d'équation $[6X-Y=0]$

$$\text{Distance de } C \text{ à } \alpha = \frac{|\ 6\times 12.6615-1\times 6.2739\ |}{\sqrt{6^2+1^2}} \qquad =11.4578$$

Distance de C à β d'équation $[X+6Y-120=0]$:

$$\text{Distance de } C \text{ à } \beta = \sqrt{12.6615^2+6.2739^2+20.6234^2} = \underline{11.4578}$$

Egalité!

Distance de C à $O=\sqrt{12.6615^2+6.2739^2+20.6234^2}=\underline{25.000}$

$\rightarrow$ Distance = à la distance imposée 25 !

3°

Menons la perpendiculaire CS à la droite m.

CS est le rayon r de la circonférence décrite par le point C lors de sa rotation autour de m.

La droite m étant verticale et le point S de cette droite étant à même cote que C,

les coordonnées de S sont :

$$S(5,30,20.6234)$$

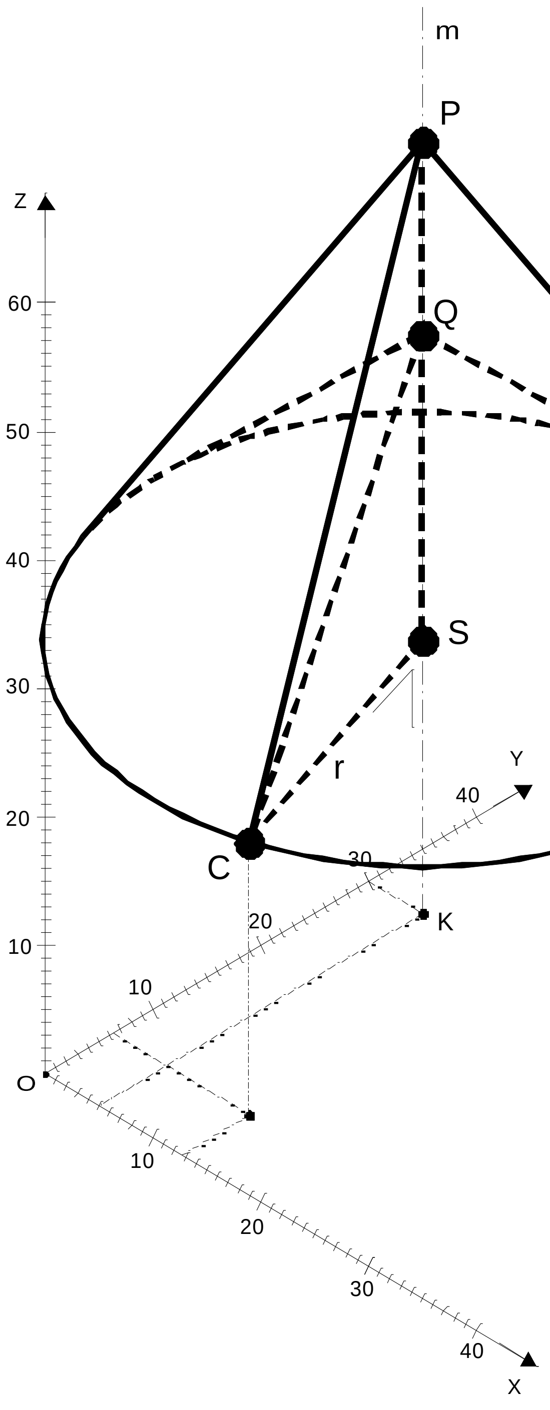
$$\rightarrow \qquad r=CS=\sqrt{(12.6615-5)^2+(6.2739-30)^2+(20.6234-20.6234)^2}=24.9324$$

Le volume engendré par la rotation du triangle PQC est égal au volume engendré par la rotation du triangle rectangle PSC, c.à.d. un cône de révolution dont le cercle de base est de rayon r et dont la hauteur est SP <u>moins</u> le volume engendré par la rotation du triangle rectangle QSC, c.à.d. un cône de révolution dont le cercle de base est de rayon r et dont la hauteur est SQ.

Ainsi : Volume V engendré par la rotation du triangle PQC $=\dfrac{\pi r^2.SP}{3}-\dfrac{\pi r^2.SQ}{3}$

$$\rightarrow \qquad V=\frac{\pi\times 24.9324^2\times(60-20.6234)}{3}-\frac{\pi\times 24.9324^2\times(45-20.6234)}{3}$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{V=9764.46}$$



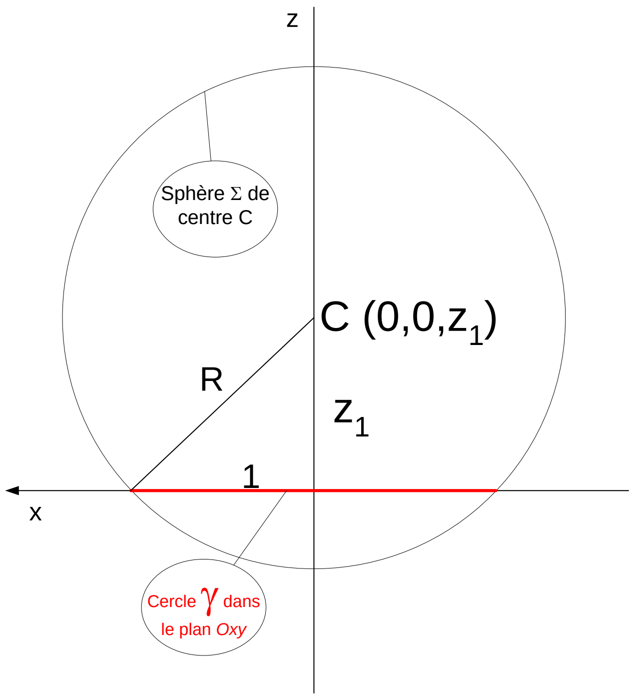
10 février 07

EXGAE66 - Louvain, série 1 – juillet 2006

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- le cercle $\gamma \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
- et la droite *d* passant par le point *A* = (2 ; 0 ; 0) et de vecteur directeur (1 ; 1 ; 1).

On vous demande de déterminer toutes les sphères contenant le cercle γ et tangentes à la droite *d*.



La (ou les) sphère recherchée a son centre obligatoirement sur l'axe Oz puisque cette sphère s'appuie sur le cercle γ qui est un cercle de rayon 1.
Son centre a donc pour coordonnées $C(0,0,z_1)$ et soit R son rayon.
Son équation est donc de la forme : $\Sigma \equiv x^2 + y^2 + (z - z_1)^2 = R^2 \qquad (1)$

Comme le montre la figure, z_1, R et le rayon du cercle sont reliés par une relation de Pythagore : $1 + z_1^{\,2} = R^2 \qquad (2)$

D'autre part, la droite d passe par le point $A(2,0,0)$, a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}(1,1,1)$.

Elle a donc pour équation : $d \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad (3)$

Si la droite d et la sphère Σ sont tangents alors les coordonnées du point de tangence vérifient l'équation de d et de Σ. De $(1),(2)$ et (3) on déduit :

$(2+t)^2 + t^2 + (t - z_1)^2 = 1 + z_1^{\,2} \to 4 + 4t + t^2 + t^2 + t^2 - 2z_1 t + \cancel{z_1^2} = 1 + \cancel{z_1^2}$

$\to 3t^2 + 2(2 - z_1)t + 3 = 0$

Le réalisant de cette équation du second degré doit être nul

$\Delta' = (2 - z_1)^2 - 9 = 0 \to (2 - z_1 - 3)(2 - z_1 + 3) = 0 \to -(z_1 + 1)(5 - z_1) = 0 \to \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_1 = 5 \end{cases}$

Ce qui donne les deux sphères répondant aux conditions :

$\boxed{\Sigma_1 \equiv x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 \quad \text{et} \quad \Sigma_2 \equiv x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 26}$

Comme vérification calculons les points de tangences

1) $\underline{z_1 = -1}$

$\to 3t^2 + 6t + 3 = 0 \to (t+1)^2 = 0 \to t = -1 \to T_1(1,-1,-1)$

On vérifie facilement que $T_1 \in \Sigma_1$

2) $\underline{z_1 = 5}$

$\to 3t^2 - 6t + 3 = 0 \to (t-1)^2 = 0 \to t = +1 \to T_1(3,+1,+1)$

On vérifie facilement que $T_2 \in \Sigma_2$

EXGAE67 - EPL, UCL, Louvain, série 2 – juillet 2006

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- les deux points $A = (1 ; 2 ; 3)$ et $B = (2 ; -1 ; 4)$,
- le plan $\alpha \equiv 4x + 7y - 4z - 9 = 0$:

On vous demande de calculer l'équation du plan passant par *A* et *B* et perpendiculaire au plan α.

$A(1,2,3)\ ;\ B(2,-1,4) \to \overrightarrow{v_{AB}}(1,-3,1)$

$\alpha \equiv 4x+7y-4z-9=0 \to$ Le vecteur normal à α : $\overrightarrow{n_\alpha}(4,7,-4)$

Les équations paramétriques du plan π perpendiculaire à α et passant par A et B

$$\text{sont : } \pi \equiv \begin{cases} x = 1+k+4h & (1) \\ y = 2-3k+7h & (2) \\ z = 3+k-4h & (3) \end{cases}$$

On obtiendra l'équation cartésienne de π en éliminant h et k

$$\to \begin{cases} (1)+(3) & \to x+z=4+2k & \to k=\dfrac{x+z-4}{2} & (4) \\ 7(1)-4(2) & \to 7x-4y=-1+19k & \to k=\dfrac{7x-4y+1}{19} & (5) \end{cases}$$

$$(4)=(5) \to \frac{x+z-4}{2} = \frac{7x-4y+1}{19} \to 19x+19z-76 = 14x-8y+2$$

$$\to \boxed{\pi \equiv 5x+8y+19z-78=0}$$

Vérification : α et π sont bien perpendiculaires car

$\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\pi} = 4\times5+7\times8-4\times19=0$

Le 24 juin 07

EXGAE68 - EPL, UCL, Louvain, septembre 2006

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, une surface est représentée par l'équation : $2yz + 4x - 2y - z = 0$

On coupe cette surface par le plan $x + y = k$: l'intersection entre le plan et la surface est appelée section de la surface par le plan.

1. Quelle doit être la valeur de k afin que la section se réduise à deux droites ?
2. Déterminer une représentation sous forme d'équations cartésiennes pour ces deux droites.

Méthode 1

a) Formons un système avec les équations du plan et la surface (quadrique)

$$\begin{cases} x+y=k \\ 2yz+4x-2y-z=0 \end{cases} \rightarrow 2yz+4(k-x)-2y-z=0$$

$$\rightarrow \Gamma \equiv 2yz-6y-z+4k=0$$

La section est donc l'équation d'une conique Γ. Plus précisément, c'est une hyperbole équilatère. (Voir graphique 1 et voir annexe ci-dessous pour la détermination du type de la conique)

Pour que la section se réduise à deux droites, il faut que la conique dégénère. C'est à dire que son Δ doit être nul (Voir annexe).

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1/2 & -3 & 4k \end{vmatrix} = -4k+3=0 \rightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}}$$

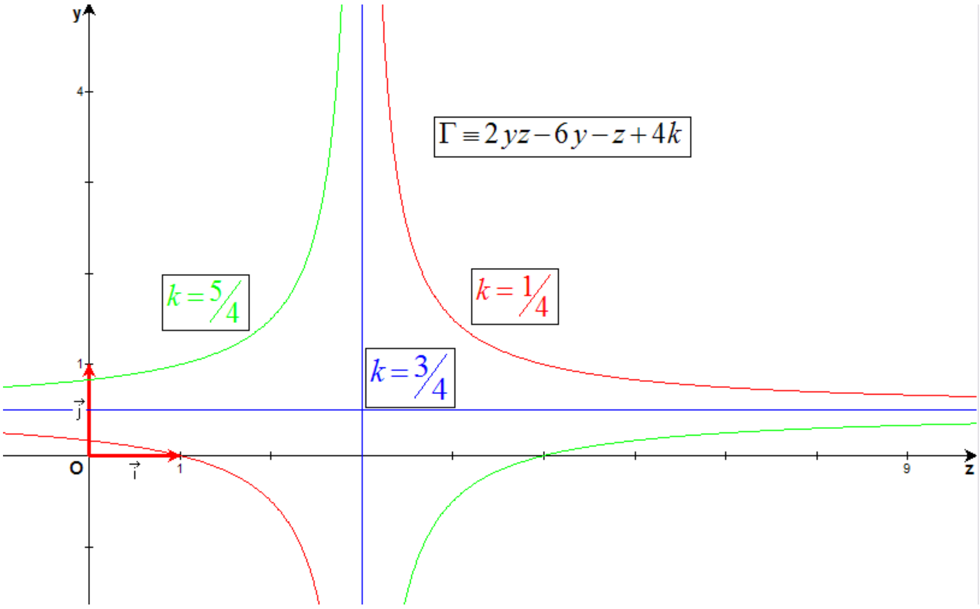
$$\rightarrow \Gamma \equiv 2yz-6y-z+3=0$$

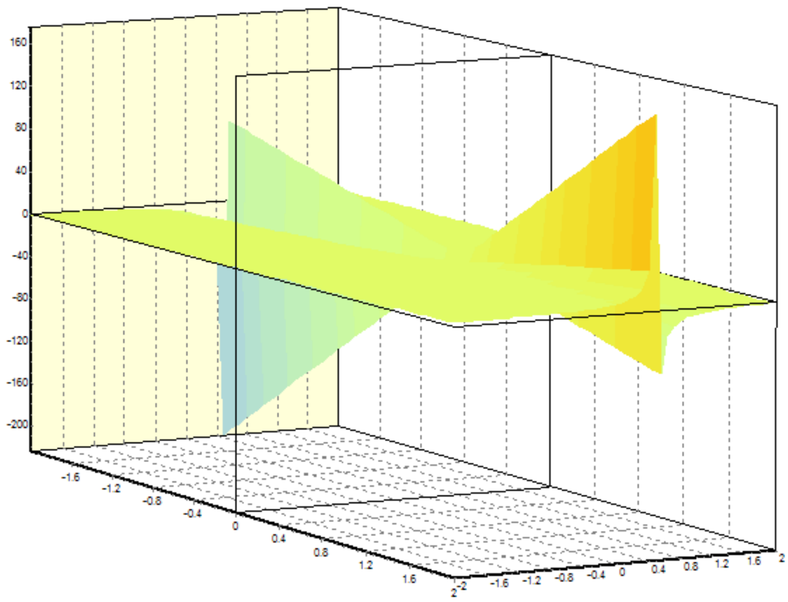
b) Pour obtenir les deux droites, il suffit de faire les dérivées partielles de la conique

par rapport à y et z : $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} \rightarrow 2z-6=0 \rightarrow z-3=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \rightarrow 2y-1=0 \end{cases}$

Les deux droites ont finalement comme dans l'espace XYZ, les équations

$$\boxed{\begin{cases} x+y=\frac{3}{4} \\ z-3=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y=\frac{3}{4} \\ 2y-1=0 \end{cases}}$$





Représentation en 3D de la surface : $2yz + 4x - 2y - z = 0$

Méthode 2

a) Repartons de l'équation : $\Gamma \equiv 2yz - 6y - z + 4k = 0 \qquad (1)$

Cette conique doit donc se décomposer en deux droites:

$\to \Gamma \equiv (ay + bz + c)(a'y + b'z + c') \qquad (2)$

On distribue et après identification entre (1) et (2), on obtient le système :

$$\begin{cases} aa' = 0 \\ ab' + a'b = 2 \\ bb' = 0 \\ ac' + ca' = -6 \\ bc' + cb' = -1 \\ cc' = 4k \end{cases} \to \begin{cases} \text{Posons } a' = 0 & \\ ab' = 2 & (3) \\ bb' = 0 \to b = 0 & \\ ac' = -6 & (4) \\ cb' = -1 & (5) \\ cc' = 4k & (6) \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{(3)}{(4)} \to \dfrac{b'}{c'} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{(5)}{(6)} \to \dfrac{b'}{c'} = -\dfrac{1}{4k} \end{cases} \to \boxed{k = \frac{3}{4}}$$

b) Repartons du système : $\begin{cases} ab' = 2 \\ ac' = -6 \\ cb' = -1 \\ cc' = 3 \end{cases} \to \text{Posons } c = 3 \to \begin{cases} c' = 1 \\ b' = -\dfrac{1}{3} \\ a = -6 \end{cases}$

$$\to \Gamma \equiv (-6y + 3)\left(-\frac{1}{3}z + 1\right) = (2y - 1)(z - 3)$$

Les deux droites cherchées on donc pour équations cartésiennes :

$$\boxed{\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}k \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}k \\ z - 3 \end{cases}}$$

Si on pose $c = 1$, on arrive au même résultat.

<u>Annexe</u>

Détermination du type de conique

Equation générale des coniques : $ax^2 + 2by + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

Invariants des coniques : (Ne changent pas en cas de translation ou de rotation)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

Δ	δ	Nature de la courbe
$\Delta \neq 0$	$\delta < 0$	Hyperbole
	$\delta = 0$	Parabole
	$\delta > 0$	Ellipse
$\Delta = 0$	$\delta < 0$	Paire de droites sécantes
	$\delta = 0$	Paires de droites réelles parallèles
	$\delta > 0$	Paire de droites imaginaires avec un point d'intersection réel.

Le 15 avril 07

EXGAE69 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2007, série 1

Une famille de plans est représentée par l'équation : $x + \alpha y + z - 1 = 0$. (α est un paramètre réel) dans un trièdre orthonormé *OXYZ*

3. Déterminez le plan de cette famille dont la distance à l'origine est la plus grande.
4. Quel est l'angle que forme ce plan avec le plan de coordonnées *OXY*

Solution proposée par Steve Tumson

1. Pour trouver la distance d'un point à un plan, il faut d'abord calculer le point de percée dans ce plan de la droite p perpendiculaire au plan passant par le point :

Cette droite p passe par l'origine et a pour vecteur directeur : $\vec{n} = (1, a, 1)$

Son équation paramétrique est donc : $\vec{p} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Le point de percée dans le plan s'obtient en résolvant le système : $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x = k \\ y = ka \\ z = k \end{cases}$

En injectant, on trouve la valeur de k qui nous donne le point de percée sur la droite :

$$k = \frac{1}{2 + a^2}$$

Le point de percée P a donc pour coordonnées :

$$P\left(\frac{1}{2+a^2}; \frac{a}{2+a^2}; \frac{1}{2+a^2}\right)$$

La distance de ce point à l'origine est donc :

$$d(P,O) = \sqrt{\left(\frac{1}{2+a^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2+a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2+a^2}\right)^2} = \frac{1}{2+a^2}\sqrt{a^2+2}$$

Le numérateur est de l'ordre de a et le dénominateur de l'ordre de a^2

Pour que cette distance soit maximale, il faut donc minimiser le dénominateur au maximum.

La distance est maximale pour $a = 0$ et le plan de la famille demandé est donc :

$$\boxed{x + z = 1}$$

2. L'angle entre deux plans est l'angle formé par les normales de ces deux plans.

Le plan OXY a pour équation $z = 0$ et une normale est donc $(0,0,1)$

L'autre plan est d'équation $x + z = 1$ et une normale est donc $(1,0,1)$

Le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit : $\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|}$

Or pour nos deux normales on a :

$$\begin{cases} \vec{a} \bullet \vec{b} = 1 \\ \|\vec{a}\| = 1 \\ \|\vec{b}\| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^o$$

L'angle entre les deux plans est donc : $\boxed{45°}$

Méthode alternative pour le calcul de la distance minimale

La distance du point à l'origine est donc :

$$d\left(P,O\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{2+a^2}\right)^2+\left(\frac{a}{2+a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2+a^2}\right)^2}=\frac{1}{2+a^2}\sqrt{a^2+2}$$

Pour avoir la distance maximale, il suffit d'annuler la dérivée.

$$\left(d\left(P,O\right)\right)'=\left(\frac{1}{2+a^2}\sqrt{a^2+2}\right)'=\left(\left(a^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left(a^2+2\right)^{-\frac{3}{2}}.2a=-\frac{a}{\left(a^2+2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$\rightarrow$ La dérivée est nulle : $a=0$

Il faut encore vérifier que c'est bien un maximum :

a		0	
$\left(d\left(P,O\right)\right)'$	$+$	0	$-$
$d\left(P,O\right)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

$\rightarrow$ C'est bien un maximum