

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie analytique dans l'espace**

**GAE 8**

**EXGAE080 – EXGAE089**

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson**

Décembre 08

## EXGAE080 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08, série 1.

On considère la droite  $d_1$ , passant par le point  $(1, 0, 0)$  et parallèle au vecteur  $\vec{x} = (1, 2, 1)$ ,  
et la droite  $d_2$ , passant par le point  $(-3, 1, 0)$  et parallèle au vecteur  $\vec{y} = (-1, 1, -1)$ .  
Soit, en outre, les points  $A = (1, 0, 2)$  et  $B = (0, -1, 2)$

- a) Donnez l'équation du plan  $\pi_0$  passant par  $A$  et contenant  $d_1$
- b) Donnez l'équation du plan  $\beta$  passant par  $A$  et perpendiculaire à  $d_1$
- c) Calculez la distance de  $A$  à  $d_1$
- d) Donnez l'équation du plan  $\pi_1$  passant par  $B$  et parallèle au plan  $\pi_0$
- e) Donnez les équations de la droite  $d_3$  joignant le point  $B$  au point d'intersection de la droite  $d_2$  avec le plan  $\pi_1$ .

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

$$a) d_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in d_1$$

Il faut donc trouver un plan passant par  $A, M$  et  $N$  :

$$\pi_0 \equiv \overline{OM} + r_0 \overline{MA} + k_0 \overline{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + k_0 \\ y = 2k_0 \\ z = 2r_0 + k_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_0 \equiv 2x - y = 2}$$

b) Les coefficients d'un tel plan sont désignés par le vecteur normal  $\vec{x}$  :  $\beta \equiv x + 2y + z = d$

Le point  $A$  appartenant au plan, on a :  $d = 3$

$$\boxed{\beta \equiv x + 2y + z = 3}$$

c) Il suffit de trouver le point de percée  $P$  de  $d_1$  dans  $\beta$  puis de calculer la distance entre  $A$  et  $P$  :

$$d_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r_1 \\ y = 2r_1 \\ z = r_1 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \cap \beta} 1 + r_1 + 4r_1 + r_1 = 3 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P = \left( \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow d(A, d_1) = d(A, P) = \sqrt{\left( \frac{4}{3} - 1 \right)^2 + \left( \frac{2}{3} - 0 \right)^2 + \left( \frac{1}{3} - 0 \right)^2} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

d) Si les plans sont parallèles, ils ont le même vecteur normal, donc les mêmes coefficients :

$$\pi_1 \equiv 2x - y = d$$

Ce plan passe par  $B$  et donc  $d = 1$

$$\boxed{\pi_1 \equiv 2x - y = 1}$$

e) Le point  $I$  d'intersection (de percée) s'obtient de façon classique :

$$d_2 \equiv \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - r_2 \\ y = 1 + r_2 \\ z = -r_2 \end{cases} \xrightarrow{d_2 \cap \pi_1} -6 - 2r_2 - 1 - r_2 = 1 \Leftrightarrow r_2 = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow I = \left( -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

La droite recherchée est donc :

$$d_3 \equiv \overline{OB} + r_3 \overline{BI} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d_3 \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3}r_3 \\ y = -1 - \frac{2}{3}r_3 \\ z = 2 + \frac{2}{3}r_3 \end{cases} \xrightarrow{r_3 = -3x} \boxed{d_3 \equiv \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}}$$

## EXGAE081 – FPMs, Mons, juillet 08, série 1.

Dans le système d'axes orthonormé, soit une droite  $a$  passant par le point  $A$  de coordonnées  $(1, 2, 3)$  et soit  $(5, 2, 1)$  un triplet de paramètres directeurs de cette droite  $a$ .

Par un point  $P$  de coordonnées  $(4, 8, 6)$ , on abaisse la perpendiculaire sur cette droite  $a$  et on appelle  $Q$  le pied de cette perpendiculaire sur cette droite  $a$ . **Déterminez les coordonnées de ce point  $Q$ .** Déterminez ensuite **les équations paramétriques du lieu des points équidistants de  $A$  et de  $Q$  et qui appartiennent au plan d'équation cartésienne  $[X = 0]$ .**

---

### Solution proposée par Fabienne ZOETARD

$$a \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

a) Le plan  $\pi$  est  $\perp$  à  $a$  et inclut  $P \rightarrow \pi \equiv 5x + 2y + z = r$  où  $r$  est tel que  $5 \times 4 + 2 \times 8 + 1 \times 6 = r$   
 $\rightarrow \pi \equiv 5x + 2y + z = 42$

$Q$  : point de percée de  $a$  dans  $\pi$

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 42 \\ x - 1 = 5z - 15 \\ y - 2 = 2z - 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5z - 14 \\ y = 2z - 4 \\ 5x + 2y + z = 42 \end{cases} \rightarrow 25z - 70 + 4z - 8 + z = 42 \rightarrow z = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow \boxed{Q(6, 4, 4)}$$

b) Les points équidistants de  $A$  et de  $Q$  sont dans le plan médiateur de  $[AQ]$

$$M : \text{milieu de } [AQ] \rightarrow M\left(\frac{7}{2}, 3, \frac{7}{2}\right) \in \alpha$$

$$\overline{AQ} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \perp \alpha \rightarrow \alpha \equiv 5x + 2y + z = r \text{ où } r \text{ est tel que } 5 \times \frac{7}{2} + 8 \times 3 + \frac{7}{2} \times 1 = r \rightarrow r = 27$$

$$\rightarrow \alpha \equiv 5x + 2y + z = 27$$

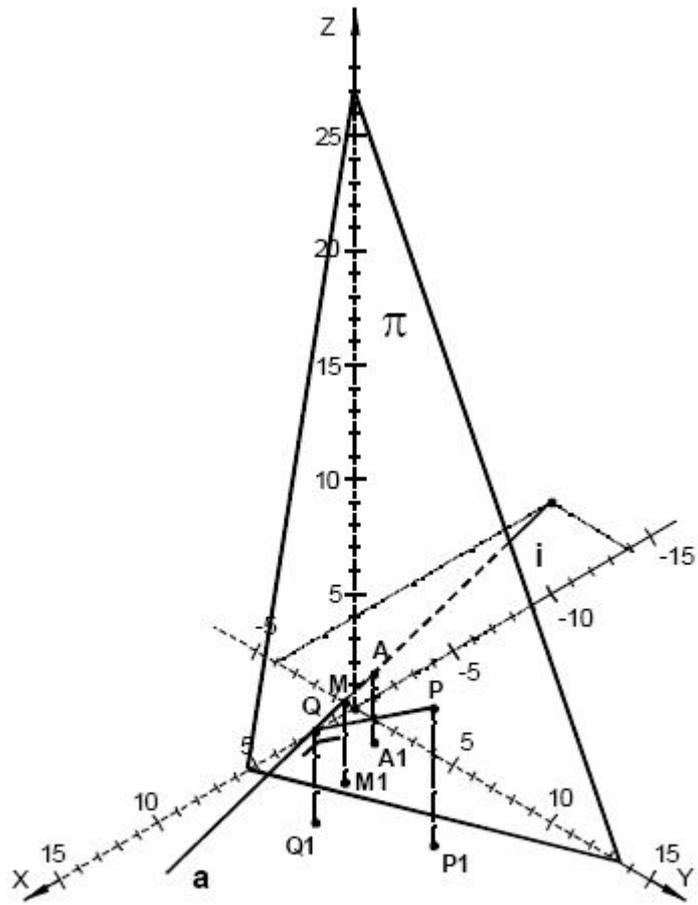
Le lieu des points équidistants de  $A$  et  $B$  et qui appartiennent au plan  $x = 0$  est

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 27 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 27 - 2\lambda \end{cases}$$

La figure suivante est reprise de

<http://ressourcescms.fpm.ac.be/DocuWebFpms/Forms/AllItems.aspx?RootFolder=%2fDocuWebFpms%2fDossier%20admission&View=%7b0f3B00E4%2dEA3B%2d4EF2%2dB23C%2d446AB398F606%7d>

Prof. Dr. ir Y. DURAND ( Titulaire de la Chaire de Géométries et Communication Graphique à la FPMs )



Représentation isométrique exacte  
 (les points indicés « 1 » sont les projections des points sur OXY)

Le 25 juillet 08.

## EXGAE082 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08, série 2.

Soit la droite  $d_1$ , passant par  $A = (1, 2, 3)$  et  $B = (-1, 0, 2)$ , et la droite  $d_2$ , passant par  $C = (0, 1, 7)$  et  $D = (2, 0, 5)$

- 1) Ecrivez l'équation du plan  $\pi$  parallèle à  $d_1$  et contenant  $d_2$
- 2) Calculez la distance entre la droite  $d_1$  et le plan  $\pi$
- 3) Ecrivez les équations de la droite passant par  $C$  et orthogonale à  $d_1$  et à  $d_2$
- 4) Cherchez un point  $P_1$  de  $d_1$  et un point  $P_2$  de  $d_2$  tels que le vecteur  $\overline{P_1P_2}$  soit orthogonal à  $d_1$  et à  $d_2$

---

### Solution proposée par Steve Tumson

1.

Ce plan doit être parallèle à  $d_1$ , les coefficients sont donc les composantes d'un vecteur normal à  $d_1$ .

L'équation du plan se note :  $\pi \equiv ax + by + cz = d$

Le vecteur directeur de  $d_1$  est :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2, -2, -1)$

Deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul, il faut donc :  $-2a - 2b - c = 0$

L'équation vectorielle de  $d_2$  est :

$$\begin{aligned}d_2 &\equiv \overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in d_2 \xrightarrow{d_2 \subset \pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \pi\end{aligned}$$

Nous avons pour le moment 3 équations à 4 inconnues, donc un système simplement indéterminé. Nous noterons donc  $a = \lambda$  par exemple. (On ne peut pas choisir un troisième point de  $d_2$  pour compléter les équations car une droite est définie par deux points, tout point supplémentaire serait redondant et nous amènerait à une solution nulle)

Il suffit maintenant de résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues obtenu (par le produit scalaire nul et en remplaçant les deux points de  $d_2$  dans l'équation du plan) :

$$\begin{cases} 2b + c = -2\lambda \\ b + 7c - d = 0 \\ 5c - d = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = -2\lambda \\ c = 2\lambda \\ d = 12\lambda \end{cases}$$

On a donc :

$$\pi \equiv \lambda x - 2\lambda y + 2\lambda z = 12\lambda \Leftrightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y + 2z = 12}$$

2.

Un vecteur normal au plan  $\pi$  est  $\vec{n} = (1, -2, 2)$ . La droite perpendiculaire  $n$  commune au plan  $\pi$  et à la droite  $d_1$ , passe par un point de la droite  $d_1$ , le point  $B$  par exemple.

Son équation vectorielle est donc :

$$n \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$$

Pour trouver le point de percée  $P$  de  $n$  dans  $\pi$ , il suffit de substituer les équations paramétriques de la droite  $n$  dans l'équation de  $\pi$  :

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 12 \\ x = -1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow -1 + k + 4k + 4 + 4k = 12 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow P = (0, -2, 4)$$

La distance recherchée est donc :

$$d(d_1, \pi) = d(B, P) = \sqrt{(0+1)^2 + (-2-0)^2 + (4-2)^2} \Leftrightarrow \boxed{d(d_1, \pi) = 3}$$

3.

L'équation d'une droite s'écrit comme un système de deux équations de plans. Ici, il s'agit d'un plan  $\pi_1$  perpendiculaire à  $d_1$  passant par  $C$  et d'un autre  $\pi_2$  perpendiculaire à  $d_2$  passant par  $C$ .

Vu que les plans sont perpendiculaires aux droites, leurs coefficients sont ceux de leur vecteur normal qui n'est autre que le vecteur directeur des droites  $d_1$  et  $d_2$  :

$$\begin{cases} n_1 = \overline{AB} = (-2, -2, -1) \Rightarrow \pi_1 = -2x - 2y - z - d_1 = 0 \\ n_2 = \overline{CD} = (2, -1, -2) \Rightarrow \pi_2 = 2x - y - 2z - d_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{C \in \pi_1, \pi_2} \begin{cases} d_1 = 9 \\ d_2 = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 9 \\ -2x + y + 2z = 15 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} P_1 = \begin{cases} x_1 = -1 - 2k_1 \\ y_1 = -2k_1 \\ z_1 = 2 - k_1 \end{cases} \\ P_2 = \begin{cases} x_2 = 2k_2 \\ y_2 = 1 - k_2 \\ z_2 = 7 - 2k_2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \begin{cases} x = x_2 - x_1 = 2k_1 + 2k_2 + 1 \\ y = y_2 - y_1 = 2k_1 - k_2 + 1 \\ z = z_2 - z_1 = k_1 - 2k_2 + 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{P_1P_2} \perp d_1 \Leftrightarrow 2x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow 9k_1 + 9 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1 \Rightarrow \boxed{P_1 = (1, 2, 3)} \\ \overline{P_1P_2} \perp d_2 \Leftrightarrow -2x + y + 2z = 0 \Leftrightarrow -9k_2 + 9 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 1 \Rightarrow \boxed{P_2 = (2, 0, 5)} \end{cases}$$

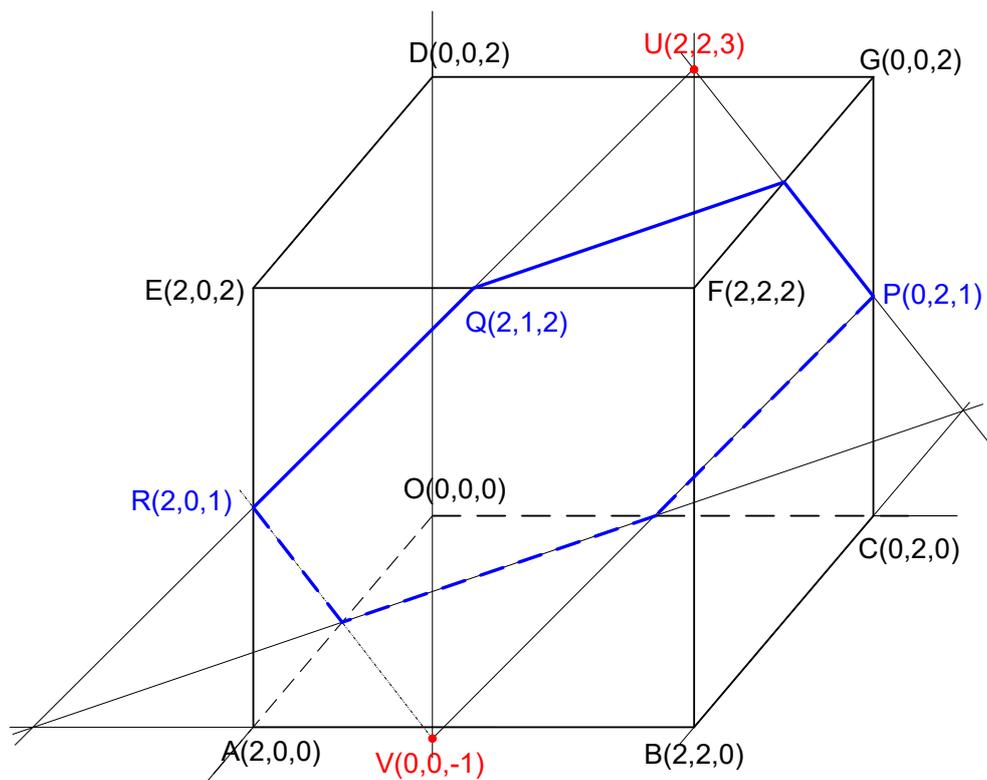
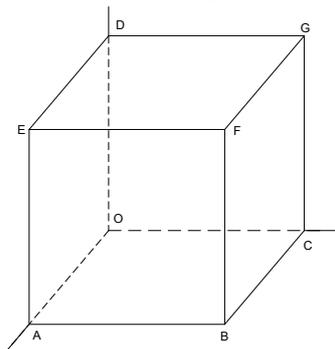
## EXGAE83 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008

Soit le cube  $OABCDEFG$  de côté égal à 2 (cf.figure).

On donne les points  $P(0,2,1)$ ,  $Q(2,1,2)$  et  $R(2,0,1)$ .

On demande :

- D'écrire une équation cartésienne du plan  $\pi$  passant par  $P, Q$  et  $R$ .
- De déterminer les coordonnées des points  $U$  et  $V$  du plan  $\pi$  qui appartiennent à  $BF$  et  $DO$ , respectivement.
- De déterminer la nature et l'aire du quadrilatère  $VRUP$ .
- D'écrire des équations de la perpendiculaire menée de  $B$  au plan  $\pi$ .
- De calculer la distance de  $D$  à  $\pi$ .
- De déterminer la nature et l'aire du polygone d'intersection entre le cube et le plan  $\pi$ .



a) Equation du plan  $\pi$ :  $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\rightarrow \pi \equiv -2(x-2) - 2y + 2(z-1) = -2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y - z - 1 = 0}$$

b) Intersection de  $DO$  avec  $\pi$ :  $DO \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow V = DO \cap \pi = (0, 0, -1)$

Intersection de  $BF$  avec  $\pi$ :  $BF \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow U = BF \cap \pi = (2, 2, 3)$

c)  $\left. \begin{array}{l} \overline{RU}(0, 2, 2) \\ \overline{VP}(0, 2, 2) \end{array} \right\} \rightarrow RU // VP$   
 $\left. \begin{array}{l} \overline{RV}(-2, 0, -2) \\ \overline{UP}(-2, 0, -2) \end{array} \right\} \rightarrow RV // UP$   
 $\rightarrow VRUP$  est un parallélogramme

$$\text{Aire de } VRUP = |\overline{RV} \cdot \overline{RU}| = |(-2, 0, -2) \cdot (0, 2, 2)| = 4$$

d) Le vecteur normal au plan  $\pi$ :  $\vec{n}_\pi(1, 1, -1)$

L'équation paramétrique de la perpendiculaire abaissée de  $B$  sur  $\pi$ :  $p \equiv \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 + k \\ z = -k \end{cases}$

e) La distance de  $D$  à  $\pi$

$$d(B, \pi) = \left| \overline{BU} \cdot \frac{\vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|} \right| = \left| (0, 0, 3) \cdot \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \left| -\frac{3}{\sqrt{3}} \right| = \boxed{\sqrt{3}}$$

f) Le polygone d'intersection est un hexagone.

Soit  $a = \|\overline{RQ}\| = \sqrt{2}$  le côté de l'hexagone. Il est facile de montrer que l'aire est donnée

$$\text{par : } S = 6 \times \frac{1}{2} \times a^2 \sin 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

Donc :  $\boxed{S = \frac{3a\sqrt{6}}{2}}$

## EXGAE84 - EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

a) Trouver le centre et le rayon de la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y - 2z = 15/4$$

b) Donnez les équations de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan  $\pi$  d'équation  $x + 2y + 2z = 2$

c) Déterminez les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan  $\pi$

---

### Résolution proposée par Steve TUMSON

a)

$$(x-2)^2 - 4 + (y-1/2)^2 - (1/4) + (z-1)^2 - 1 = 15/4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1/2)^2 + (z-1)^2 = 9 \rightarrow \boxed{\text{Rayon 3 et centre } \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)}$$

b)

$$d \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = (1/2) + 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x - 2 \\ y = (1/2) + 2x - 4 \\ z = 1 + 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 2y - 4x + 7 = 0 \\ z - 2x + 3 = 0 \end{cases}}$$

c)

Le diamètre étant une droite passant par le centre de la sphère, il s'agit en fait de trouver le point de percée de  $d$  dans la sphère.

Il suffit pour cela de remplacer l'équation paramétrique de la droite  $d$  dans celle de la sphère :

$$(k)^2 + (2k)^2 + (2k)^2 = 9 \Leftrightarrow 9k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(3, \frac{5}{2}, 3\right) \text{ et } \left(1, -\frac{3}{2}, -1\right)}$$

## EXGAE85 - EPL, UCL, Louvain, Juillet 2009 série 1.

Un parabolôïde est donné par  $z = a(x^2 + y^2)$  dans un système de coordonnées cartésiennes.

L'on dénote par  $o$  l'origine des coordonnées.

Quelles sont les coordonnées du centre de la sphère qui passe par  $o$  et qui a, en ce même point, suivant les coordonnées  $x$  et  $y$ , les mêmes dérivées première et seconde que le parabolôïde (tangence avec même courbure) ?

---

Ce problème n'est pas hors-matière. Il est même relativement simple à résoudre si on réalise que le parabolôïde proposé est une surface de révolution d'axe  $OZ$ .

Pour de simples raisons de symétrie, on en déduit que la sphère cherchée a son centre sur l'axe  $OZ$ .

En coupant par le plan  $XOZ$ , le problème se ramène à un problème à deux dimensions.

Le parabolôïde coupe le plan  $XOZ$  selon une parabole d'équation :

$$z = ax^2 \rightarrow z' = 2ax \rightarrow z'' = 2a$$

La sphère coupe ce même plan selon un cercle. Soit  $R$  le rayon de ce cercle (donc de la sphère).

L'équation de ce cercle qui passe par l'origine est :

$$x^2 + (z - R)^2 = R^2 \rightarrow z = -\sqrt{R^2 - x^2} + R$$

(Signe - car on prend la partie inférieure du cercle).

$$\rightarrow z' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \rightarrow z'' = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}}$$

On a donc :

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2ax \\ -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}} = 2a \end{cases} \rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2a}}$$

Les coordonnées du centre de la sphère sont :  $\boxed{\left(0, 0, \frac{1}{2a}\right)}$

## EXGAE86 - EPL, UCL, Louvain, Juillet 2009 série 2.

Dans l'espace, les points  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  d'un plan  $P$  sont définis par  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$  où  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  est un vecteur unitaire et  $d$  est une constante (voir notes ci-dessous).

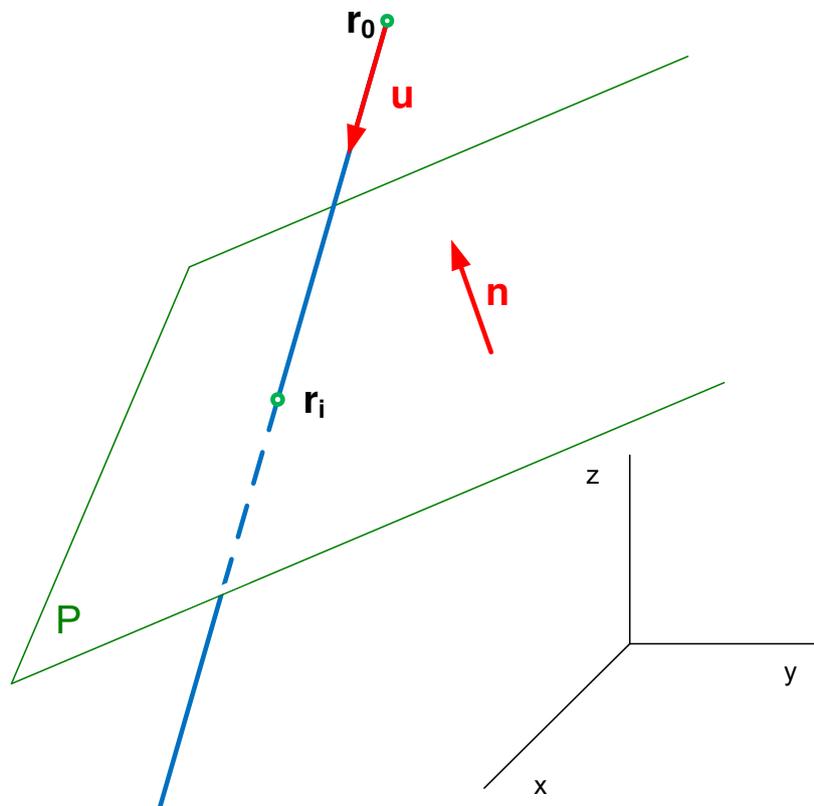
On considère un point  $\mathbf{r}_0$  qui n'appartient pas à  $P$  et un vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  qui n'est pas parallèle à  $P$ .

Soit la droite  $D$ , qui passe par  $\mathbf{r}_0$  et qui est parallèle à  $\mathbf{u}$ . Son point d'intersection avec  $P$  est nommé  $\mathbf{r}_i$ .

1. Faites un dessin représentant une configuration possible du problème ; représentez-y les différents objets (vecteurs, points, plan, droite) mentionnés ci-dessus.
2. Donnez une équation paramétrique pour la droite  $D$ .
3. Donnez, uniquement en fonction des vecteurs  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{r}_0$  et de la constante  $d$ , la distance entre  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_i$ .

Note 1 :  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$  représente le produit scalaire entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{n}$ . Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.

Note 2 : Pour vous convaincre de ce que  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$  représente bien l'équation d'un plan, explicitez le produit scalaire.



L'équation paramétrique de  $D$ , avec  $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  et  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ ,

$$D \equiv \begin{cases} x = x_0 + \alpha k \\ y = y_0 + \beta k \\ z = z_0 + \gamma k \end{cases}$$

Ce qui sous forme vectorielle s'écrit :  $D \equiv \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + k\mathbf{u}$

Si  $\mathbf{r}_i$  est le point de percée de  $D$  dans le plan  $P$  :

$$\begin{array}{l} \text{alors} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + k\mathbf{u} \quad (1) \\ \text{et aussi} \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n} = d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + k\mathbf{u} \\ \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n} = d \end{array}} \right\} \rightarrow (\mathbf{r}_0 + k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = d \rightarrow k = \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}$$

$$\text{On remplace dans (1)} \rightarrow \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \rightarrow \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 = \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}$$

La distance entre  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_0$  est le module de  $\Delta \mathbf{r}$

$$\rightarrow \|\Delta \mathbf{r}\| = \left\| \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \right\|$$

$$\text{or } \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \text{ est un simple nombre réel } \rightarrow \|\Delta \mathbf{r}\| = \left| \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \right| \|\mathbf{u}\|$$

et comme  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire :  $\|\mathbf{u}\| = 1$

$$\text{Finalement : } \boxed{\|\Delta \mathbf{r}\| = \left| \frac{d - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \right|}$$

Exemple numérique (Pour illustration. Ce n'est pas demandé dans la question)

Soit  $\mathbf{n} : \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ ;  $d = 2$ ;  $\mathbf{r}_0 : (1,2,3)$ ;  $\mathbf{u} : \frac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}}$

Méthode "traditionnelle"

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{k}{\sqrt{6}} \\ y = 2 - \frac{2k}{\sqrt{6}} \\ z = 3 - \frac{k}{\sqrt{6}} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1 + \frac{k}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} + \frac{2 - \frac{2k}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} + \frac{3 - \frac{k}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} = 2 \rightarrow k = \sqrt{6}(3 - \sqrt{3})$$

$$P \equiv \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_i : \left( 1 + (3 - \sqrt{3}); 2 - 2(3 - \sqrt{3}); 3 - (3 - \sqrt{3}) \right) = (4 + \sqrt{3}; -4 + 2\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

$$\rightarrow \|\Delta \mathbf{r}\| = \sqrt{6}(3 - \sqrt{3})$$

Note : la valeur de  $k$  donnait déjà la réponse puisque  $\Delta \mathbf{r} = k\mathbf{u}$  avec  $\|\mathbf{u}\| = 1$

Méthode alternative

Cherchons la distance  $d(\mathbf{r}_0, P)$  de  $\mathbf{r}_0$  au plan  $P$ . Soit  $\mathbf{a}$  un point quelconque de  $P$ .

(Bien sûr, on choisit  $\mathbf{a}$  pour faciliter les calculs).  $\mathbf{a} : (2\sqrt{3}, 0, 0)$

On en déduit le vecteur  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{a} = (1 - 2\sqrt{3}, 2, 3)$

$$\rightarrow \text{la distance } d(\mathbf{r}_0, P) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 2\sqrt{3} + 2 + 3) = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Or } d(\mathbf{r}_0, P) \text{ est aussi égal à } \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{k}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}(1 - 2 - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{3}k$$

$$\rightarrow k = -\frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6}(3 - \sqrt{3}) \rightarrow \|\Delta \mathbf{r}\| = |k| \cdot \|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}(3 - \sqrt{3})$$

Utilisation de la formule trouvée

$$\|\Delta \mathbf{r}\| = \frac{2 - (1,2,3) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}}{\frac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}} \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} - (1+2+3)}{\frac{1-2-1}{\sqrt{6}}} = \sqrt{6}(3 - \sqrt{3})$$

Visiblement plus simple.

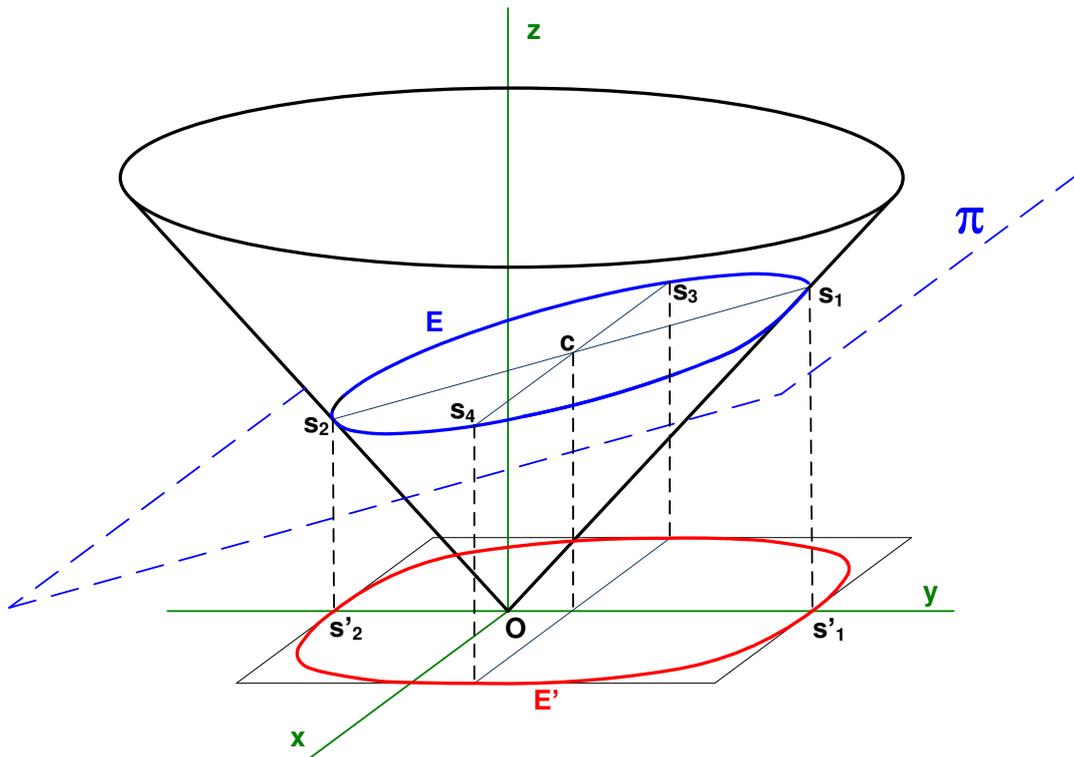
## EXGAE87 - EPL, UCL, Louvain, Septembre 2009.

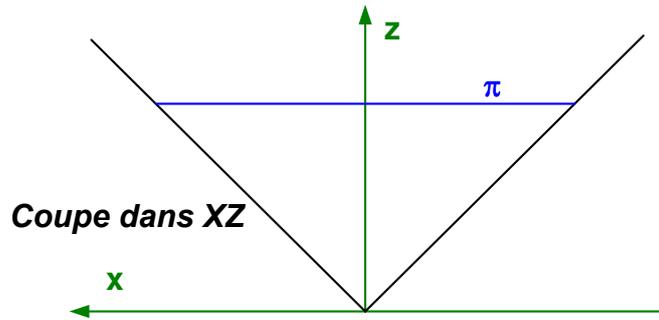
On considère, dans un système de coordonnées cartésiennes, l'ellipse située à l'intersection d'un cône décrit par l'équation  $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$  avec le plan  $z = by + d$ . On supposera que  $a, b, d > 0$  et  $a > b$ .

1. Dessinez des coupes du plan et du cône dans les plans  $XY$  et  $YZ$  ainsi qu'une projection (parallèlement à l'axe  $z$ ) de l'ellipse dans le plan  $XY$ .
2. Quelle est la longueur (en fonction des paramètres  $a, b$  et  $d$ ) du grand axe de l'ellipse? Gardez à l'esprit que l'ellipse est située dans un plan non perpendiculaire à l'axe du cône.
3. Le petit axe se trouve dans un plan  $y = c$ . Trouvez la constante  $c$ .
4. Expliquez brièvement (4 lignes maximum) comment vous pouvez trouver la longueur du petit axe. Un dessin sera le bienvenu.

---

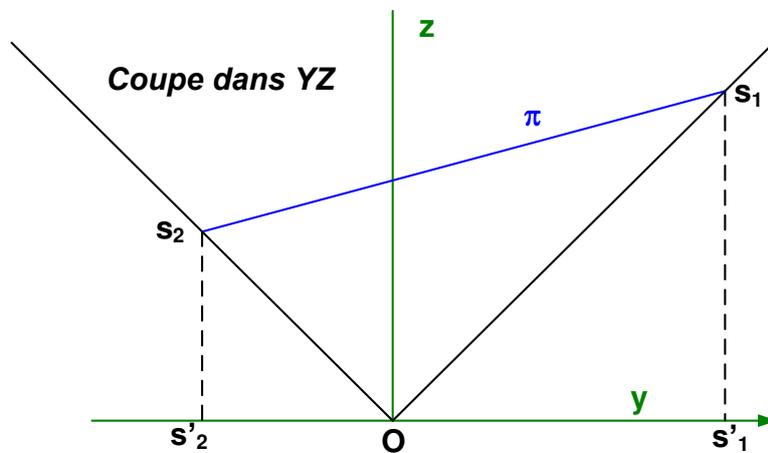
### Résolution proposée par Paul Etienne





Coupe dans  $(X, Z) \equiv y = 0$

- Le cône coupe le plan en deux droites  $\begin{cases} z^2 = a^2 x^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \pm ax \\ y = 0 \end{cases}$
- Le plan  $\pi$  coupe ce plan en une droite horizontale  $\begin{cases} z = d \\ y = 0 \end{cases}$
- L'ellipse  $E$  rencontre le plan en deux points  $\left(\frac{d}{a}, 0, d\right)$  et  $\left(-\frac{d}{a}, 0, d\right)$



Coupe dans  $(Y, Z) \equiv x = 0$

- Le cône coupe le plan en deux droites  $\begin{cases} z^2 = a^2 y^2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \pm ay \\ x = 0 \end{cases}$
- Le plan  $\pi$  coupe ce plan en une droite  $\begin{cases} x = 0 \\ z = by + d \end{cases}$
- L'ellipse  $E$  rencontre le plan aux sommets du grand axe

$$s_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = ay \\ z = by + d \end{cases} \rightarrow s_1 \left( 0, \frac{d}{a-b}, \frac{ad}{a-b} \right)$$

$$s_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = -ay \\ z = by + d \end{cases} \rightarrow s_2 \left( 0, -\frac{d}{a+b}, \frac{ad}{a+b} \right)$$

2)  $ZY$  est le plan passant par le sommet du cône et orthogonal à  $X$ , il est le plan de symétrie pour le cône et pour  $\pi$ , donc pour l'ellipse  $E$  qu'il coupe suivant le grand axe.

La longueur de ce grand axe est la longueur entre  $s_1$  et  $s_2$ .

$$d(s_1, s_2) = \sqrt{d^2 \left( \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \right)^2 + a^2 d^2 \left( \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2 d^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{4b^2 a^2 d^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \boxed{\frac{2ad}{a^2 - b^2} \sqrt{1 + b^2}}$$

3) Le centre  $c$  est un point du petit axe. Le centre est le milieu de  $[s_1, s_2]$ .

$$\text{Il a pour ordonnée : } \frac{1}{2} \left( \frac{-d}{a+b} + \frac{d}{a-b} \right) = \frac{d}{2} \left( \frac{-a+b+a+b}{a^2 - b^2} \right) = \frac{bd}{a^2 - b^2}$$

$$\text{Donc le petit axe est dans le plan : } \boxed{y = \frac{bd}{a^2 - b^2}}$$

4) Les deux sommets  $s_3$  et  $s_4$  sont les intersections du plan ci-dessus, du plan  $\pi$  et du cône

$$\text{Il "suffit" donc de résoudre le système } \begin{cases} z^2 = a^2(x^2 + y^2) \\ y = \frac{bd}{a^2 - b^2} \\ y = by + d \end{cases}$$

Il restera à trouver la distance entre ces 2 points, qui ne diffèrent que par leurs abscisses opposées.

#### Remarque

L'équation de  $E'$  est  $(by + d)^2 = a^2(x^2 + y^2)$  ou  $E' = a^2 x^2 + (a^2 - b^2)y^2 - 2bdy - d^2 = 0$

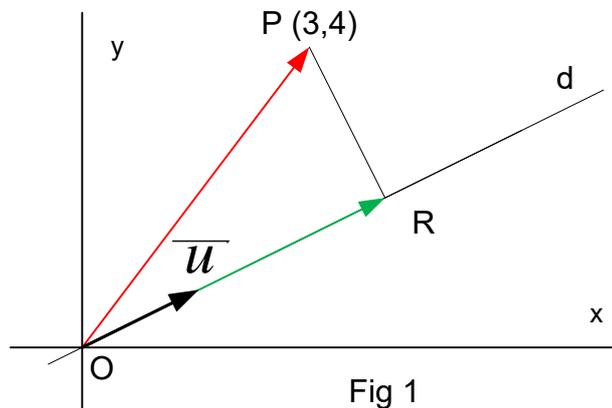
## EXGAE88 - Compléments.

En utilisant uniquement les propriétés des vecteurs déterminer les coordonnées de la projection orthogonale  $R$  d'un point  $P$  :

- 1) Dans l'espace à deux dimensions  $\mathbb{R}^2$ , sur une droite passant par l'origine.
- 2) Dans l'espace à deux dimensions  $\mathbb{R}^2$ , sur une droite ne passant pas par l'origine.
- 3) Dans l'espace à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$ , sur un plan passant par l'origine.
- 4) Dans l'espace à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$ , sur un plan ne passant pas par l'origine.
- 5) Dans l'espace à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$ , sur une droite passant par l'origine.
- 6) Dans l'espace à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$ , sur une droite ne passant pas par l'origine.

Note : Nous utiliserons aussi les méthodes "traditionnelles" à titre de comparaison.

Voir aussi : EXGAE148



### 1) Espace à deux dimensions, droite passant par l'origine.

Soit la droite  $d \equiv y = mx$  et le point  $P(\alpha, \beta)$

Vecteur directeur de la droite :  $\vec{u}(1, m) \rightarrow$  Vecteur unitaire :  $\vec{1}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$$\text{Donc } \vec{OR} = \overbrace{\left( \overbrace{\vec{OP} \cdot \vec{1}_u}^{\text{Un vecteur multiplié par un nombre}} \right) \vec{1}_u}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ = \text{un nombre}}}$$

Remarquons que la distance de  $P$  à la droite  $d$  est le module du vecteur  $\vec{RP}$  :

$$\vec{RP} = \vec{OP} - \vec{OR} \rightarrow d(P, d) = |\vec{RP}|$$

*Exemple*

Soit  $d \equiv y = \frac{x}{2}$  et  $P(3,4)$

a) Méthode vectorielle

$$\vec{u} = (2,1) \rightarrow \vec{1}_n = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} \rightarrow \overline{OR} = \left[ (3,4) \cdot \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} \right] \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = 2(2,1) = (4,2)$$

Et donc les coordonnées cherchées sont :  $R(4,2)$

La distance de  $P$  à  $d$  est  $d(P, d) = |\overline{RP}| = |\overline{OP} - \overline{OR}| = |(3,4) - (4,2)| = |(-1,2)| = \sqrt{5}$

b) Méthode traditionnelle

La droite  $n$  perpendiculaire à  $d$  et passant par  $P$  :  $n \equiv y - 2 = -2(x - 4) \rightarrow y = -2x + 10$

$$R \text{ est l'intersection de } n \text{ et } d : \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = -2x + 10 \end{cases} \rightarrow R(4,2)$$

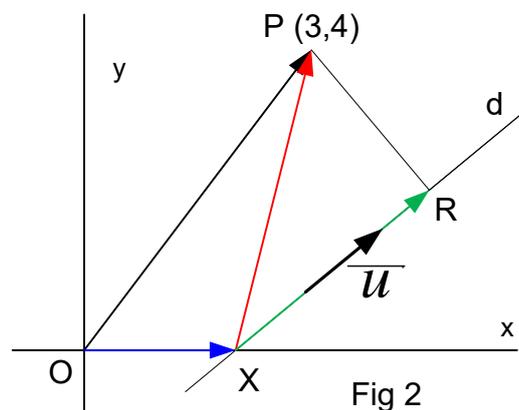
2) Espace à deux dimensions, droite ne passant pas par l'origine.

Soit la droite  $d \equiv y = mx + p$  et le point  $P(\alpha, \beta)$ . Soit  $R$  la projection de  $P$  sur  $d$ .

Le vecteur directeur de la droite est :  $\vec{u}(1, m) \rightarrow$  Vecteur unitaire :  $\vec{1}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Prenons un point quelconque  $X$  de la droite  $d$ .

Alors :  $\overline{XR} = \underbrace{\left( \overline{XP} \cdot \vec{1}_u \right)}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ = \text{un nombre}}} \cdot \vec{1}_u \rightarrow \overline{OR} = \overline{OX} + \overline{XR}$  Ce qui détermine les coordonnées de  $R$ .  
Un vecteur multiplié par un nombre



Exemple (Fig 2)

Soit  $d \equiv y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}$  et  $P(3,4)$

Soit  $X(0,2)$  (Puisque que  $X$  est quelconque, on le choisit pour simplifier les calculs)

a) Méthode vectorielle

$$\vec{u} = (6,5) \rightarrow \vec{1}_u = \frac{(6,5)}{\sqrt{61}} \rightarrow \overline{XR} = (\overline{XP} \cdot \vec{1}_u) \vec{1}_u = \left( \frac{(1,4)(6,5)}{\sqrt{61}} \right) \frac{(6,5)}{\sqrt{61}} = \frac{26}{61} (6,5) = \frac{(156,130)}{61}$$

$$\overline{OR} = \overline{OX} + \overline{XR} = (2,0) + \frac{(156,130)}{61} = \frac{(278,130)}{61} \approx (4.557; 2.131)$$

Et donc les coordonnées cherchées sont :  $R(4.557; 2.131)$

b) Méthode traditionnelle

La droite  $n$  perpendiculaire à  $d$  et passant par  $P$  :  $n \equiv y - 4 = -\frac{6}{5}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{38}{5}$

$$R \text{ est l'intersection de } n \text{ et } d : \begin{cases} y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{6}{5}x + \frac{38}{5} \end{cases} \rightarrow R(4.557; 2.131)$$

4) Espace à trois dimensions, plan passant par l'origine.

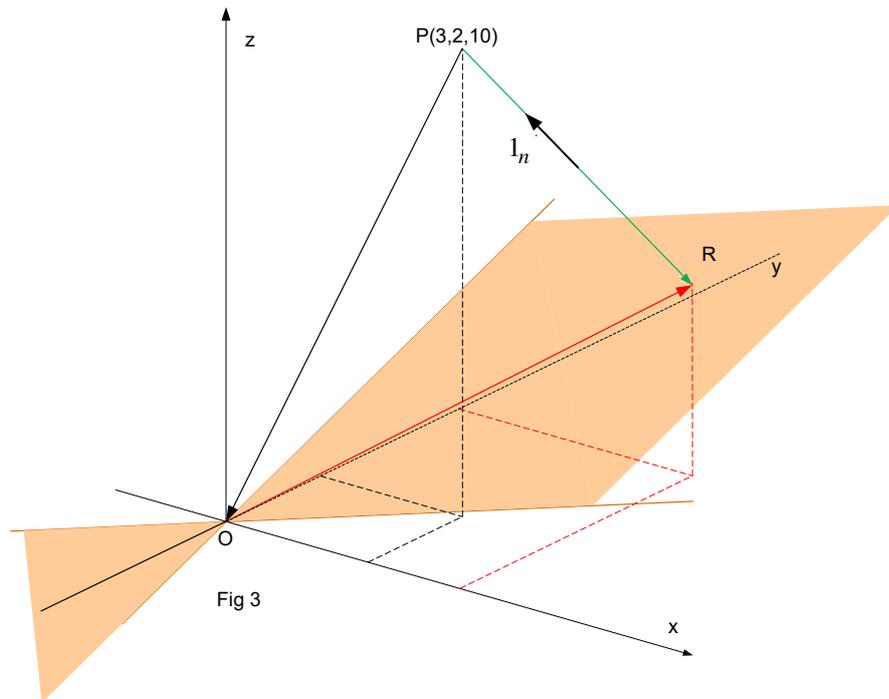
Soit un point  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  et un plan d'équation cartésienne :  $\pi \equiv ax + by + cz = 0$

Un vecteur normal au point est :  $\vec{n}(a, b, c)$  et le vecteur unitaire est  $\vec{1}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Le plan passe par l'origine. Nous avons alors :  $\overline{PR} = \underbrace{(\overline{PO} \cdot \vec{1}_n)}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ = \text{un nombre}}} \cdot \vec{1}_n$

Et finalement :  $\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{PR}$

Les composantes de  $\overline{OR}$  sont les coordonnées de  $R$ .



*Exemple*

a) Méthode vectorielle

Soient :  $P(3, 2, 10)$ ;  $\pi \equiv -2x - 3y + 6z = 0$

$$\vec{n} = (-2, -3, 6) \rightarrow \vec{1}_n = \frac{(-2, -3, 6)}{7} = (-0.286; -0.429; +0.857)$$

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= (\overline{PO} \cdot \vec{1}_n) \cdot \vec{1}_n = ((-3, -2, -10) \cdot (-0.286; -0.429; +0.857)) \cdot (-0.286; -0.429; +0.857) \\ &= -6.854(-0.286; -0.429; +0.857) = (1,960; 2,940; -5,873) \end{aligned}$$

$$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{PR} = (3, 2, 10) + (1,960; 2,940; -5,873) = (4,960; 4,940; 4,127)$$

b) Méthode traditionnelle

$$\text{Equations paramétriques de la droite passant par } P : n \equiv \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 10 + 6k \end{cases}$$

$$\text{Le point } R \text{ appartient à } \pi : -2(3 - 2k) - 3(2 - 3k) + 6(10 + 6k) = 0 \rightarrow k = -\frac{48}{49} = -0.980$$

$$\rightarrow R : \begin{cases} x = 3 - 2 \times (-0.980) = 4.960 \\ y = 2 - 3 \times (-0.980) = 4.940 \\ z = 10 + 6 \times (-0.980) = 4.120 \end{cases} \rightarrow R : (4,960; 4,940; 4,127)$$

4) Espace à trois dimensions, plan ne passant pas par l'origine.

Soit un point  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  et un plan d'équation cartésienne :  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

Un vecteur normal au point est :  $\vec{n}(a, b, c)$  et le vecteur unitaire est  $\vec{1}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Prenons un point  $X$  appartenant au plan  $\left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$ . Ici nous prenons un point particulier pour simplifier les calculs, mais  $X$  peut être quelconque.

Nous avons alors :  $\vec{PR} = \underbrace{(\vec{PX} \cdot \vec{1}_n)}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ = \text{un nombre}}} \cdot \vec{1}_n$

Et finalement :  $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$

Les composantes de  $\vec{OR}$  sont les coordonnées de  $R$ .

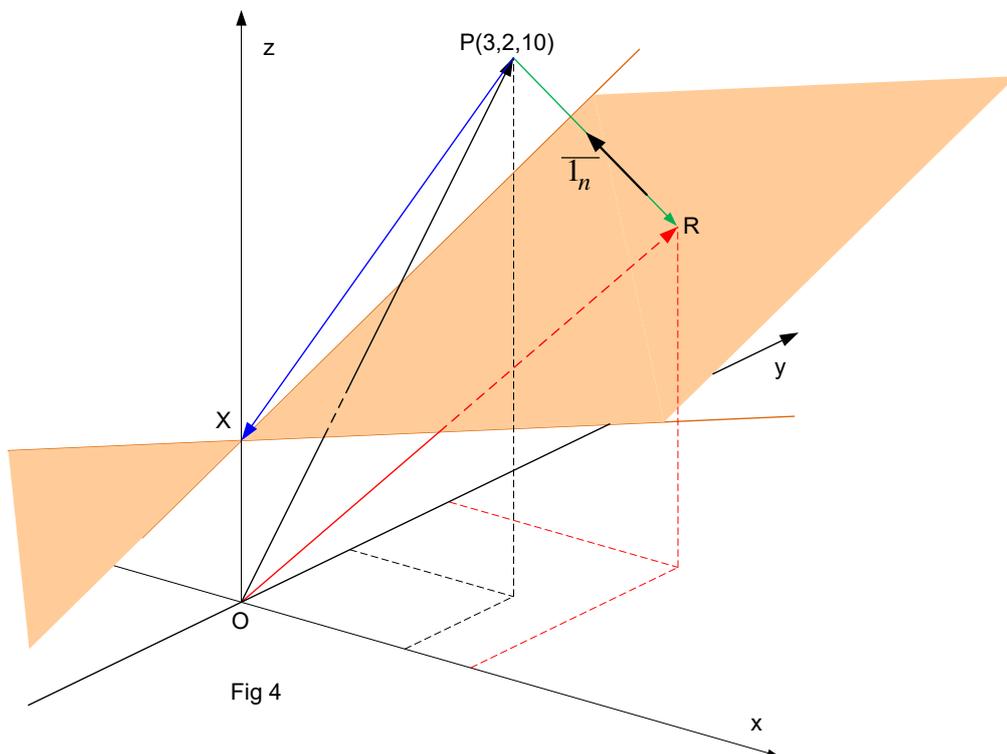


Fig 4

Exemple

Soit :  $P(3,2,10)$ ,  $\pi \equiv -2x - 3y + 6z - 18 = 0$

Soit  $X(0,0,3)$

a) Méthode vectorielle

$$\vec{n}(-2, -3, +6) \rightarrow \vec{1}_n(-0.286, -0.429, +0.857)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX}(0,0,3) \rightarrow \overrightarrow{PR} &= (\overrightarrow{PX} \cdot \vec{1}_n) \vec{1}_n = [(-3, -2, -7) \cdot (-0.286, -0.429, +0.857)] \vec{1}_n \\ &= -4.283(-0.286, -0.429, +0.857) = (1.225, 1.837, -3.671)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = (3, 2, 10) + (1.225, 1.837, -3.671) = (4.225, 3.837, 6.329)$$

Conclusion :  $R(4.225, 3.837, 6.329)$

b) Méthode traditionnelle

Les équations paramétriques de la perpendiculaire à  $\pi$  et passant par  $P$  sont

$$\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 10 + 6k \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation cartésienne de  $\pi$  :

$$-2(3 - 2k) - 3(2 - 3k) + 6(10 + 6k) = 18 \rightarrow k = -\frac{30}{49} \approx -0.6122$$

Les coordonnées de  $R$  sont alors :

$$R:(3 + 2 \times 0.6122, 2 + 3 \times 0.6122, 10 - 6 \times 0.6122) = (4.224, 3.837, 6.327)$$

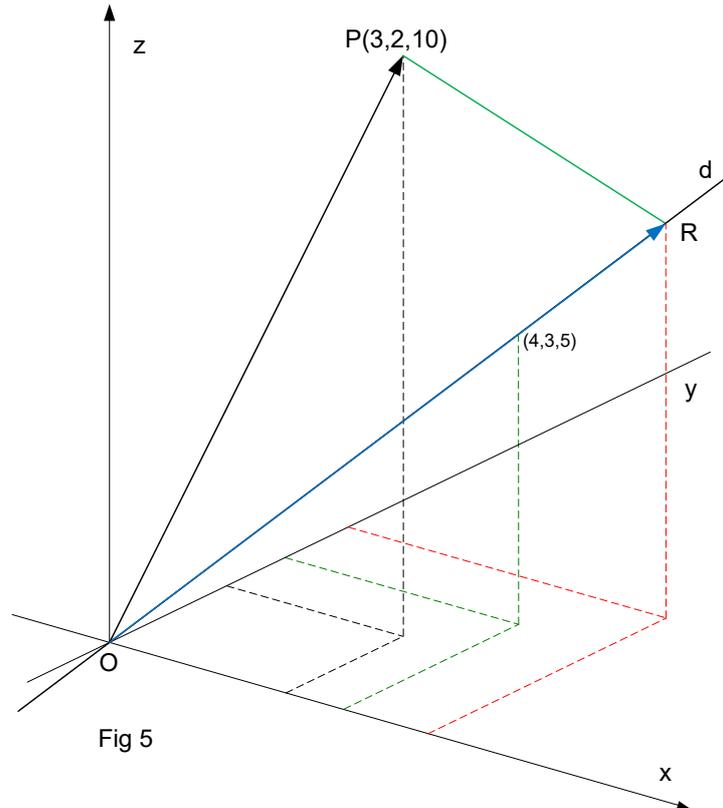
5) Espace à trois dimensions, droite passant par l'origine.

Soit un point  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  et une plan d'équation cartésienne :  $d \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Un vecteur directeur de la droite  $d$  est :  $\vec{v}(a, b, c)$  et le vecteur unitaire est  $\vec{1}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Nous avons alors :  $\overrightarrow{OR} = (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{1}_v) \cdot \vec{1}_v$

Les composantes de  $\overrightarrow{OR}$  sont les coordonnées de  $R$ .



*Exemple*

a) Méthode vectorielle

$$\text{Soient } P(3,2,10) \text{ et } d \equiv \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}.$$

$$\text{Donc } \vec{v} = (4,3,5) \rightarrow \vec{1}_v = (0.566; 0.424; 0.707)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \overline{OR} &= (\overline{OP} \cdot \vec{1}_v) \cdot \vec{1}_v = ((3, 2, 10) \cdot (0.566; 0.424; 0.707)) \cdot (0.566; 0.424; 0.707) \\ &= 9.616(0.566; 0.424; 0.707) = (5.443; 4.077; 6.799) \end{aligned}$$

b) Méthode traditionnelle

Le plan  $n$  perpendiculaire à  $d$  et passant par  $P$  est :  $4x + 3y + 5z - 68 = 0$

$$\text{Les équations paramétriques de } d \text{ sont } \begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \\ z = 5k \end{cases}$$

Le point  $R$  correspond à la valeur de  $k$  qui satisfait :  $16k + 9k + 25k = 68 \rightarrow k = 1.36$

$$\rightarrow R(5.44; 4.08; 6.80)$$

6) Espace à trois dimensions, droite ne passant pas par l'origine.

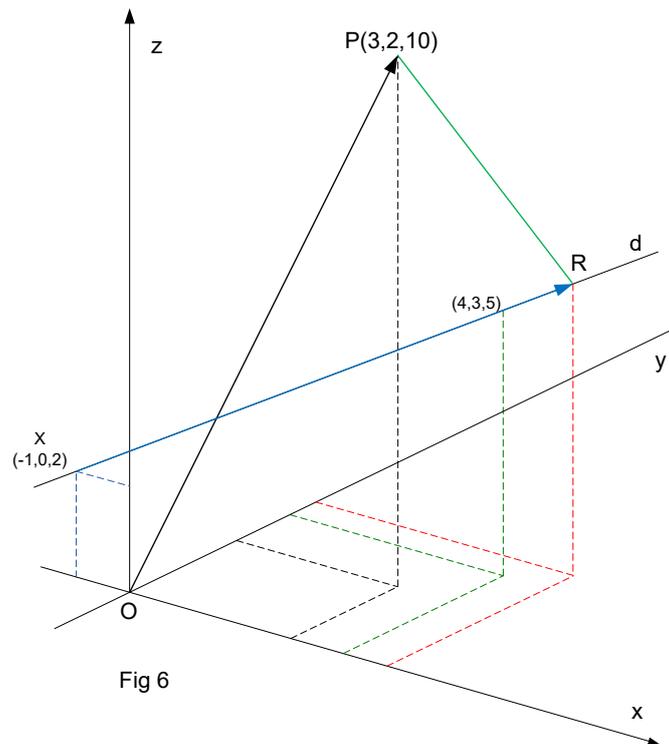
Soit un point  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  et une plan d'équation cartésienne :  $d \equiv \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

Un vecteur directeur de la droite  $d$  est :  $\vec{v}(a, b, c)$  et le vecteur unitaire est  $\vec{1}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Soit  $X$  un point quelconque de  $d$ . Nous avons alors :  $\vec{XR} = (\vec{XP} \cdot \vec{1}_v) \cdot \vec{1}_v$

Donc :  $\vec{OR} = \vec{OX} + \vec{XR}$

Les composantes de  $\vec{OR}$  sont les coordonnées de  $R$ .



*Exemple*

a) Méthode vectorielle

Soient  $P(3, 2, 10)$  et  $d$  droite définie par les points  $(-1, 0, 2)$  et  $(4, 3, 2)$

$$\rightarrow d \equiv \frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{3}.$$

$$\text{Donc } \vec{v} = (5, 3, 3) \rightarrow \vec{1}_v = \frac{(4, 3, 3)}{\sqrt{43}}$$

$$\rightarrow \overline{XR} = (\overline{XP} \cdot \vec{1}_v) \cdot \vec{1}_v = \left( (5, 2, 8) \cdot \frac{(4, 3, 3)}{\sqrt{43}} \right) \cdot \frac{(4, 3, 3)}{\sqrt{43}} = \frac{50}{43} (4, 3, 3) = (5.814, 3.488, 3.488)$$

$$\rightarrow \overline{OR} = \overline{OX} + \overline{XR} = (-1, 0, 2) + (5.814, 3.488, 3.488) = (4.814, 3.488, 5.488)$$

b) Méthode traditionnelle

Le plan  $n$  perpendiculaire à  $d$  et passant par  $P$  est :  $5x + 3y + 3z - 51 = 0$

$$\text{Les équations paramétriques de } d \text{ sont } \begin{cases} x = -1 + 5k \\ y = 3k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$$

Le point  $R$  correspond à la valeur de  $k$  qui satisfait :

$$5(-1 + 5k) + 3(3k) + 3(2 + 3k) - 51 = 0 \rightarrow k = 1.1628$$

$$\rightarrow R(4.814, 3.488, 5.488)$$

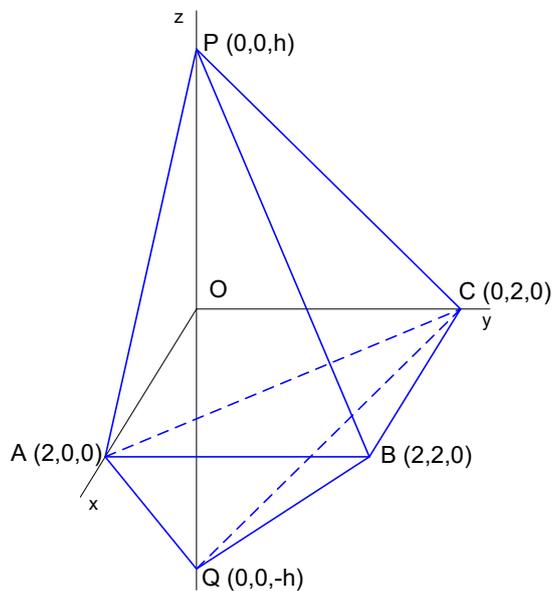
## EXGAE89 - FACSA, ULB, Bruxelles, Juillet 2009.

$OXY$  est un repère orthonormé de l'espace.

Les droites  $a$  et  $b$  d'équations  $a \equiv \{X = 2, Z = 0\}$ ,  $b \equiv \{Z = 0, Y = 2\}$  forment un carré  $OBAC$  avec les axes  $OX$  et  $OY$  ( $A$  est sur  $OX$  et  $C$  sur  $OY$ ).

Les points  $P(0, 0, h)$  et  $Q(0, 0, -h)$  ( $h$  est réel et positif) constituent, avec trois des sommets du carré, l'hexaèdre (polyèdre de 6 faces)  $PQABC$ .

- Que doit valoir  $h$  pour que l'hexaèdre ait un volume égal à celui du cube dont  $OABC$  serait une face?
- Ecrivez une équation cartésienne de chaque face de l'hexaèdre.
- Ecrivez des équations cartésiennes des droites  $PA$ ,  $PB$ ,  $PB$  et  $QC$ .
- Que vaut  $h$  si l'angle  $PQB$  est droit?
- On pose  $h = 2$ , écrivez des équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan  $QAB$ , issue de  $O$ .



$$a) V_{PQABC} = 2V_{PABC} = \frac{2}{3} |OP| \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3} \times h \times \frac{2^2}{2} = \frac{4}{3} h$$

$$V_{cube} = 2^3 \rightarrow V_{PQABC} = V_{cube} \rightarrow \frac{4}{3} h = 2^3 \rightarrow \boxed{h = 6}$$

$$b) PAC \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 0 & h \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2h(x-2) - 2hy - 4z = 0 \rightarrow \boxed{PAC \equiv hx + hy + 2z - 2h = 0}$$

$$PBC \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 0 & -2 & h \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2h(y-2) + 4z = 0 \rightarrow \boxed{PBC \equiv hy + 2z + 2h = 0}$$

$$PAB \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2h(x-2) - 4z = 0 \rightarrow \boxed{PAB \equiv hx + 2z - 2h = 0}$$

$$QAC \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 0 & -h \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2h(x-2) + 2hy - 4z = 0 \rightarrow \boxed{QAC \equiv hx + hy - 2z - 2h = 0}$$

$$QBC \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 0 & -2 & -h \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2h(y-2) + 4z = 0 \rightarrow \boxed{QBC \equiv hy - 2z - 2h = 0}$$

$$QAB \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 0 & -h \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2h(x-2) - 4z = 0 \rightarrow \boxed{QAB \equiv hx - 2z - 2h = 0}$$

$$c) PA \equiv PAB \cap XOZ \equiv \begin{cases} hx + 2z - 2h = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$PB \equiv PAB \cap PBC \equiv \begin{cases} hx + 2z - 2h = 0 \\ hy + 2z - 2h = 0 \end{cases}$$

$$QB \equiv QAB \cap QBC \equiv \begin{cases} hx - 2z - 2h = 0 \\ hy - 2z - 2h = 0 \end{cases}$$

$$QC \equiv QBC \cap YOZ \equiv \begin{cases} hy + 2z - 2h = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$d) \text{ Si } PBQ = 90^\circ \rightarrow OBP = 45^\circ \text{ et le triangle } PBQ \text{ est isocèle rectangle. } \rightarrow h = |OP| = |OB| = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$$e) QAB \equiv 2x - 2z - 4 = 0 \rightarrow \text{son vecteur normale est : } \vec{n}_{QAB} = (1, 0, -1)$$

$$\rightarrow \text{L'équation de la normale est : } \boxed{n \equiv \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}}$$