Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 9

EXGAE090 – EXGAE099

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Mai 10

EXGAE090 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2009.

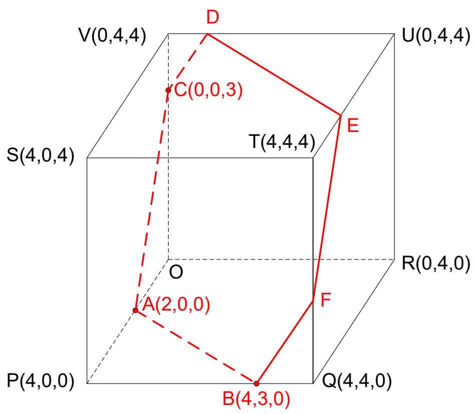
Les axes du repère orthonormé de l'espace $OXYZ$ coïncident avec trois arêtes d'un cube de côté 4, qui repose sur le plan horizontal OXY, du côté des X, des Y et des Z positifs.

a) Montrez que les trois points $A(2,0,0)$, $B(4,3,0)$ et $C(0,0,3)$ appartiennent à trois arêtes distinctes du cube.

b) Le plan ABC coupe le cube selon un hexagone $BACDEF$. Déterminez les coordonnées des sommets de polygone.

c) Calculez la distance qui sépare le plan ABC du sommet du cube qui est le plus éloigné de l'origine O des axes.

d) Déterminez le plus petit angle que font les plans ABC et OXY.



a) Il y a de nombreuses façons de montrer que les points A, B et C appartiennent à trois arêtes distinctes du cube. En voici une parmi d'autres :

Les trois points determinent 3 droites de vecteurs directeurs :

$$\vec{v}_{AB} = (2,3,0); \vec{v}_{BC} = (-4,-3,3); \vec{v}_{CA} = (-2,0,0).$$

Aucune de ces directions n'étant parallèles aux axes, les points ABC ne peuvent appartenir à la même arête.

b) Equation du plan $ABC \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 0 & 3 \\ 4-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9(x-2)+6y-6z = 0 \to ABC \equiv 3x-2y+2z-6=0$

Equation paramètrique de $VU \equiv \{x=0; y=k; z=4\}$

$$D \equiv VU \cap ABC \to 3\times 0 - 2k + 2\times 4 - 6 = 0 \to k = 1 \to \boxed{D(0,1,4)}$$

Equation paramètrique de $UT \equiv \{x=k; y=4; z=4\}$

$$E \equiv UT \cap ABC \to 3k - 2\times 4 + 2\times 4 - 6 = 0 \to k = 2 \to \boxed{E(2,4,4)}$$

Equation paramètrique de $QT \equiv \{x=4; y=4; z=k\}$

$$D \equiv VU \cap ABC \to 3\times 4 - 2\times 4 + 2k - 6 = 0 \to k = 1 \to \boxed{F(4,4,1)}$$

$c)$ Vecteur normal à $ABC : \vec{n}_{ABC} = (3,-2,2)$. Vecteur unitaire normal : $\vec{1}_{ABC} = \dfrac{\vec{n}_{ABC}}{\left|\vec{n}_{ABC}\right|} = \dfrac{(3,-2,2)}{\sqrt{17}}$

$\overrightarrow{AT} : (2,4,4) \rightarrow$ Distance de T à $ABC : d(T, ABC) = \overrightarrow{AT}.\vec{1}_{ABC} = (2,4,4).\dfrac{(3,-2,2)}{\sqrt{17}} = \boxed{\dfrac{6\sqrt{17}}{17}}$

$d)$ Calcul de l'angle α entre les plans ABC et OXY : $\vec{n}_{ABC} = (3,-2,2)$ et $\vec{n}_{OXY} = (0,0,1)$

$\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_{ABC}.\vec{n}_{OXY}}{\left|\vec{n}_{ABC}\right|.\left|\vec{n}_{OXY}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{17}\times 1} = \dfrac{2\sqrt{17}}{17} \rightarrow \boxed{\alpha = 60.98°}$

Le 28 juin 2010

EXGAE091 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2010.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes :

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

(a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

(b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les droites soient concourantes.

(c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors l'équation du plan contenant ces droites.

(a) d_a peut se mettre sous la forme : $d_a \equiv \dfrac{x-a}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{1}$.

Son vecteur directeur est donc : $\overrightarrow{v_{d_a}} = (1,-3,1)$

d_b peut se mettre sous la forme : $d_b \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-4b+7}{1} = \dfrac{z+6b-1}{-3}$.

Son vecteur directeur est donc : $\overrightarrow{v_{d_a}} = (1,1,-3)$

Autrement dit, quels que soient a et b, les droites ne sont pas parallèles.

(b) Si la deux droites d_a et d_b sont concourantes alors le système d'équation formé par leur équations cartésiennes est possible.

$$\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{Résolvons d'abord : } \begin{cases} x - z = a \\ y + 3z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7a-10}{4} \\ y = -\dfrac{9a-26}{4} \\ z = \dfrac{3a-10}{4} \end{cases}$$

Ces coordonnées doivent satisfaire la dernière équation : $x + 2y + z - 2b = 0$

$$\rightarrow \frac{7a-10}{4} + 2\left(-\frac{9a-26}{4}\right) + \frac{3a-10}{4} - 2b = 0 \rightarrow \boxed{a + b = 4}$$

Cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites soient conccourantes.

(c) Les vecteurs directeurs des droites sont : $\overrightarrow{v_{d_a}} = (1,-3,1)$ et $\overrightarrow{v_{d_b}} = (1,1,-3)$

Le vecteur normal au plan π déterminé par ces deux droites est :

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_{d_a}} \times \overrightarrow{v_{d_b}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (8,4,4) = (2,1,1)$$

L'équation du plan est alors : $\pi \equiv 2x + y + z + d = 0$

Déterminons d est exprimant que ce plan passe par le point d'intersection des deux droites :

$$2\frac{7a-10}{4} - \frac{9a-26}{4} + \frac{3a-10}{4} + d = 0 \rightarrow d = 1-2a$$

$$\rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y + z + 1 - 2a = 0}$$

La condition est $a + b = 0$ et le plan est alors $\pi \equiv 2x + y + z + 1 - 2a = 0$

1) $a = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow d_1 \equiv \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et $d_2 \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ et $\pi \equiv 2x + y + z - 1 = 0$

Elles se coupent en $P\left(-\frac{3}{4}, \frac{17}{4}, -\frac{7}{4}\right)$. Il est facile de vérifier que $P\begin{cases} \in d_1 \\ \in d_2 \\ \in \pi \end{cases}$

Soit de plus $A(2,-1,0) \in d_1$ et $B(0,1,2) \in d_2$. On vérifie $A, B \in \pi$

2) $a = 2 \rightarrow b = 2 \rightarrow d_1 \equiv \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et $d_2 \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ et $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$

Elles se coupent en $P(1,2,-1)$. Il est facile de vérifier que $P\begin{cases} \in d_1 \\ \in d_2 \\ \in \pi \end{cases}$

Soit de plus $A(1,-1,0) \in d_1$ et $B(0,5,4) \in d_2$. On vérifie $A, B \in \pi$

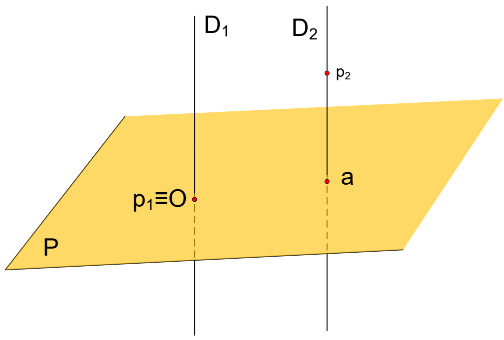
Le 13 juillet 2010.

EXGAE092 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 1.

Soit le plan P d'équation cartésienne $3x+2y+z=0$. Soient les points p_1 et p_2 de coordonnées cartésiennes $(0,0,0)$ et $(1,1,2)$, respectivement. Les droites D_1 et D_2 sont toutes deux perpendiculaires à P et passent par p_1 et p_2, respectivement.

Calculez la distance entre ces droites ?

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$p_1(0,0,0) \in$ plan P

$p_2(1,1,2) \notin$ plan P

D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires au plan P et donc sont parallèles entre elles :

$\rightarrow \text{dist}(D_1,D_2) = \text{dist}(p_1,a)$ où a est le point de percée de D_2 dans P car $p_1a \perp D_1$ et D_2. (La distance entre deux droites parallèles se mesure sur une perpendiculaire commune aux deux droites).

Déterminons a :

$$D_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} = (\lambda) \quad \rightarrow D_2 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = \lambda + 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Injectons (1) dans l'équation du plan P :

$$3(3\lambda+1)+2(2\lambda+1)+(\lambda+2)=0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Ce qui donne les coordonnées de $a\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

La distance cherchée est alors :

$$\text{dist}(D_1,D_2) = |\, p_1a \,| = \sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

Remarque : On peut éviter le calcul de a si on connaît la formule qui donne la distance d'un point à une droite : $\text{dist}(D_1,D_2) = \text{dist}(p_1,D_2)$

Le 25 août 2010. Modifié le 16 septembre 2011 (Denis Mortier)

EXGAE93 - Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, Série C.

Dans l'espace euclidien $E3$, muni d'une base orthonormée $OXYZ$, les coordonnées du centre C_1 d'une surface sphérique (S_1) sont : $C_1(12,14,16)$. Son rayon R_1 vaut 6.
Une seconde surface (S_2) est tangente aux plans d'équations cartésiennes $[X=0]$ et $[Y=0]$.
Son centre C_2 appartient à une droite passant par le point $A(4,2,3)$ et admettant comme paramètres directeurs les 3 valeurs $(1,2,\alpha)$ où α est une inconnue.
Cette seconde surface (S_2) est aussi tangente à la surface sphérique (S_1).
On demande de déterminer l'équation cartésienne de la surface sphérique (S_2) et de montrer qu'il existe en fait 2 solutions (S_{21}) et (S_{22})(leurs centres seront appelés "C_{21}" et "C_{22}").

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Soient les deux sphères $S_1(C_1(12,14,16),6)$ et $S_2(C_2,r_2)$

où $C_2 \in$ aux plans bissecteurs des plans xOz $(x=y\ \ (1))$ et yoz $(x=-y\ \ (2))$

et $C_2 \in d \equiv \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{\alpha}$

D'où : soit a l'abscisse de C_2

(1) abs = ord et vérifie l'équation de $d \rightarrow a-4=\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{z-3}{2} \rightarrow a=6 \rightarrow 2=\dfrac{z-3}{\alpha}$

donc $\begin{cases} C_2(6,6,2\alpha+3) \\ r_2=6 \end{cases}$

(2) abs = −ord et vérifie l'équation de $d \rightarrow a-4=\dfrac{-a-2}{2}=\dfrac{z-3}{\alpha} \rightarrow a=2 \rightarrow -2=\dfrac{z-3}{\alpha}$

donc $\begin{cases} C_2(2,-2,-2\alpha+3) \\ r_2=2 \end{cases}$

Note : Géométriquement, il est impossible dans ce cas que cette sphère soit aussi tangente à S_1. Ceci sera confirmé plus loin.

Pour que les deux sphères soient tangentes (ici extérieurement), il faut que la distance entre les centres soit égale à la somme des rayons.

$(1)\ \| C_2C_1 \| = 12 \rightarrow (12-6)^2+(14-6)^2+(16-2\alpha-3)^2=144$

$\rightarrow 4\alpha^2-26\alpha-125=0 \rightarrow \begin{cases} \alpha=-4.84 \\ \alpha=8.09 \end{cases}$

$(2)\ \| C_2C_1 \| = 8 \rightarrow (12-2)^2+(16+2\alpha-3)^2=64$

$\rightarrow 4\alpha^2+26\alpha+461=0 \rightarrow \Delta=676-4\times4\times461<0 \rightarrow$ Pas de solutions

Finalement, nous avons deux solutions :

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha=-4.84 \rightarrow C_{21}(6,6,-6.68) \\ \alpha=8.09 \ \ \rightarrow C_{22}(6,6,13.18) \end{array}}$$

15 août 2010

EXGAE94 - FACSA, ULG, Liège, Juillet 2010.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les plans π_1, π_2, π_3 et π_4 par leur équation cartésienne :

$$\pi_1 \equiv x + y = 1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv y + z - 1 = 0$$
$$\pi_3 \equiv z + x - 1 = 0 \qquad \pi_4 \equiv x - y + z = 0$$

On donne aussi le point A de coordonnées $(1,1,\lambda)$, où λ est un paramètre réel.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que les projections orthogonales de A sur les plans π_1, π_2, π_3 et π_4 soient coplanaires.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les projections de A sur les plans $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$.

Les points A_1, A_2, A_3, A_4 seront coplanaires s'il existe deux nombres α et β tel que :

$$\alpha \overrightarrow{A_1A_2} + \beta \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_4} \qquad (1)$$

Nous allons donc calculer les points A_1, A_2, A_3, A_4 et les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ et $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Pour A_1 :

Vecteur normal au plan $\pi_1 : \overrightarrow{n_{\pi_1}}(1,1,0)$

Droite passant par A et perpendiculaire à $\pi_1 : d_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = \lambda \end{cases}$

Point de percée de d_1 dans $\pi_1 : 1 + k + 1 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow A_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \lambda\right)$

Pour A_2, A_3, A_4, nous recommençons selon la même procédure. Ce qui donne :

$$\overrightarrow{n_{\pi_2}}(0,1,1) \qquad \overrightarrow{n_{\pi_3}}(1,0,1) \qquad \overrightarrow{n_{\pi_4}}(1,-1,1)$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + k \\ z = \lambda + k \end{cases} \quad d_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 \\ z = \lambda + k \end{cases} \quad d_4 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = \lambda + k \end{cases}$$

$$k = -\frac{\lambda}{2} \qquad k = -\frac{\lambda}{2} \qquad k = -\frac{\lambda}{3}$$

$$A_2\left(1, 1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right) \quad A_3\left(1 - \frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2}\right) \quad A_4\left(1 - \frac{\lambda}{3}, 1 + \frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}\right)$$

Nous obtenons alors les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A_1A_2}:\left(\frac{1}{2},\frac{1-\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\right);\quad \overrightarrow{A_1A_3}:\left(\frac{1-\lambda}{2},\frac{1}{2},-\frac{\lambda}{2}\right);\quad \overrightarrow{A_1A_4}:\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{3},\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{3},-\frac{\lambda}{3}\right)$$

L'application de la relation (1) nous conduit au système :

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}(1-\lambda)\beta=\frac{1}{6}3-2\lambda\\ \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{6}(3+2\lambda)\\ -\frac{\lambda}{2}\alpha-\frac{\lambda}{2}\beta=-\frac{\lambda}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha+3(1-\lambda)\beta=3-2\lambda & (2)\\ 3(1-\lambda)\alpha+3\beta=3+2\lambda & (3)\\ 3\alpha+3\beta=2 & (4)\end{cases}$$

$$(2)-(4)\Rightarrow 3(1-\lambda)\beta-3\beta=1-2\lambda\Rightarrow\beta=\frac{2\lambda-1}{3\lambda}\Rightarrow\alpha=\frac{2-3\beta}{3}=\frac{1}{3\lambda}\qquad(\text{donc }\lambda\neq 0)$$

Remplaçons dans la (3):

$$3(1-\lambda)\frac{1}{3\lambda}+3\frac{2\lambda-1}{3\lambda}=3+2\lambda\Rightarrow\frac{1-\lambda}{\lambda}+\frac{2\lambda-1}{\lambda}=3+2\lambda\Rightarrow 1-\lambda+2\lambda-1=3\lambda+2\lambda^2$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda+1)=0\Rightarrow\boxed{\lambda=-1}$$

Pour cette valeur, nous avons :

$$A_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right);A_2\left(1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),A_3\left(\frac{3}{2},1,-\frac{1}{2}\right),A_4\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}:\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right);\qquad\overrightarrow{A_1A_3}:\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\qquad\overrightarrow{A_1A_4}:\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$$

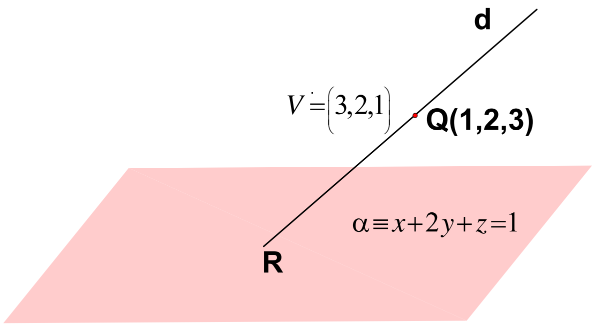
Et avec $\alpha=-\frac{1}{3}$ et $\beta=1$, nous vérifions

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A_4}$$

EXGAE95 - EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Soit le système de coordonnées (x, y, z) dans l'espace. Soit Q le point de coordonnées $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Soit α le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 1$. Soit le vecteur $V = (3, 2, 1)$. Soit la droite d qui passe par Q et qui est parallèle à V. Donnez les coordonnées du point de percée de R de la droite d dans le plan α. Exprimez les coordonnées à l'aide de fractions entières simplifiées.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$R = d \cap \alpha \text{ avec } \begin{cases} d \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1} = \lambda \\ \alpha \equiv x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

On remplace x, y et z dans α en fonction de λ:

$$(3\lambda + 1) + 2(2\lambda + 2) + (\lambda + 3) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{7}{8}$$

Il suffit de remplacer dans les équations paramétriques de la droite pour obtenir le point de percée :

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 1 = -\dfrac{13}{8} \\ y = 2\lambda + 2 = \dfrac{1}{4} \\ z = \lambda + 3 = \dfrac{17}{8} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R\left(-\frac{13}{8}, \frac{1}{4}, \frac{17}{8}\right)}$$

---

12 septembre 2010. Modifié le 11 juillet 2013 (Antoine Paris)

EXGAE96 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $OXYZ$.

On donne les droites d_1 et d_2 d'équations :

$$d_1 \equiv \begin{cases} Y = -1 \\ Z = -2X \end{cases} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} Y = 1 \\ Z = 2X \end{cases}$$

a) Démontrez que l'axe OY est la perpendiculaire commune aux droites d_1 et d_2.

Soit le plan $\pi \equiv X = k$ (k est un réel quelconque) et P_1 et P_2 ses intersections avec d_1 et d_2.

b) Déterminez les coordonnées des points P_1 et P_2.

c) Montrez que le milieu du segment P_1P_2 est sur OX.

d) Ecrivez les équations cartésiennes de la droite P_1P_2.

Lorsque k varie, la droie P_1P_2 décrit la surface d'équation $Z = 2XY$.

e) Déterminez la nature des courbes d'intersection entre cette surface et les plans d'équation $Z = b$ où b est une constante réelle quelconque.

Solution proposée par Steve Tumson

a) Trouvons 2 points de d_1 et d_2 pour déterminer leur équation paramétrique :

$$\begin{cases} (0,-1,0) \in d_1 \\ (1,-1,-2) \in d_1 \end{cases} \to d_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{vecteur directeur et } \alpha_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} (0,1,0) \in d_2 \\ (1,1,2) \in d_2 \end{cases} \to d_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{vecteur directeur et } \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$\overline{OY} = (0,1,0) \Rightarrow \begin{cases} \overline{OY} \bullet \vec{u} = 0 \ \Rightarrow \ OY \perp d_1 \\ \overline{OY} \bullet \vec{v} = 0 \ \Rightarrow \ OY \perp d_2 \end{cases}$$

b)

$$d_1 \equiv \begin{cases} Y = -1 \\ Z = -2X \end{cases} \to P_1 = d_1 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (k,-1,-2k)$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} Y = 1 \\ Z = 2X \end{cases} \to P_2 = d_2 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (k,1,2k)$$

c) $$M\left(P_1,P_2\right) = \left(\frac{k+k}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{-2k+2k}{2}\right) = (k,0,0) \to \text{Sur l'axe } OX$$

d)

$$P_1P_2 \equiv \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix} \to \begin{cases} X = k \\ Y = \beta \\ Z = 2\beta k \end{cases} \Rightarrow P_1P_2 \equiv \begin{cases} X = k \\ Z = 2kY \end{cases}$$

e)

$$\left(Z = 2XY\right) \cap \left(Z = b\right) \to XY = \frac{b}{2} \to \text{Hyperbole équilatère}$$

---

26 janvier 2011

EXGAE97 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $OXYZ$.

On donne les droites d_1 et d_2 d'équations :

$$d_1 \equiv \begin{cases} X = 2 \\ Z = Y \end{cases} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} X = -2 \\ Z = -Y \end{cases}$$

Soit le plan $\pi \equiv Y = kX$ (k est un réel quelconque) et P_1 et P_2 ses intersections avec d_1 et d_2.

a) Déterminez les coordonnées des points P_1 et P_2.

b) Calculez la distance qui sépare P_1 de P_2.

c) Déterminez le plus petit angle que fait d_2 avec la droite P_1P_2.

d) Calculez l'aire du triangle P_1OP_2.

Lorsque k varie, la droie P_1P_2 décrit la surface d'équation $2Y = ZX$.

e) Déterminez la nature des courbes d'intersection entre cette surface et les plans.

Résolution proposée par Steve Tumson

$a)$ $\quad d_1 \equiv \begin{cases} X = 2 \\ Z = Y \end{cases} \rightarrow P_1 = d_1 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (2, 2k, 2k)$

$\quad d_2 \equiv \begin{cases} X = -2 \\ Z = -Y \end{cases} \rightarrow P_2 = d_2 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (-2, -2k, 2k)$

$b)$ $\quad d(P_1, P_2) = \sqrt{(2+2)^2 + (2k+2k)^2 + (2k-2k)^2} = 4\sqrt{1+k^2}$

$c)$ $\quad P_1P_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur directeur

$d_2 \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur

$P_2 = P_1P_2 \cap d_2 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = k = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}\right)$

$\rightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{1+k^2} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}\right) = \dfrac{k}{\sqrt{2+2k^2}} = f(k)$

Si nous analysons brièvement $f(k)$ d'un peu plus près, on observe que ;

1) $\lim\limits_{k\to+\infty} f(k) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \rightarrow$ Asymptote horizontale à droite $\equiv y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\lim\limits_{k\to-\infty} f(k) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad \rightarrow$ Asymptote horizontale à gauche $\equiv y = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

3) $\dfrac{df}{dk} = \ldots = \dfrac{2}{\left(2+2k^2\right)^{3/2}}$ $\quad$ toujours positif et donc $f(x)$ est toujours croissante.

En résumé, la fonction arrive asymptotiquement de $f = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$; elle croît ensuite pour arriver asymptotiquement à son maximum en $f = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or, nous avions $\cos\left(\vec{u}\,\vec{v}\right) = f(k)$, ce qui est donc possible $\forall k \in \mathbb{R}$

Le plus petit angle est observé pour un cosinus maximum, soit :

$$\cos\left(\vec{u}\,\vec{v}\right) = f_{\max}(k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{u}\,\vec{v}_{\min} = \frac{\pi}{4}}$$

$d)$ Prenons P_1P_2 comme la base du triangle puisque nous avons déjà calculé sa longueur et sa direction dans les points précédents.

Il reste à déterminer la longueur de la hauteur du triangle.

Il faut trouver cette hauteur $h \,|\, h \perp P_1P_2$ et $O \in h,$ avec $H = h \cap P_1P_2$.

$$h \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \vec{w} = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de } h$$

Il faut $\vec{w} \bullet \vec{u} = x_h + ky_h = 0 \Leftrightarrow x_h = y_h = 0 \quad \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut donc trouver H :

$$P_1P_2 \equiv \begin{cases} Y = kX \\ Z = 2k \end{cases} \qquad \Rightarrow H = h \cap P_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

La longueur de la hauteur est donc $\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = |2k|$

<u>$N.B$:</u> Notons que la position remarquable des points permettait de trouver $\left\|\overrightarrow{OH}\right\|$ en quelques secondes à l'aide d'un petit schéma clair ;)

$$\Rightarrow S_{P_1OP_2} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| . \left\|\overrightarrow{OH}\right\| = \boxed{4|k|\sqrt{1+k^2}}$$

$\underline{N.B}$: Certaines personnes connaissent certainement la formule *brute* permettant de calculer la surface d'un triangle dont on connait les coordonnées des sommets. Si l'origine du repère est l'un des trois sommets, le calcul devient assez rapide et peut faire bonne figure de vérification.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_A & z_B & z_C \\ x_A & x_B & x_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

$$\xrightarrow{C=(0,0,0)} S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & x_B & 0 \\ y_A & y_B & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & y_B & 0 \\ z_A & z_B & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_A & z_B & 0 \\ x_A & x_B & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & y_B \\ z_A & z_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_A & z_B \\ x_A & x_B \end{vmatrix}^2}$$

$$\Rightarrow S_{P_1OP_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2k & -2k \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2k & -2k \\ 2k & 2k \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2k & 2k \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(8k^2\right)^2 + \left(-8k\right)^2} = 4\sqrt{k^4+k^2} = \boxed{4|k|\sqrt{1+k^2}}$$

e) A partir de $P_1P_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, on retrouve bien la surface $2Y = ZX$ en éliminant α et k.

Il faut donc déterminer la courbe déterminée par : $\begin{cases} 2Y = ZX \\ Y = kX \end{cases} \Rightarrow 2kX = ZX \Rightarrow Z = 2k$

La courbe est donc l'intersection de deux plans :

$\begin{cases} Y = kX & \text{Perpendiculaire au plan } OXY \text{ et parallèle à l'axe } OZ \\ Z = 2k & \text{Parallèle au plan } OXY \end{cases}$

En d'autres termes, la courbe d'intersection est une droite parallèle au plan OXY

EXGAE98 - ERM, 2005, série 1.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(0,2,1)$ et $B(-1,1,3)$, ainsi que le plan α, d'équation $x+5y+9z-13=0$ et le plan β d'équation $3x+ky-5z+1=0$, où k est un paramètre réel.
On demande de déterminer la valeur du paramètre k afin que la droite AB coupe la droite d'intersection des plans α et β.

$$\text{On a : } \begin{cases} \alpha \equiv x+5y+9z-13=0 & (1) \\ \beta \equiv 3x+ky-5z+1=0 & (2) \\ AB \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases} & (3) \end{cases}$$

(1) et (3) donne le point de percée Q de AB dans α:

$$\lambda+5(2+\lambda)-5(1-2\lambda)-13=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$$

Le point Q appartient à $\beta \Rightarrow \dfrac{3}{2}+\dfrac{5k}{2}+0+1=0 \Rightarrow \boxed{k=-1}$

---

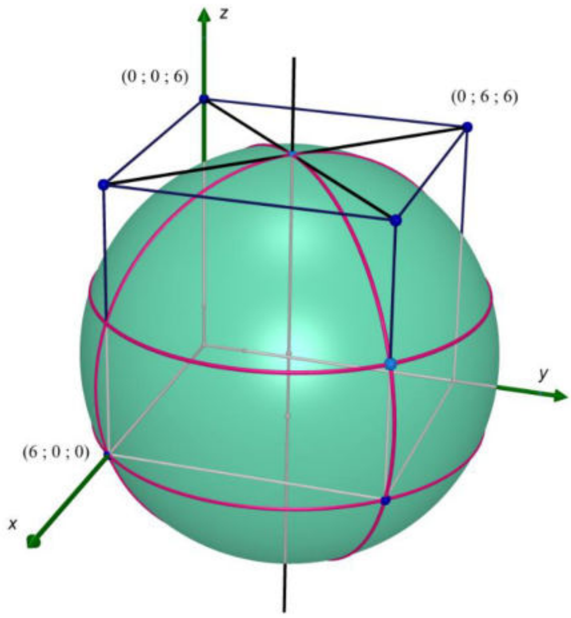
21 avril 2011

EXGAE99 - ERM, 2006, série 3.

On donne un cube de côté 6.

Une sphère passe par les 4 sommets de la base et elle est tangente au plan supérieur.

On demande d'établir l'équation de cette sphère (dans un repère orthonormé qu'on choisira soi-même).



Réalisé avec Cabri 3D", http://www.cabri.com/fr/cabri-3d.html
(Hugues Vermeiren)

Le repère est défini sur la figure. Si O est le centre de la sphère, celle-ci a pour équation :

$$(x-x_O)^2+(y-y_O)^2+(z-z_O)^2=R^2$$

Par simple symétrie, le centre O est situé sur la hauteur élevée au milieu de la base et donc

$$x_O=y_O=3.$$

D'autre part : $|A'O|=R \Rightarrow x_O^2+y_O^2+z_o^2=R^2 \Rightarrow 18+z_O^2=R^2$

La sphère passe par $E(3,3,6) \Rightarrow (6-z_O)^2=R^2 \Rightarrow (6-z_O)^2=18+z_O^2 \Rightarrow z_O=\dfrac{3}{2}$

On en déduit le rayon : $R^2=18+\dfrac{9}{4} \Rightarrow R=\dfrac{9}{2}$

Finalement, la sphère a pour équation :

$$\boxed{(x-3)^2+(y-3)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}}$$

Le 29 aout 2012. Modifié le 12 octobre 2015 (Hugues Vermeiren)