

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie analytique dans l'espace**

**GAE 7**

**EXGAE070 – EXGAE079**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

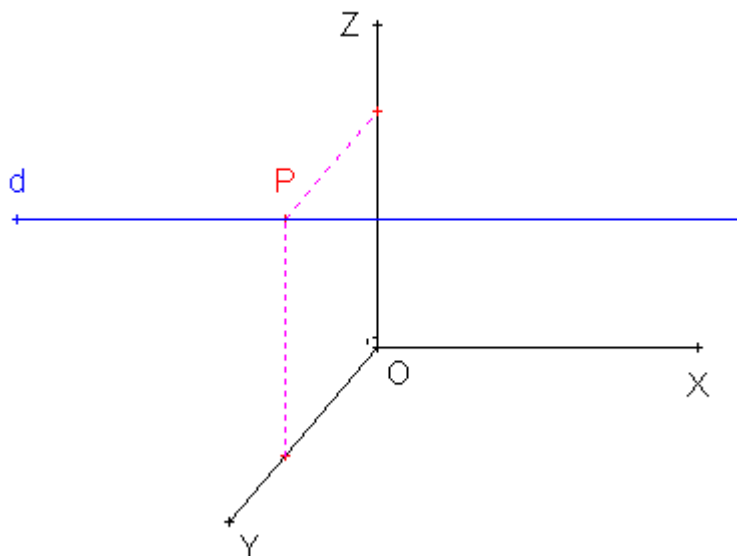
## EXGAE70 - Bruxelles, juillet 2007

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$  et d'axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , on donne le point  $P(0,3,4)$ .

- 1) établir des équations cartésiennes de la droite  $d$  parallèle à  $OX$ , passant par  $P$
- 2) établir une équation cartésienne du plan contenant  $d$  et l'axe  $OX$
- 3) déterminer les coordonnées des sommets  $Q$  et  $R$  du carré  $OPQR$ , sachant que  $Q$  est sur  $d$  et que son abscisse est positive
- 4) établir des équations paramétriques de la perpendiculaire  $p$  au plan du carré passant par le centre de celui-ci
- 5) déterminer les coordonnées des points  $S$  et  $S'$ , sommet des pyramides droites dont le carré est la base et donc les hauteurs mesurent cinq unités de longueur
- 6) déterminer le cosinus de l'angle aigu des arêtes  $SO$  et  $SP$ , une équation cartésienne du plan  $OPS$ , la longueur de l'arête  $OS$  ainsi que le volume du polyèdre  $OPQRSS'$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**



1) L'équation vectorielle de  $d$  s'écrit :  $\vec{d} = \vec{OP} + \lambda \vec{OA}$  avec  $A$  un point quelconque sur  $OX$

L'équation paramétrique  $d$  s'écrit :  $d \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  si on choisit  $A = 1$

Et en cartésien :  $d \equiv \begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

2) L'équation vectorielle du plan  $\pi$  s'écrit :  $\pi = \vec{0} + r\vec{OP} + s\vec{OA} \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$

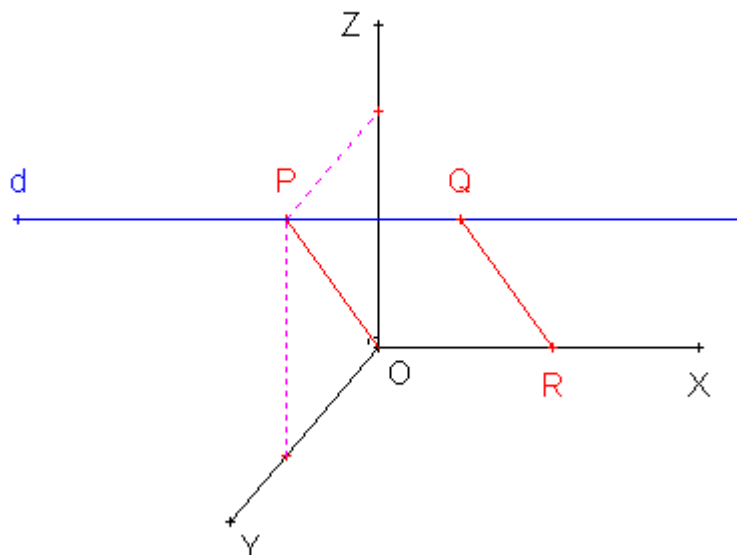
En paramétrique :  $\pi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$

En cartésien :  $\pi \equiv 4y - 3z = 0$

On aurait aussi pu trouver le vecteur normal au plan qui nous donne les coefficients :

$$\vec{v}_n = \vec{OP} \times \vec{OA} = \det \begin{pmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\widehat{y} - 3\widehat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \equiv 4y - 3z = d$$

Le plan passant par l'origine, on a  $d = 0$  et on retrouve bien l'équation trouvée tout à l'heure.

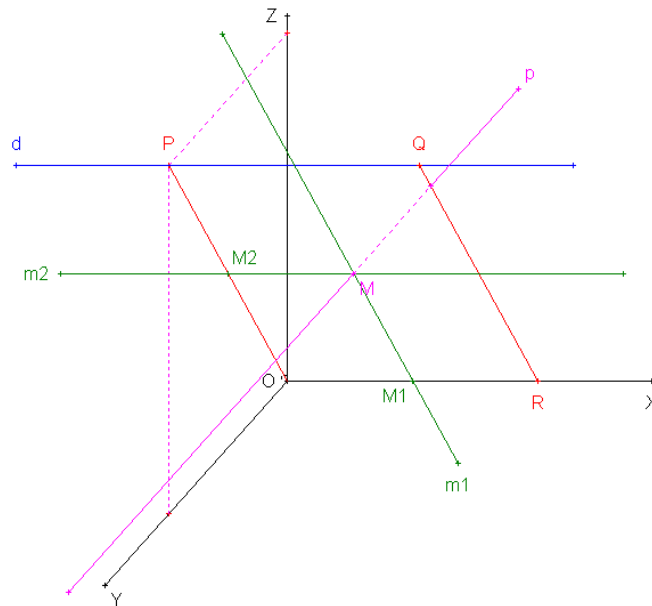


3) Le carré doit forcément se trouver dans le plan  $\pi$  trouvé au point précédent pour conserver les angles droits. Le carré est de longueur :

$$\|\overline{OP}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$$

Le point  $Q$  et  $R$  sont donc la translation respectivement de  $P$  et  $O$  de longueur 5 et de direction  $OX$ . On trouve donc :

$$\boxed{Q(5,3,4)} \text{ et } \boxed{R(5,0,0)}$$



4) Il faut d'abord trouver le milieu du carré. C'est l'intersection des deux médianes du carré.

On calcule le milieu de  $OP$  et  $OR$  :  $M_1 = \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$  et  $M_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$

Les médianes ont donc pour équation :

$$\begin{cases} \vec{m}_1 = \overline{OM_1} + k_1 \overline{OP} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{m}_2 = \overline{OM_2} + k_2 \overline{OR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2.5 \\ y = 3k_1 \\ z = 4k_1 \\ x = 5k_2 \\ y = 1.5 \\ z = 2 \end{cases}$$

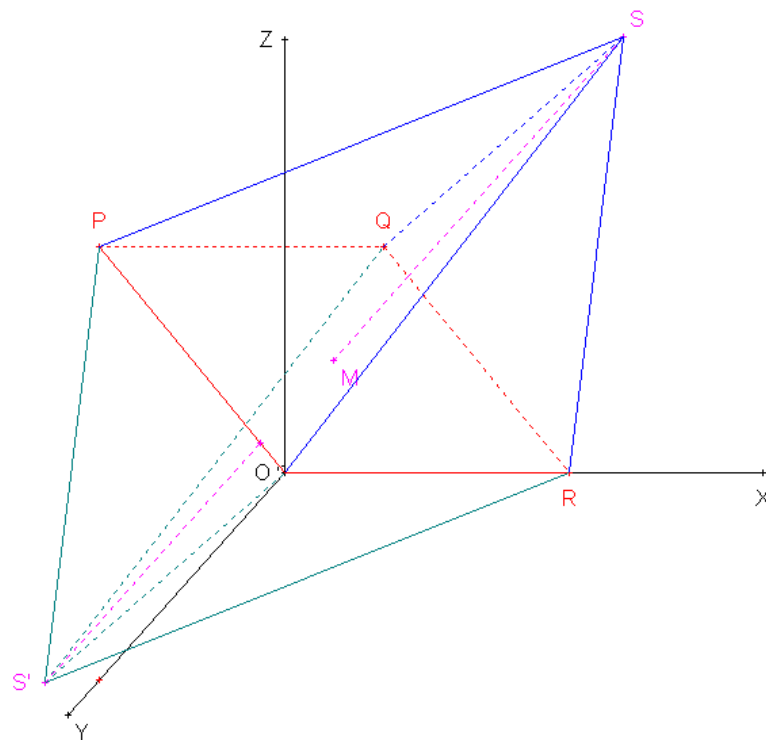
On trouve donc :  $M \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$

Il reste à trouver la direction perpendiculaire au plan  $\pi$

qui nous est donné par les coefficients du plan :  $\vec{v}_n = (0, 4, -3)$

L'équation de  $p$  est donc :

$$\vec{p} = \overline{OM} + u\vec{v}_n \Leftrightarrow p \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$



5) Pour trouver  $S$  et  $S'$  à 5 unités de  $M$ , il suffit de déterminer le paramètre  $u$  de l'équation

de  $p$  pour obtenir  $u \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 5$

Or,  $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$

Le point  $S$  et  $S'$  sont donc fixé par  $u = \pm 1$

On trouve donc :

$$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5.5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -2.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6) Nous avons, du côté supérieur du plan  $\pi$ , une pyramide droite dont la base est de côté 5 et la hauteur est aussi 5.

On peut calculer la longueur  $|OP|$  par Pythagore :  $|OP| = \sqrt{2.5^2 + 2.5^2} \approx 5.535$

De là, on peut calculer la longueur des 4 arêtes de notre pyramide (qui sont évidemment égales) :

$$|PS| = |QS| = |RS| = |OS| = \sqrt{5^2 + |OP|^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \approx 6.214$$

D'autre part, le cosinus de l'angle entre deux arêtes s'obtient par simple relation dans les triangles rectangles. Il suffit de projeter  $S$  sur  $OP$  via le plan  $OPS$ .

Nous appellerons ce point le point  $B$ .

Par Pythagore, on a :  $|SB| = \sqrt{2.5^2 + 5^2} \approx 5.59$

On trouve au final :  $\cos \theta = \frac{2}{3}$

Le volume vaut deux fois le volume d'une pyramide droite est (si  $S$  représente

la surface de la base) :  $V = 2 \frac{Sh}{3} = \frac{250}{3} \approx 83.33$

Pour terminer, l'équation du plan  $OPS$  est :

$$\overrightarrow{OPS} = \vec{0} + v\overrightarrow{OP} + w\overrightarrow{OS} \Leftrightarrow OPS \equiv v \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}w \rightarrow w = \frac{2x}{5} \\ y = 3v + \frac{11}{2}w \\ z = 4v - w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{2x}{5} \\ y = 3v + \frac{11x}{5} \\ z = 4v - \frac{2x}{5} \rightarrow v = \frac{z}{4} + \frac{x}{10} \end{cases}$$

En injectant  $v$  dans la deuxième équation, on trouve :

$$OPS \equiv 10x - 4y + 3z = 0$$

# EXGAE71 - FSA, UCL, Louvain – septembre 07

Donner les équations de l'ensemble des points équidistants des trois points suivants

$$A(0, 2, 4), B(0, 2, 0), C(1, 1, 1)$$

## Solution proposée par Jacques COLLOT

Soit  $O(x, y, z)$  un point quelconque équidistant de  $A, B$  et  $C$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} |OA|^2 = |OB|^2 \\ |OB|^2 = |OC|^2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} z^2 - 8z + 16 = z^2 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ 2x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2x - 2y + 4 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} z = 0 \\ 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases}} \end{aligned}$$

### Variante

Le lieu cherché est l'intersection des plans médiateurs de  $AB, BC$  et  $AC$

Plan médiateur de  $AB$

$$\text{Vecteur directeur : } \overrightarrow{v_{AB}} = (0, 0, 4)$$

$$\text{Milieu de } AB : R : (0, 2, 2)$$

$$\text{Plan médiateur : } \pi_{AB} \equiv 4z + d = 0$$

$$\text{or } R \in \pi_{AB} \rightarrow d = -8$$

$$\rightarrow \pi_{AB} \equiv z = 2 \quad (1)$$

Plan médiateur de  $BC$

$$\text{Vecteur directeur : } \overrightarrow{v_{BC}} = (1, -1, 1)$$

$$\text{Milieu de } BC : S : \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Plan médiateur : } \pi_{BC} \equiv x - y + z + d = 0$$

$$\text{or } S \in \pi_{BC} \rightarrow +\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + d = 0 \rightarrow d = +\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \pi_{BC} \equiv x - y + z + \frac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow \pi_{BC} \equiv 2x - 2y + 5 = 0 \quad (2)$$

Le lieu cherché est la droite d'équations (1) et (2)

$$\boxed{\begin{cases} z = 2 \\ 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases}}$$

### Solution proposée par Steve Tumson

Le lieu des points équidistants de  $A$  et  $B$  est le plan médiateur  $\pi_{AB}$

Le lieu des points équidistants de  $A$  et  $C$  est le plan médiateur  $\pi_{AC}$

L'intersection de ces deux plans est la solution de notre problème :

Calculons les vecteurs normaux à ces 2 plans :

$$\overrightarrow{AB} = (0, 0, -4) \quad \overrightarrow{BC} = (1, -1, 1)$$

Les plans médiateurs sont donc :

$$\pi_{AB} \equiv -4z = d_1$$

$$\pi_{BC} \equiv x - y + z = d_2$$

Or ces plans étant médiateurs, il doivent passer par le milieu des segments  $AB$  et  $AC$

$$M_{AB} = (0, 2, 2) \in \pi_{AB}$$

$$M_{BC} = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \in \pi_{BC}$$

On en déduit :

$$-8 = d_1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = d_2 = -\frac{1}{2}$$

Le lieu des points est donc la droite :

$$\begin{cases} \pi_{AB} \equiv z = 2 \\ \pi_{BC} \equiv x - y + z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

---

Le 24 septembre 07.



## EXGAE72 - FACSA, ULG, Liège – septembre 07

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère la famille de droites d'équations.

$$\begin{cases} x = ay \\ y = az \end{cases}$$

où  $a$  est un paramètre réel, ainsi que les plans perpendiculaires à ces droites et contenant le point  $(a+1, 2-2a^2, a^3+1)$ .

Démontrer que ces plans possèdent une intersection commune et préciser la nature de cette intersection.

La droite peut s'écrire :  $\frac{x}{a} = y = \frac{z}{1}$  Ce qui suppose  $a \neq 0$

Un vecteur directeur de cette droite est donc  $\left(a, 1, \frac{1}{a}\right)$

Les plans perpendiculaires à cette droite ont pour équation :  $ax + y + \frac{z}{a} + d = 0$

Ils passent par  $(a+1, 2-2a^2, a^3+1) \rightarrow a(a+1) + (2-2a^2) + \frac{a^3+1}{a} + d = 0$

$$\rightarrow d = -\frac{(a+1)^2}{a}$$

Les plans ont donc finalement pour équation :  $ax + y + \frac{z}{a} - \frac{(a+1)^2}{a} = 0$

Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trois valeurs particulières de  $a$ . Résolvons le système :

$$\begin{cases} \alpha x + y + \frac{z}{\alpha} - \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} = 0 \\ \beta x + y + \frac{z}{\beta} - \frac{(\beta+1)^2}{\beta} = 0 \\ \gamma x + y + \frac{z}{\gamma} - \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha^2 x + \alpha y + z - (\alpha+1)^2 = 0 & (1) \\ \beta^2 x + \beta y + z - (\beta+1)^2 = 0 & (2) \\ \gamma^2 x + \gamma y + z - (\gamma+1)^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1)-(2) \rightarrow (\alpha^2 - \beta^2)x + (\alpha - \beta)y - [(\alpha+1)^2 - (\beta+1)^2] = 0 \\ (1)-(3) \rightarrow (\alpha^2 - \gamma^2)x + (\alpha - \gamma)y - [(\alpha+1)^2 - (\gamma+1)^2] = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 2) = 0 \\ (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)x + (\alpha - \gamma)y - (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\alpha + \beta)x + y - (\alpha + \beta + 2) = 0 & (3) \\ (\alpha + \gamma)x + y - (\alpha + \gamma + 2) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\rightarrow (3)-(4) \rightarrow [(\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma)]x - [(\alpha + \beta + 2) - (\alpha + \gamma + 2)] = 0$$

$$\rightarrow (\beta - \gamma)x = \beta - \gamma \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow z = 1$$

Autrement dit tous les plans passent par le point  $(1, 2, 1)$

Si  $a = 0$ , la droite se ramène à  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  c'est à dire l'axe  $z$

Le plan  $z = 1$  est bien perpendiculaire à  $Oz$  et passe par  $(1, 2, 1)$

## EXGAE73 - FACS, ULB, Bruxelles – juillet 07

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine 0 et d'axes  $X$ ;  $Y$  et  $Z$ , on donne le point  $P(0; 3; 4)$ .

- 1) Etablir des équations cartésiennes de la droite  $d$  parallèle à  $OX$ , passant par  $P$ ;
  - 2) Etablir une équation cartésienne du plan contenant  $d$  et l'axe  $OX$ ;
  - 3) Déterminer les coordonnées des sommets  $P$  et  $R$  du carré  $OPQR$ , sachant que  $Q$  est sur  $d$  et que son abscisse est positive;
  - 4) Etablir des équations paramétriques de la perpendiculaire  $p$  au plan du carré passant par le centre de celui-ci;
  - 5) Déterminer les coordonnées des points  $S$  et  $S'$ , sommets des pyramides droites dont le carré est la base et dont les hauteurs mesurent cinq unités de longueur;
  - 6) Déterminer le cosinus de l'angle aigu des arêtes  $SO$  et  $SP$ , une équation cartésienne du plan  $OPS$ , la longueur de l'arête  $OS$  ainsi que le volume du polyèdre de sommets  $OPQRSS'$ .
- 

$$1) P(0, 3, 4) \rightarrow d \equiv \begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

2) Soit  $\pi$  le plan cherché dont deux vecteurs directeurs sont  $(0, 3, 4)$  car contient  $d$

$$\text{et } (1, 0, 0) \text{ car parallèle à } Ox. \pi \text{ passe par l'origine} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{4y - 3z = 0}$$

$$3) |OP| = |OR| = |RQ| = |QP| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \rightarrow Q(5, 3, 4) \text{ et } R(5, 0, 0)$$

4) Le vecteur normal au plan  $\pi$  est  $\vec{n}_\pi(0, 4, -3)$

$$\text{La droite } p \text{ passe par } M(5/2, 3/2, 2) \text{ centre de } OPQR \rightarrow p \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2} + 4k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$$

5)  $S$  et  $S'$  appartiennent à  $p$ .

$$|MS| = |MS'| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 4k - \frac{3}{2}\right)^2 + (2 - 3k + 2)^2} = \pm 5k$$

$$\text{Cette longueur est égale à } 5 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow S\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 5\right) \\ k = -1 \rightarrow S'\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, -1\right) \end{cases}$$

6) On a  $\overrightarrow{SO} \left( -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -5 \right) = (-1, 1, -2)$  et  $\overrightarrow{SP} \left( -\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, -1 \right) = (-5, 11, -2)$

L'angle entre ses deux vecteurs est donné par :

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{SP}}{|\overrightarrow{SO}| \cdot |\overrightarrow{SP}|} = \frac{-1 \times (-5) + 1 \times 11 - 2 \times (-2)}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{25+121+4}} = \frac{19}{30} \rightarrow \boxed{\alpha = 50.7^\circ}$$

Le plan  $OPS$  passe par  $O$  et a pour vecteurs directeurs  $\overrightarrow{OP}$  et  $\overrightarrow{OS}$

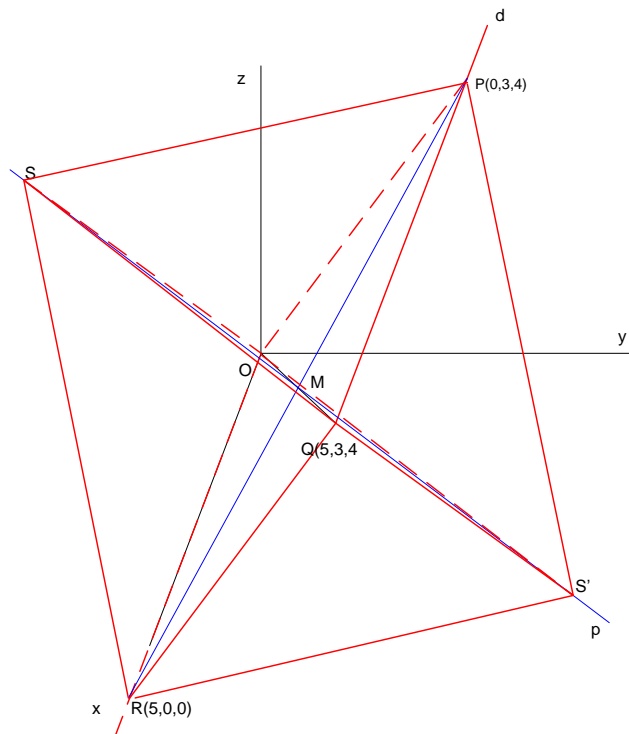
$$OPS \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-6-4)x - (0+4)y + (0+3)z = 0 \rightarrow \boxed{OPS \equiv 10x + 4y - 3z = 0}$$

Longueur de l'arête :  $|\overrightarrow{SO}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

Volume de  $OPQRSS' = 2 \times$  Volume tétraèdre  $OPQRS$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{OPQR} \times \text{Hauteur} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{Aire}_{OPQR} = 5^2 \\ \text{Hauteur} = |MS| = 5 \end{cases}$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times 5^2 \times 5 = \boxed{\frac{250}{3}}$$

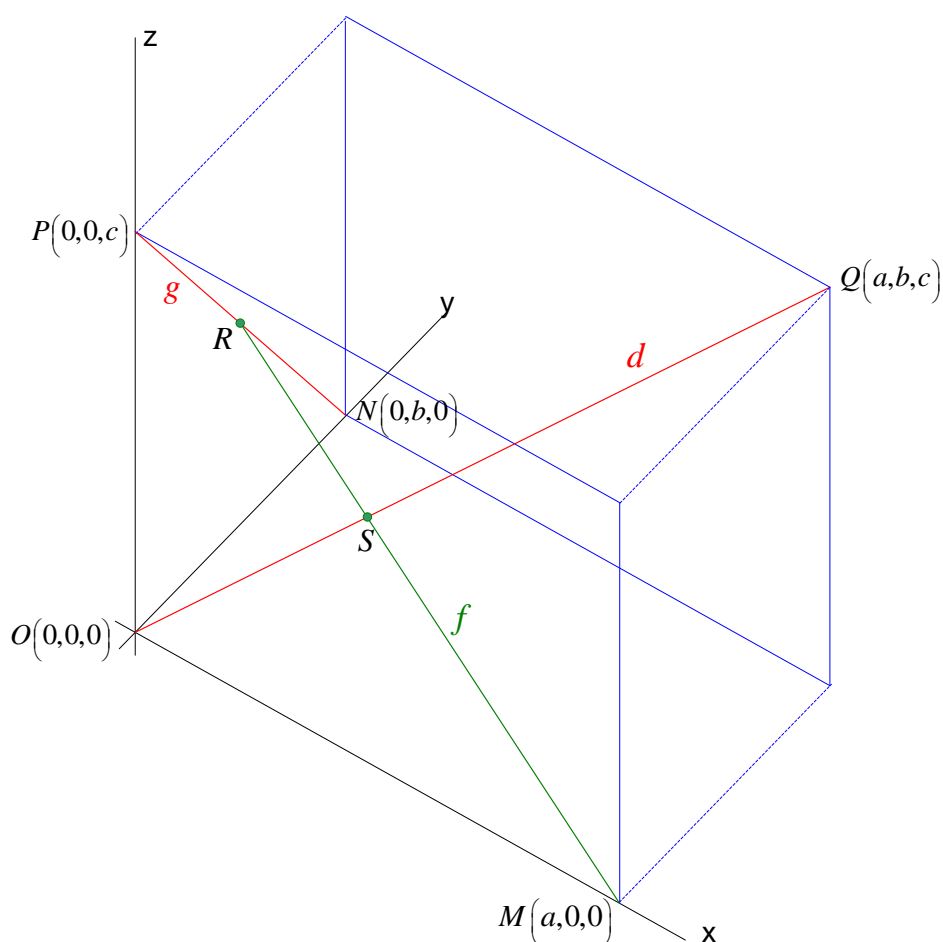


Le 30 jan 08

## EXGAE074 - FACS, ULB, Bruxelles – Septembre 07

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$  et d'axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , on donne les points  $M(a; 0; 0)$ ;  $N(0; b; 0)$ ;  $P(0; 0; c)$  et  $Q(a; b; c)$  ( $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels strictement positifs). Soit  $d$  la droite qui passe par  $O$  et  $Q$  et  $g$  celle qui passe par  $N$  et  $P$ .

- 1) Etablir une équation cartésienne du plan qui est parallèle à  $g$  et qui contient  $d$ ;
- 2) Etablir une équation cartésienne du plan contenant  $g$  et qui est parallèle à  $d$ ;
- 3) montrer que la droite  $f$  joignant  $M$  au milieu de  $NP$  possède un point commun avec la droite  $d$  et déterminer les coordonnées de ce point ;
- 4) déterminer les conditions sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la droite  $f$  soit perpendiculaire aux droites  $d$  et  $g$  ;
- 5) déterminer dans les conditions trouvées au 4), l'angle et la distance des droites  $d$  et  $g$ .



1) Les vecteurs directeurs de  $g$  et  $d$  sont  $\vec{v}_g(0, b, -c)$   $\vec{v}_d(a, b, c)$

Soit  $\pi_1$  le plan parallèle à  $g$  et contenant  $d$  :

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{2bcx - acy - abz = 0}$$

2) Soit  $\pi_2$  le plan parallèle à  $d$  et contenant  $g$  :

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z - c \\ 0 & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{2bcx - acy - abz + abc = 0}$$

3) Equations paramétriques de  $d$  :  $d \equiv \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases} \quad (1)$

Equations paramétriques de  $f$  :

$$\text{Milieu de } PN : R\left(0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \vec{v}_f\left(-a, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = (-2a, b, c) \rightarrow f \equiv \begin{cases} x = a - 2ah \\ y = bh \\ z = ch \end{cases} \quad (2)$$

Les droites  $d$  et  $f$  se coupent si les systèmes (1) et (2) sont compatibles

$$\rightarrow \begin{cases} ak = a - 2h \\ bk = bh \\ ck = ch \end{cases} \quad \text{Le système est vérifié pour } k = h = \frac{1}{3}$$

$$\text{Et donc les coordonnées de } d \cap f = S\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

4) Il suffit de vérifier  $\begin{cases} \vec{v}_f \cdot \vec{v}_g = b^2 - c^2 = 0 \rightarrow b = c \quad (\text{car } a, b, c \text{ strictement positifs}) \\ \vec{v}_f \cdot \vec{v}_d = -2a^2 + b^2 + c^2 = 0 \rightarrow \boxed{a = b = c} \end{cases}$

5) Dans ce cas,  $\vec{v}_d(1, 1, 1)$   $\vec{v}_g(0, 1, -1) \rightarrow \vec{v}_d \cdot \vec{v}_g = 0 \rightarrow \vec{v}_d \perp \vec{v}_g$

$f$  est la perpendiculaire commune à  $d$  et  $g$ . La distance entre  $d$  et  $g$  est alors

$$d(d, g) = |RS| = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{18}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

## EXGAE075 – FPMS, Mons, 2002.

- 1) Quelle est l'équation de la sphère de rayon  $r = 3$  tangente au plan  $\pi_1$  d'équation  $x + 2y + 2z + 3 = 0$  au point  $M(1, 1, -3)$  ?  
Cette sphère est située du même côté que l'origine par rapport à  $\pi_1$ .
- 2) Soit  $N$  l'extrémité du diamètre de cette sphère qui admet  $M$  comme autre extrémité. Quelle est l'équation du plan  $\pi_2$  parallèle à  $\pi_1$  et qui passe par  $N$ .
- 3) Quelle est l'équation de la sphère symétrique de la première par rapport au plan  $\pi_2$  ?

---

### Solution proposée par Steve Tumson

1)

Une sphère est tangente à un plan quand son rayon passant par le point de contact est perpendiculaire à ce plan.

Le vecteur directeur du rayon passant par  $M$  est donc :  $\vec{n} = (1, 2, 2)$

L'équation vectorielle de la droite passant par  $M$  et perpendiculaire s'écrit donc :

$$d \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ où } k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est le vecteur allant de } M \text{ et un point quelconque de la droite.}$$

La distance entre  $M$  et le centre de la sphère est le rayon,  $r = 3$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 + (2k)^2 + (2k)^2} = 3 &\Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1 \\ \Rightarrow C = (2, 3, -1) &\quad \text{ou} \quad C = (0, -1, -5) \end{aligned}$$

Si l'on remplace  $C$  dans l'équation de  $\pi_1$  et qu'on compare à l'origine  $(0, 0, 0)$  dans  $\pi_1$  :

$O = (0, 0, 0) \rightarrow$  on a  $3 \rightarrow$  l'origine se trouve du côté positif .

$$\begin{cases} C = (2, 3, -1) \rightarrow \text{on a } 9 \\ C = (0, -1, -5) \rightarrow \text{on a } -9 \end{cases} \Rightarrow C = (2, 3, -1) \Rightarrow \boxed{S \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9}$$

2)

Par le point précédent, on a trouvé le centre  $C$  pour  $k = 1$ , l'extrémité du diamètre passant par  $M$  s'obtient donc pour  $k = 2$  :  $N = (3, 5, 1)$

$\pi_2 // \pi_1$ , leurs coefficients sont donc les mêmes, on en déduit :

$$\begin{aligned} \pi_2 \equiv x + 2y + 2z = d &\xrightarrow{N \in \pi_2} 3 + 2 \times 5 + 2 \times 1 = d \rightarrow d = 15 \\ &\Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv x + 2y + 2z = 15} \end{aligned}$$

3)

Il suffit de trouver le symétrique de  $C$  par  $\pi_2$  :

$$\pi_2 // \pi_1 \text{ et } CM \perp \pi_1 \Rightarrow CM \perp \pi_2$$

Le symétrique  $C'$  se trouve donc sur la droite  $CM$  et s'obtient donc pour  $k = 3$  (un petit schéma suffit pour s'en convaincre)

$$\Rightarrow C' = (4, 7, 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{S' \equiv (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 = 9}$$

---

9 septembre 08

## EXGAE076 – FSA, UCL, Louvain – Juillet 07, série 2.

a) Déterminer le centre  $C$  et le rayon  $R$  de la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z = 0$$

b) Montrer que le point  $P$  de coordonnées  $(0,1,0)$  se trouve à l'extérieur de la sphère.

c) Donner les équations cartésiennes de la droite  $\Delta$  passant par le point  $P$  et par le centre  $C$  de la sphère.

d) Donner une équation cartésienne du plan perpendiculaire à la droite  $\Delta$  et situé à mi-distance du point  $P$  et du centre  $C$  de la sphère.

e) Montrer que ce plan coupe la sphère et calculer le rayon du cercle d'intersection.

a) Transformons l'équation de la sphère  $S$ :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z = 0 &\rightarrow (x^2 - 6x + 9) + y^2 + (z^2 - 8z + 16) = 25 \\ &\rightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25\end{aligned}$$

Le centre de  $S$  est donc  $C(3,0,4)$  et son rayon  $R = 5$

b) Il suffit de montrer que la distance de  $P$  à  $C$  est plus grande que le rayon de  $S$

$$d(C,P) > R \rightarrow d(C,P) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{26} > 5$$

c) Le vecteur directeur de  $\Delta$  est  $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{PC} = (3, -1, 4)$

Ce qui donne directement l'équation cartésienne de  $\Delta$

$$\Delta \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{4} \rightarrow \Delta \equiv \frac{x}{3} = 1-y = \frac{z}{4}$$

d) Le milieu de  $PC$  est  $M = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$

De plus,  $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{PC} = (3, -1, 4)$  est aussi le vecteur normal au plan perpendiculaire à  $\Delta$

Soit  $\pi_M$  ce plan  $\rightarrow \pi_M \equiv 3x - y + 4z + d = 0$

Ce plan passe par  $M \rightarrow 3 \times \frac{3}{2} - 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times 2 + d = 0 \rightarrow d = -12$

Finalement :  $\pi_M \equiv 3x - y + 4z - 12 = 0$

e) Il suffit de montrer que la distance de  $M$  à  $C$  est inférieure à  $R$

$$|CM|^2 = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (4-2)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 4 = \frac{13}{2} < R^2 = 25$$

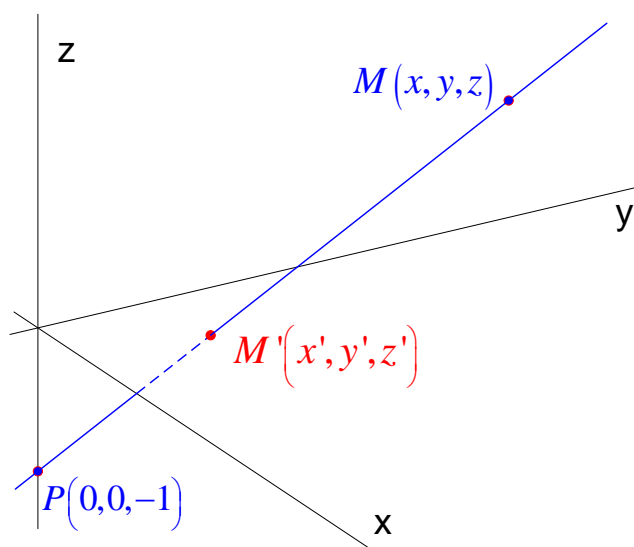
Le rayon  $r$  du cercle d'intersection est obtenu par Pythagore :

$$r = \sqrt{R^2 - |CM|^2} = \sqrt{25 - \frac{13}{2}} = \sqrt{\frac{37}{2}} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

## EXGAE077 – FSA, UCL, Louvain – Juillet 07, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé  $OXYZ$ , on considère les droites passant par le point  $(0, 0, -1)$  et un point quelconque  $M(x, y, z)$  de l'espace.

En appelant  $M'(x', y', z')$  l'intersection d'une telle droite avec le plan  $OXY$ , déterminer les relations liant les coordonnées de  $M'$  à celles de  $M$ .



Le vecteur directeur de  $PM$  est  $\vec{v}_{PM} = (x, y, z+1)$

Les équations paramétriques de  $PM$  sont :  $PM \equiv \begin{cases} X = xk \\ Y = yk \\ Z = -1 + (z+1)k \end{cases}$

Le point de percée  $M'$  de  $PM$  dans le plan  $OXY$  correspond à  $Z = 0$

$$\rightarrow 0 = -1 + (z+1)k \rightarrow k = \frac{1}{1+z}$$

Donc  $M'$  a pour coordonnées :  $M' = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0 \right)$

Le 30 jan 08.



## EXGAE078 – FACSA, ULG, Liège – septembre 08.

Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé:

(a) Déterminer une équation du plan  $\pi$  issu du point de coordonnées  $(1,1,1)$  et incluant la droite

$$d \text{ d'équations : } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

(b) En fonction d'un ou de plusieurs paramètres de votre choix, donner une équation pour les plans perpendiculaires à  $\pi$  qui passent par l'origine du repère.

(c) Parmi les plans évoqués au point (b), donner une équation pour celui dont l'intersection avec  $\pi$  est parallèle à  $d$ .

---

### Solution proposée par Thomas Belligoi

1. Soit la droite  $d$  définie par

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

La direction de cette droite est

$$\vec{d} = \left( \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \right) = (2, -4, 2)$$

Soit  $D$  un point de  $d$  de coordonnées  $(3, -1, -1)$ . On obtient un second vecteur directeur du plan  $\pi$  :

$$\overrightarrow{PD} = (3 - 1, -1 - 1, -1 - 1) = (2, -2, -2)$$

L'équation du plan  $\pi$  s'écrit

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 1 & 1 \\ y - 1 & -1 & -2 \\ z - 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3x - 2y - z + 6 = 0$$

2. Un vecteur normal du plan  $\pi$  est

$$\vec{n}_\pi : (3, 2, 1)$$

Par conséquent, si on désigne par  $\vec{n}_\perp : (a, b, c)$ ,  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , les vecteurs normaux des plans perpendiculaires à  $\pi$ , on doit vérifier :

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\perp = 3a + 2b + c = 0$$

L'équation cartésienne de ces plans prend la forme suivante

$$\pi_\perp \equiv ax + by + cz = 0$$

d'où

$$\pi_\perp \equiv ax + by - (3a + 2b)z = 0$$

3. L'intersection du plan  $\pi$  et de la famille de plans perpendiculaires  $\pi_{\perp}$  est la droite  $p$  d'équations

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ -3x - 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

et de direction

$$\vec{p} = \left( \left| \begin{array}{cc} b & c \\ -2 & -1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} c & a \\ -1 & -3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a & b \\ -3 & -2 \end{array} \right| \right) = (-b + 2c, -3c + a, -2a + 3b)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  vérifient toujours la condition  $3a + 2b + c = 0$ .

Par conséquent, la droite d'intersection  $p$  sera parallèle à la droite  $d$  si la relation suivante est vérifiée

$$\vec{p} // \vec{d}$$

Il vient :

$$\begin{cases} -b + 2c = 1 \\ -3c + a = -2 \\ -2a + 3b = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

ce qui mène à  $(a, b, c) = (-2, 1, 4)$ .

L'équation du plan  $\pi_{\perp}^*$  dont l'intersection avec  $\pi$  est parallèle à  $d$  est

$$\pi_{\perp}^* \equiv -2x + y + 4z = 0$$

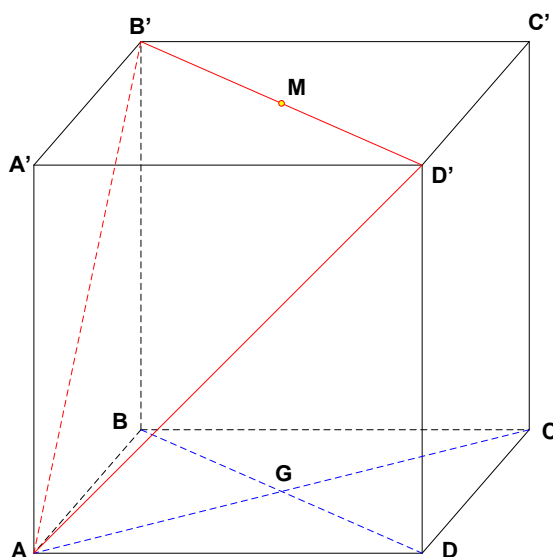
## EXGAE079 – FACSA, ULG, Liège, juillet 08.

Dans l'espace, on considère un cube  $ABCD A' B' C' D'$ , avec  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$  et  $\overline{AB} = \overline{DC}$ . On note  $G$  le centre de gravité du carré  $ABCD$  et  $K$  le point d'intersection de la droite  $A'G$  et du plan  $AB'D'$

- Déterminer la position de  $K$  sur le segment  $[A', G]$
- Démontrer que  $K$  appartient à la médiane issue de  $A$  du triangle  $AD'B'$

---

**Solution proposée par Frédéric Garcet**



a) Les coordonnées des points sont : (avec  $a \neq 0$ )

$$B:(0,0,0); \quad A:(2a,0,0); \quad C:(0,2a,0); \quad D:(2a,2a,0)$$

$$B':(0,0,2a); \quad A':(2a,0,2a); \quad C':(0,2a,2a); \quad D':(2a,2a,2a)$$

$$\text{Donc : } G:(a, a, 0)$$

$$\text{Soit : } K = A'G \cap AB'D'$$

$K \in$  donc à  $A'G$  dont nous pouvons facilement établir l'équation :

$$\overrightarrow{v_{A'G}} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{La droite } A'G \equiv \frac{x-2a}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2a}{2} (=h) \text{ ou encore } A'G \equiv \begin{cases} x = h + 2a \\ y = -h \\ z = 2h + 2a \end{cases} \quad (1)$$

$K \in$  aussi au plan  $AB'D'$ , dont l'équation est :

$$\overrightarrow{AB'}: \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD'}: \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Le plan } AB'D' \equiv \begin{vmatrix} x-2a & -2a & 0 \\ y & 0 & 2a \\ z & 2a & 2a \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow AB'D' \equiv (x-2a)(-4a^2) + y \cdot 4a^2 + z(-4a^2) = 0$$

$$-x + 2a + y - z = 0 \quad (2)$$

Les coordonnées du point  $k$  correspondent à la valeur de  $h$  qui satisfait l'équation (2)

$$(1) \text{ et } (2) \rightarrow -(h+2a) + 2a - h - (2h+2a) = 0 \rightarrow -h - 2a + 2a - h - 2h - 2a = 0$$

$$\rightarrow h = -\frac{a}{2} \rightarrow K: \left( \frac{3a}{2}, \frac{a}{2}, a \right) \text{ qui est bien le milieu de } [A'G]$$

$$\text{b) } M \text{ est le milieu de } [B'D'] \rightarrow M: \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AM}: \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AM \equiv \frac{x-2a}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\text{On vérifie que } K \in AM: \frac{\frac{3a}{2} - 2a}{-1} = \frac{\frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{2} \rightarrow \frac{-a/2}{-1} = \frac{a/2}{1} = \frac{a/2}{1} \quad \text{OK}$$