Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 1

EXGAP010 – EXGAP019

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAP010 – FACSA, ULIÈGE, Liège, septembre 1997.

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0,1)$ et $B(0,2)$ et un point variable $P(\lambda,0)$ où $\lambda > 0$. On détermine les points Q et R tels que

$$\overrightarrow{OQ} = \left(1 + \left|\overrightarrow{OP}\right|\right)\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OR} = \left|\overrightarrow{OP}\right|.\overrightarrow{OP}$$

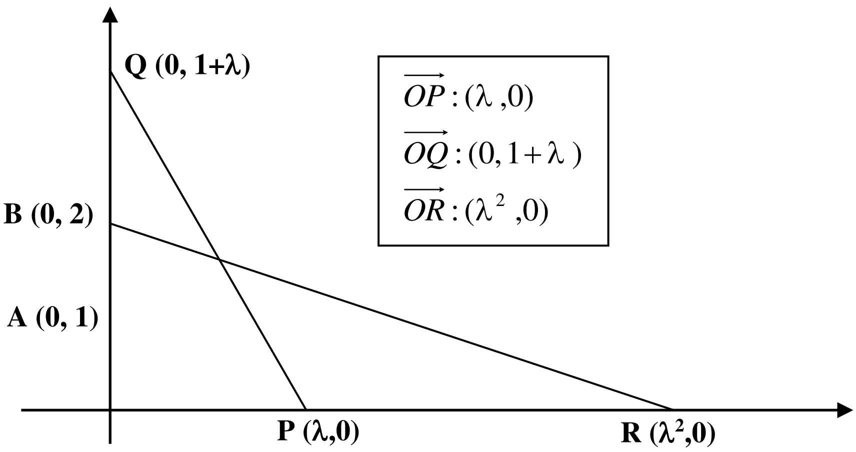
a) Donner les équations des droites PQ et BR.

b) Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$ les droites PQ et BR sont-elles sécantes ?

c) Donner les coordonnées du point d'intersection éventuel X de PQ avec BR.

d) Prouver que X est situé sur le conique d'équation $x(2-y) = 2\,(y-1)^2$

e) Quel est le lieu des points communs a PQ et BR lorsquel parcourt l'ensemble des réels ≥ 0 ?



$\overrightarrow{OP} : (\lambda, 0)$

$\overrightarrow{OQ} : (0, 1+\lambda)$

$\overrightarrow{OR} : (\lambda^2, 0)$

a) Les équations de PQ et BR sont immédiates :

$$PQ \equiv \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{1+\lambda} = 1 \quad ; \quad BR \equiv \frac{x}{\lambda^2} + \frac{y}{2} = 1$$

b)Les droites sont sécantes, si elles ne sont pas parallèles, c'est-à-dire si les coefficients angulaires sont différents.

$$PQ \equiv \ y = -\frac{1+\lambda}{\lambda}x + 1 + \lambda$$

$$BR \equiv \ y = -\frac{2}{\lambda^2}x + 2$$

Etudions : $\dfrac{1+\lambda}{\lambda} = \dfrac{2}{\lambda^2}$

1) $\lambda = 0$ C'est un point singulier.

2) $\lambda(1+\lambda) = 2 \quad \to \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda = -2$ est à rejeter. Il reste $\lambda = 1$.

Autrement dit, les droites sont sécantes si $\lambda \neq 1$.

c) Coordonnées du point X

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1+\lambda}{\lambda}x + 1 + \lambda \\ y = -\dfrac{2}{\lambda^2}x + 2 \end{cases} \quad \to \quad -\frac{1+\lambda}{\lambda}x + 1 + \lambda = \frac{2}{\lambda^2}x + 2$$

$$\to \quad \left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1+\lambda}{\lambda}\right)x = 1 - \lambda \quad \to \quad x = \frac{(1-\lambda)\,\lambda^2}{2-\lambda-\lambda^2} = -\frac{(1-\lambda)\,\lambda^2}{(\lambda-1)(\lambda+2)} = \frac{\lambda^2}{\lambda+2}$$

$$\to \quad y = -\frac{2}{\lambda^2}\frac{\lambda^2}{\lambda+2} + 2 = \frac{-2+2\lambda+4}{\lambda+2} = 2\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$$

Les coordonnées de X : $\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2}, 2\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$

d) Le point X est sur la conique : $x\ (2-y) \ = \ 2\ (y-1)^2$.

En effet, en remplaçant x et y par les coordonnées de X :

$$\frac{\lambda^2}{\lambda+2}\left(2 - \frac{2\,\lambda+2}{\lambda+2}\right) = 2\left(\frac{2\,\lambda+2}{\lambda+2} - 1\right)^2$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda+2}\left(\frac{2\,\lambda+4-2\,\lambda-2}{\lambda+2}\right) = 2\left(\frac{2\,\lambda+2-\lambda-2}{\lambda+2}\right)^2$$

$$\frac{2\,\lambda^2}{\lambda+2} = \frac{2\,\lambda^2}{\lambda+2} \quad \to \quad OK$$

e) Le lieu des points communs à *PQ* et *PR* s'obtient en éliminant λ

$$BR \equiv y-2=-\frac{2}{\lambda^2}x \quad \rightarrow \quad \lambda^2=-\frac{2\,x}{y-2} \quad \rightarrow \quad \lambda=\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}$$

On ne retient que la racine positive. Donc,

$$y=-\frac{1+\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}}{\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}}x+1+\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}$$

$$y\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}=-x-x\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}+\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}+\frac{2\,x}{2-y}$$

$$(y+x-1)\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}=-x+\frac{2\,x}{2-y}$$

$$\sqrt{\frac{2\,x}{2-y}}=\frac{-2x+xy+2x}{(2-y)\,(y+x-1)}=\frac{xy}{(2-y)\,(y+x-1)}$$

$$\frac{2\,x}{2-y}=\left(\frac{xy}{(2-y)\,(y+x-1)}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 2=\frac{xy^2}{(2-y)\,(y+x-1)^2}$$

$$\frac{2\,(2-y)}{x}=\left(\frac{y}{y+x-1}\right)^2$$

Modifié le 31 août 04

EXGAP011 – FACSA, ULIÈGE, Liège, juillet 1997.

On donne une ellipse $\mathscr{E}$ d'équation

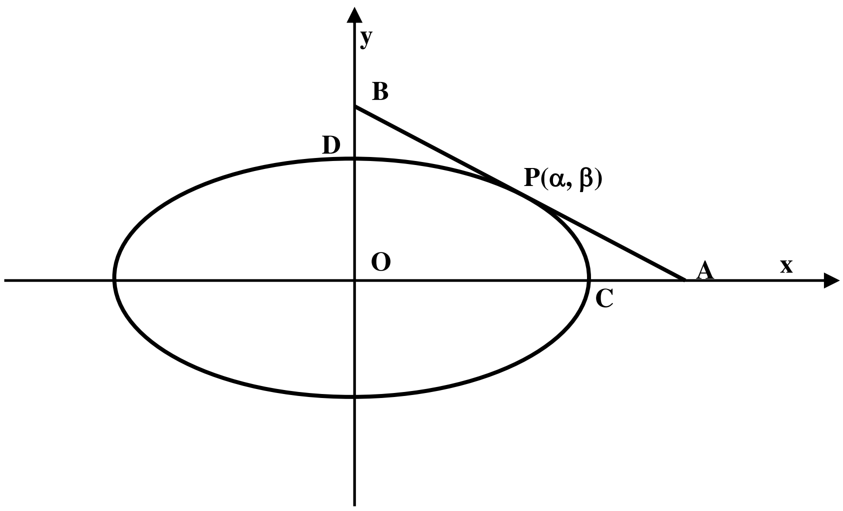
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dans un repère orthonormé d'origine O. Par un point P de E, on mène la tangente d à cette ellipse. Elle coupe Ox en A et Oy en B. On note C le sommet de E situé sur Ox et le plus proche de A, et D le sommet de E situé sur Oy et le plus proche de B.

Pour quelle(s) position(s) de P a-t-on

$$\frac{|AC|}{a}=\frac{|BD|}{b} \quad ?$$

Caractériser géométriquement ces positions.



L'équation de la tangente au point $P(\alpha,\ \beta)$ est : $y-\beta=-\dfrac{\alpha\, b^2}{\beta\, a^2}(x-\alpha)$

On en déduit les coordonnées de $A\left(\dfrac{\beta^2\, a^2}{\alpha\, b^2}+\alpha,\ 0\right)$ et de $B\left(0,\ \dfrac{\alpha^2 b^2}{\beta\, a^2}+\beta\right)$

Par conséquent,

$$|BD|=\frac{\alpha^2 b^2}{\beta\, a^2}+\beta-b=\frac{\alpha^2\, b^2+\beta^2\, a^2-a^2\, b\,\beta}{\beta\, a^2}$$

$$|CA|=\frac{\beta^2\, a^2}{\alpha\, b^2}+\alpha-a=\frac{\beta^2\, a^2+\alpha^2\, b^2-a\,\alpha\, b^2}{\alpha\, b^2}$$

La relation à démontrer revient donc à vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{\beta^2\, a^2+\alpha^2\, b^2-a\,\alpha\, b^2}{\alpha\, b^2 a}=\frac{\alpha^2\, b^2+\beta^2\, a^2-a^2\, b\,\beta}{\beta\, a^2 b}$$

$$\frac{\beta^2\, a^2+\alpha^2\, b^2-a\,\alpha\, b^2}{\alpha\, b}=\frac{\alpha^2\, b^2+\beta^2\, a^2-a^2\, b\,\beta}{\beta\, a}$$

$$\frac{\beta^2\, a^2}{\alpha\, b}+\alpha\, b-ab=\frac{\alpha^2\, b^2}{\beta\, a}+\beta\, a-ab$$

$$\frac{\beta^2\, a^2}{\alpha\, b}-\frac{\alpha^2\, b^2}{\beta\, a}=\beta\, a-\alpha\, b\ \rightarrow\ a^3\,\beta^3-b^3\,\alpha^3=\alpha\, b\,\beta\, a\,(\beta\, a-\alpha\, b)$$

$$(\beta\, a-\alpha\, b)\,(\beta^2\, a^2+\alpha\, b\,\beta\, a+\alpha^2\, b^2)=\alpha\, b\,\beta\, a\,(\beta\, a-\alpha\, b)$$

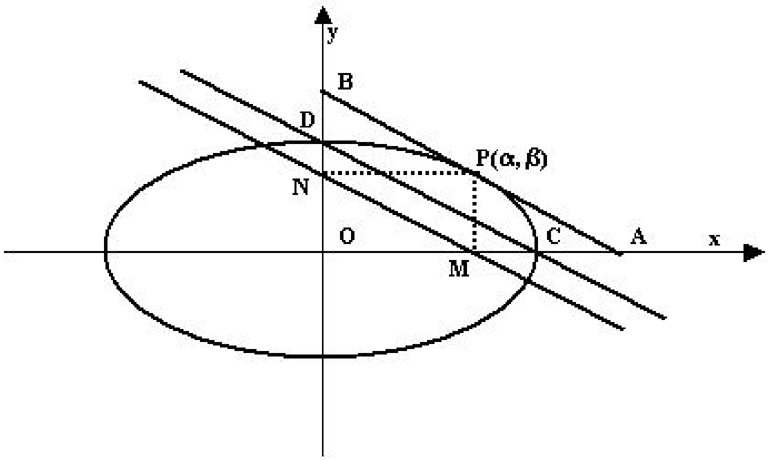
Mais comme $P\in$ à l'ellipse : $\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1\quad\rightarrow\quad \alpha^2\, b^2+\beta^2\, a^2=a^2 b^2$

donc : $\quad(\beta\, a-\alpha\, b)\,(a^2 b^2+\alpha\, b\,\beta\, a)=\alpha\, b\,\beta\, a\,(\beta\, a-\alpha\, b)$

Ce qui donne comme solutions :

1) $\beta\, a-\alpha\, b=0\quad\rightarrow\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

2) $a^2 b^2+\alpha\, b\,\beta\, a=\alpha\, b\,\beta\, a\quad\rightarrow\quad a=b=0$ L'ellipse se réduit à un point.

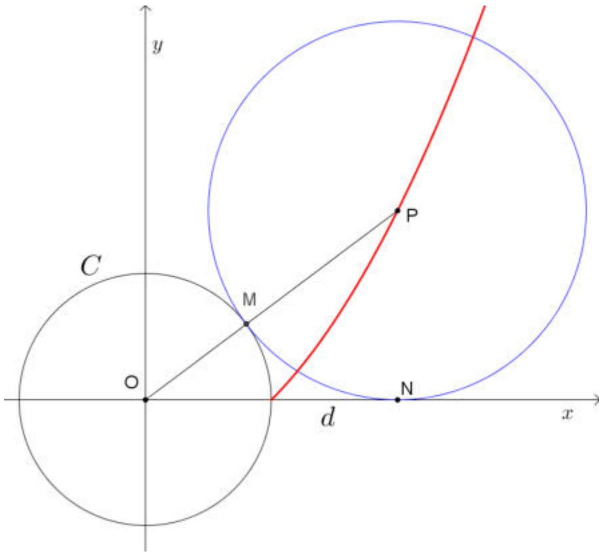


Interprétation géométrique :
On montre facilement que les droites BA, DC et NM sont parallèles.

Modifié le 31 août 04

EXGAP012 – FACSA, ULIÈGE, Liège, juillet 1997.

Quel est le lieu des centres des cercles tangents à une droite donnée d et tangents extérieurement à un cercle donné C dont le centre est sur d ? (Deux cercles sont tangents extérieurement s'ils admettent une même tangente en un de leurs points communs et qu'ils sont situés de part et d'autre de cette tangente).



Puisque l'énoncé n'impose rien, nous pouvons choisir le cercle centré sur l'origine, et la droite d comme étant l'axe des x.

Soit $P(x,\ y)$ le centre d'un cercle tangent au cercle donné C et à la droite d.

Nous allons exprimer que la distance MP est égale à la distance PN.

$OM = R, \qquad PN = y, \qquad OP = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad MP = \sqrt{x^2 + y^2} - R$

Donc $\quad y = \sqrt{x^2 + y^2} - R \quad \to \quad (y - R)^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad 2Ry = x^2 - R^2 \quad \to \quad y = \dfrac{x^2}{2R} - \dfrac{R}{2} \quad$ avec $x \geq R$

C'est une branche de parabole.

-EXGAP013 – FACSA, ULIÈGE, Liège, juillet 1997.

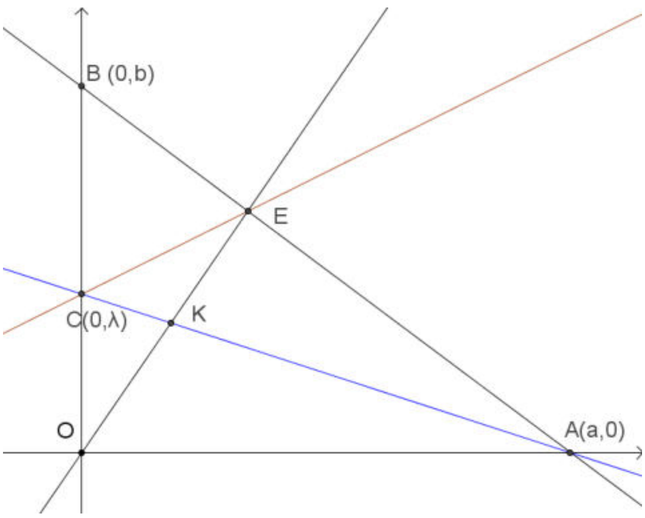
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(a,0)$ et $B(0,b)$, distincts de l'origine O. Par un point variable $C(0,\lambda)$ de OB, on mène une droite de pente fixe m, distincte de celle de AB. Cette droite coupe AB en E.

a) Donner les coordonnées de E, l'équation de OE et celle de AC.

b) Donner l'équation du lieu des points communs aux droites OE et AC.

c) Montrer que ce lieu est une conique passant par O, A et B mais jamais par le quatrième sommet du rectangle dont les trois autres sommets sont O, A et B.

d) A quelle condition le lieu est-il formé de deux droites ? Préciser de quelles droites il s'agit alors.



$$a)\ AB \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1; \quad AC \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda}=1; \quad CE \equiv y = mx+\lambda$$

$$E \equiv \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \\ y = mx+\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{mx+\lambda}{b}=1 \Rightarrow x\left(\frac{1}{a}+\frac{m}{b}\right)=1-\frac{\lambda}{b} \Rightarrow x=\frac{a(b-\lambda)}{b+am}$$

$$\text{et} \quad y=\frac{a(b-\lambda)}{b+am}m+\lambda=\frac{mab-a\lambda m+\lambda b+a\lambda m}{b+am}=\frac{b(ma+\lambda)}{ma+b}$$

$$\text{donc} \quad E\left(\frac{a(b-\lambda)}{b+am};\ \frac{b(ma+\lambda)}{ma+b}\right)$$

$$\text{et } OE \equiv y\frac{\frac{b(ma+\lambda)}{ma+b}}{\frac{a(b-\lambda)}{b+am}}x=\frac{b(ma+\lambda)}{a(b-\lambda)}x$$

b) Soit $K = OE \cap AC$. Le lieu de K est en éliminant λ.

$$\begin{cases} y = \dfrac{b(ma+\lambda)}{a(b-\lambda)}x \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\lambda}=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{ay}{a-x} \Rightarrow y = \frac{b\left(ma+\dfrac{ay}{a-x}\right)}{a\left(b-\dfrac{ay}{a-x}\right)}x = \frac{b\left[ma(a-x)+ay\right]}{a\left[b(a-x)-ay\right]}x$$

$$\Rightarrow ay(ba-ba-ay) = bx(ma^2-amx+ay) \Rightarrow a^2by-abxy-a^2y^2 = ma^2bx-mabx^2+abxy$$

$$\Rightarrow mbx^2-2bxy-ay^2-mabx+aby=0$$

c) Le lieu est une hyperbole. La présence du terme en xy implique que cette hyperbole est inclinée. Il est immédiat de vérifier qu'elle passe par l'origine, $A(a\ ,0)$ et $B(0,b)$.

Pour le point, (a,b) qui sont les coordonnées du quatrième sommet on a :

$$mba^2-2ab^2-ab^2-ma^2b+ab^2=0 \quad \Rightarrow \quad ab^2=0$$

ce qui impliquerait que soit a, soit b est égal à zéro. Ce qui est contraire à l'hypothèse que A et B sont distincts de l'origine.

d) On réduit l'équation de l'hyperbole

$$mb\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - a\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 - 2bxy - \frac{ab}{4}(ma+b)=0$$

La conique dégénère en deux droites si : $\dfrac{ab}{4}(ma+b)=0 \quad \rightarrow \quad m=-\dfrac{b}{a}$

Remplaçons m par sa valeur :

$$-\frac{b^2}{a}x^2-2bxy-ay^2-b^2x+aby=0 \Rightarrow \quad -b^2x^2-2abxy-a^2y^2-ab^2x+a^2by=0$$

$$\Rightarrow -(bx+ay)^2+ba(bx+ay)=0 \quad \Rightarrow \quad (bx+ay)(bx+ay-ab)=0$$

1) $y=-\dfrac{b}{a}x$ C'est une droite parallèle à AB passant par l'origine.

2) $y=-\dfrac{b}{a}x+b$ C'est la droite AB.) Soit $K = OE \cap AC$

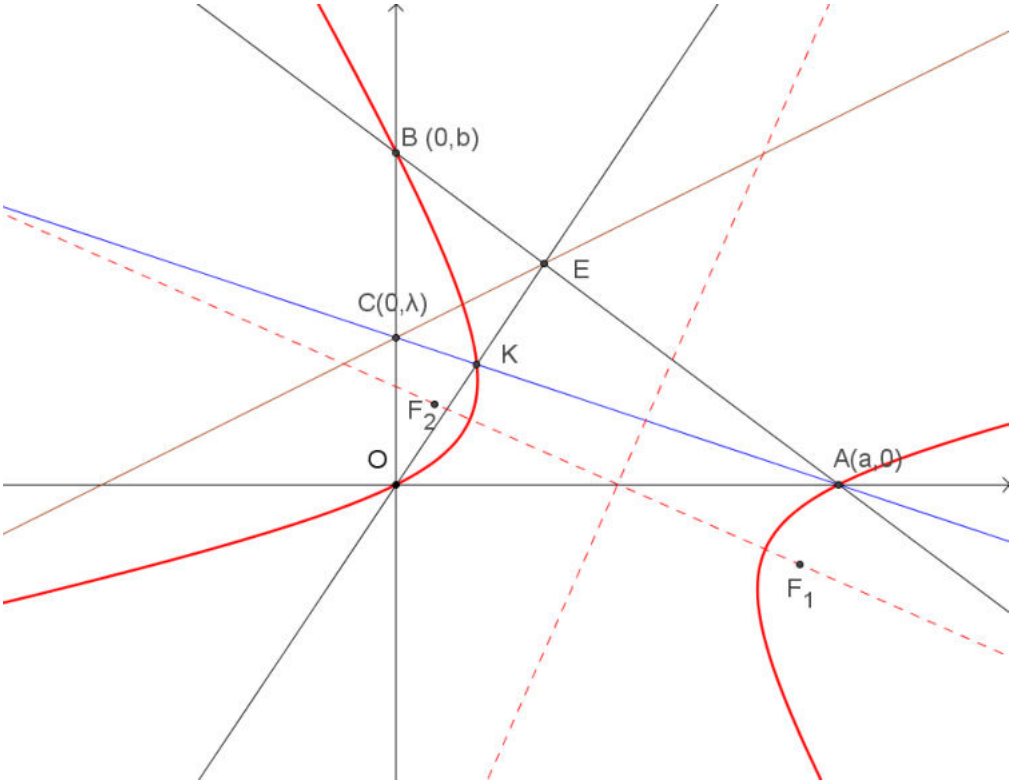
Le lieu de K est obtenu en éliminant λ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{b(ma+\lambda)}{a(b\text{-}\lambda)}x \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\lambda}=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{ay}{a-x} \Rightarrow y = \frac{b(ma+\dfrac{ay}{a-x})}{a(b\text{-}\dfrac{ay}{a-x})}x = \frac{b(ma(a-x)+ay)}{a(b(a-x)-ay)}x$$

$$\Rightarrow ay(ba-bx-ay) = bx(ma^2-amx+ay)$$

$$\Rightarrow a^2by-abxy-a^2y^2 = ma^2bx-mabx^2+abxy$$

$$\Rightarrow mbx^2-2bxy-ay^2-mabx+aby=0$$

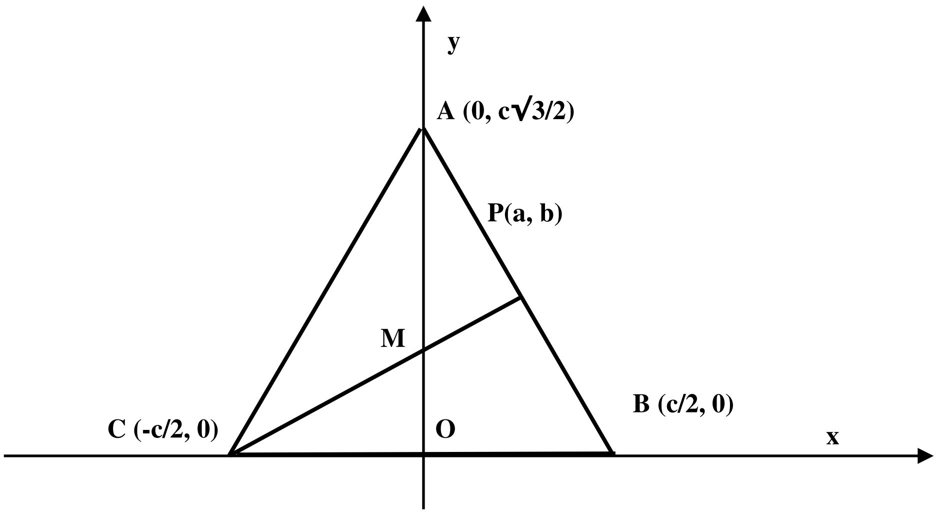


B (0,b)
E
C(0,λ)
K
F2
O
A(a,0)
F1

EXGAP014 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1998.

On considère un triangle équilatéral ABC dont deux sommets, B et C, sont sur l'axe Ox, le troisième, A, est l'axe Oy et dont un côté comprend le point P de coordonnées (a,b) $(a \neq 0, b \neq 0)$.

Quelle est (en fonction des paramètres a et b) l'équation du cercle inscrit au triangle ABC (c'est-à-dire du cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle) ?



Soit $B(c/2,\ 0)$ et $C\left(-c/2,\ 0\right)$, donc les coordonnées de $A\left(0, c\sqrt{3}/2\right)$.

Nous allons calculer l'équation de AB, dont le coefficient angulaire va nous permettre de déduire celui de CM perpendiculaire à AB.

Or le point M détermine le centre du cercle inscrit et OM son rayon.

Il ne restera plus qu'à exprimer le cercle obtenu en fonction de P sachant que P appartient à AB.

$$AB \equiv y = \frac{c\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\, x$$

$$CM \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + \frac{c\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad M : (0, \frac{c\sqrt{3}}{6}) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{c\sqrt{3}}{6}$$

Le cercle : $x^2 + \left(y - R\right)^2 = R^2$

$$P \in AB \Rightarrow \quad b = \frac{c\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2\sqrt{3}}{3} b + 2a$$

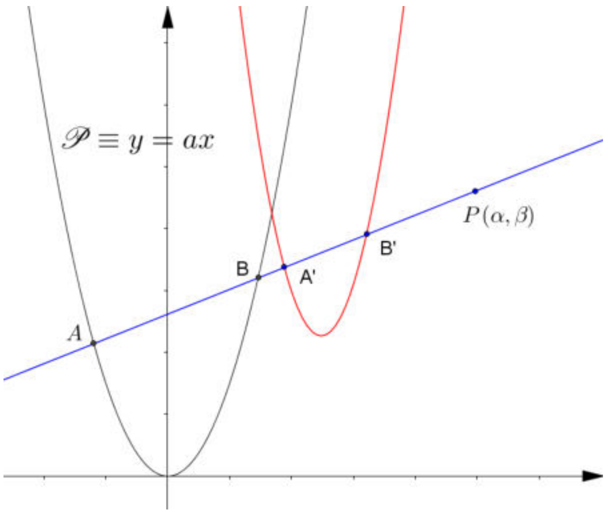
$$\Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} b + 2a\right) = \frac{1}{3}\left(b + a\sqrt{3}\right)$$

Finalement le cercle a pour équation :

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\left(b + a\sqrt{3}\right)\right)^2 = \frac{1}{9}\left(b + a\sqrt{3}\right)^2$$

EXGAP015 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1998.

Quel est le lieu des milieux des segments joignant un point fixe P du plan aux points d'une parabole donnée ?



Pour simplifier, prenons le cas d'une parabole $\mathscr{P}$ dont le sommet est situé à l'origine et donc d'équation : $y = ax^2$. (Voir figure).

L'image du point A est le point A' milieu du segment AP. De même B' est l'image du segment BP. C'est une homothétie de centre P et de puissance ½.

Donc l'image M d'un point quelconque $X(x, y) \in \mathscr{P}$ a pour coordonnées

$$M\left(\frac{\alpha + x}{2}, \frac{\beta + y}{2}\right)$$

or $\quad y = ax^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\beta + y}{2} = a\left(\dfrac{\alpha + x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \dfrac{a}{2}x^2 + \alpha a x + \dfrac{a\alpha^2}{2} - \beta$

Le lieu de M est donc une parabole.

Dans le cas d'une parabole quelconque $y = ax^2 + bx + c$ le raisonnement est identique.

Modifié le 3 février 2015

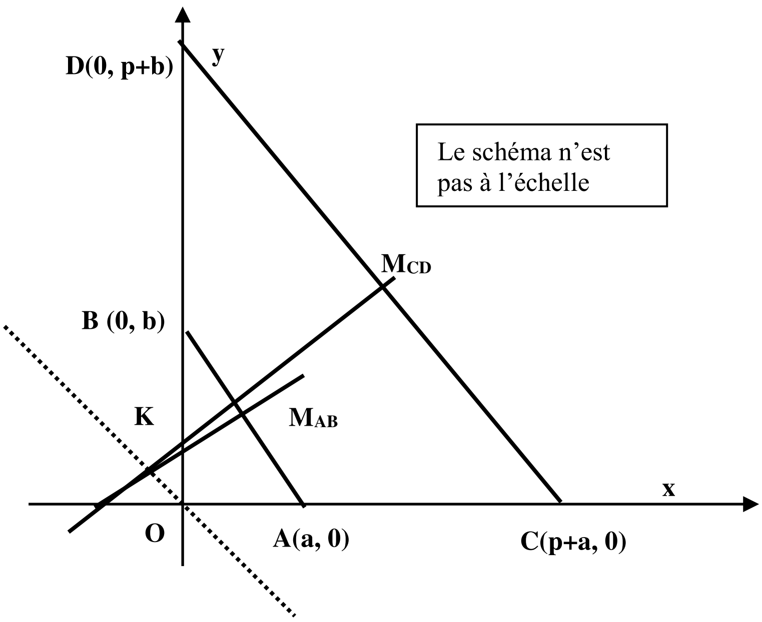
EXGAP016 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1998.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(0;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, on considère deux points A et B : $A(a,\ 0)$ est sur l'axe Ox et $B(0,b)$ sur l'axe Oy. Si p est un nombre réel, on considère les points C et D tels que

$$\overrightarrow{AC}=p\overrightarrow{e_1}\quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}=p\overrightarrow{e_2}$$

a) Montrer que si A, B restent fixe et si p varie, la médiatrice du segment variable CD passe par un point fixe K.

b) Trouver le lieu du point K dont il est question au point 1) lorsque A reste fixe et B varie le long de l'axe Oy.



Équation de la médiatrice de CD : On calcule la pente de CD, ce qui permet d'obtenir la pente de la médiatrice de CD. Connaissant les coordonnées du centre de CD, on en déduit l'équation de la médiatrice.

$$m_{CD} = -\frac{p+b}{p+a} \quad \Rightarrow \quad m_{M_{CD}} = \frac{p+a}{p+b} \quad \text{or} \quad M_{CD} : \left(\frac{p+a}{2}, \frac{p+b}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p+b}{2} = \frac{p+a}{p+b} \frac{p+a}{2} + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}\left(p+b - \frac{(p+a)^2}{p+b} \right) = \frac{(b-a)(2p+b+a)}{2(p+b)}$$

L'équation de la médiatrice est donc : $y = \dfrac{p+a}{p+b}x + \dfrac{(b-a)(2p+b+a)}{2(p+b)}$

Pour calculer le point K, il faut une autre médiatrice. Comme p est arbitraire, on peut prendre $p = 0$, ce qui correspond à AB. Le point K est donc solution du système :

$$\begin{cases} y = \dfrac{p+a}{p+b}x + \dfrac{(b-a)(2p+b+a)}{2(p+b)} \\ y = \dfrac{a}{b}x + \dfrac{(b-a)(b+a)}{2b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{p+a}{p+b} - \frac{a}{b} \right)x + \frac{(b-a)(2p+b+a)}{2(p+b)} - \frac{(b-a)(b+a)}{2b} = 0$$

$$\frac{p(b-a)}{b(p+b)}x + \frac{(b-a)}{2}\left(\frac{2p+b+a}{p+b} - \frac{b+a}{b} \right) = \frac{p(b-a)}{b(p+b)}x + \frac{p(b-a)^2}{2b(p+b)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-b}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{b}\frac{a-b}{2} + \frac{(b-a)(b+a)}{2b} = \frac{b-a}{2}$$

$K : \left(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2} \right)$ Les coordonnées sont indépendantes de p.

Quand B varie, b varie. Donc on élimine b pour obtenir le lieu :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a-b}{2} \\ y = \dfrac{b-a}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x + y = 0 \quad \text{Droite passant par l'origine.}$$

EXGAP017 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1998.

Quelles sont les coordonnées du centre de chacun des cercles passant par les points $(0,0)$ et $(0,2)$ et tangents à la droite passant par $(2,\ 0)$ et parallèle à la première bissectrice (la droite $y=x$)

Le cercle a pour équation : $C \equiv x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$(0,0) \in C \quad \Rightarrow \quad F = 0$

$(0,2) \in C \quad \Rightarrow \quad 0+4+2E+0=0 \quad \Rightarrow \quad E=-2$

Il reste à trouver D pour que C soit tangent à $y = x-2$

$C \equiv x^2 + y^2 + Dx - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (x-2)^2 + Dx - 2(x-2) = 0$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + (D-6)x + 8 = 0$

le réalisant doit être nul : $(D-6)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^2 - 12D - 28 = 0$

$\Rightarrow \quad D = 6 \pm \sqrt{36+28} = 6 \pm 8 \quad \Rightarrow D_1 = -2; \quad D_2 = 14$

le premier cercle est : $x^2 + y^2 + 14x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+7)^2 + (y-1)^2 = 50$

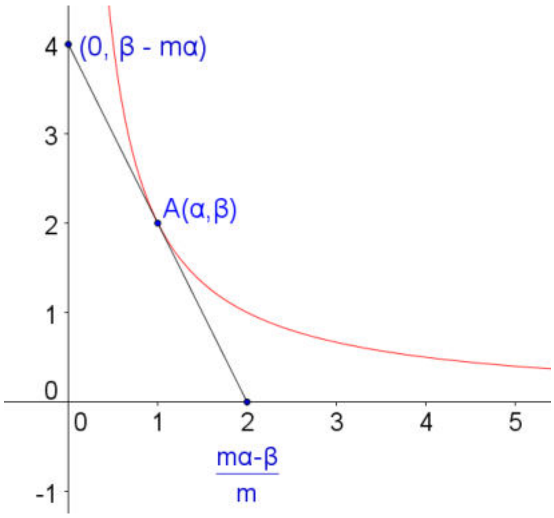
Les coordonnées du centre sont : $(-7,1)$

le deuxième cercle est : $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

Les coordonnées du centre sont : $(1,1)$

EXGAP018 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 1998.
FACSA, ULiège, Liège, Juillet 2010.

Quel est le lieu des points du premier quadrant $\{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ par lesquels passe une et une seule droite d déterminant avec les axes un triangle contenu dans le premier quadrant et d'aire égale à 4 ?



Soit $A(\alpha,\beta)$ un point du lieu cherché.

Une droite passant par A a pour équation : $y-\beta = m(x-\alpha)$

Elle coupe les axes en $\left(\dfrac{m\alpha-\beta}{m};0\right)$ et $(0;\beta - m\alpha)$.

La condition sur l'aire du triangle se traduit par : $\dfrac{(\beta-m\alpha).(m\alpha-\beta)}{2m} = 4$

$$\Rightarrow (m\alpha-\beta)^2 = 8m \rightarrow \alpha^2 m^2 - 2(\alpha\beta+4)m+\beta^2 = 0$$

Mais il ne peut y avoir qu'une seule droite. Donc le Δ de cette équation doit être nul :

$$(\alpha\beta+4)^2 - \alpha^2\beta^2 = 0 \rightarrow \alpha\beta = 2$$

L'équation du lieu est donc $\boxed{xy=2}$ pour $x>0$. C'est donc une branche d'hyperbole équilatère.

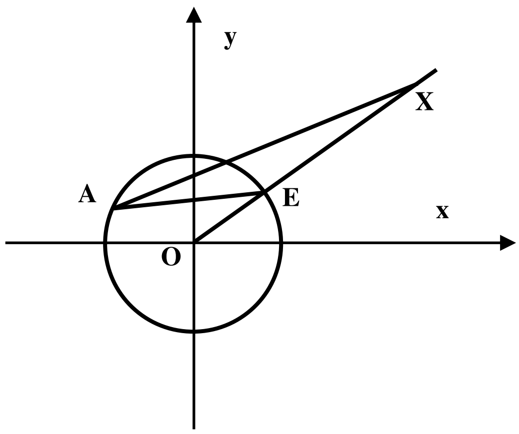
On notera que un par point donné de cette hyperbole, la droite qui détermine le triangle est la tangente à l'hyperbole.

EXGAP019 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 1998.

Soit un cercle de centre O et E un point du cercle.
Quel est le lieu des points X tels que

$$\overrightarrow{AX} = \left|\overrightarrow{AE}\right|^2 \overrightarrow{OE}$$

lorsque A parcourt C ?



$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = (x_E - x_A)\vec{u} + (y_E - y_A)\vec{v}$

$\left|\overrightarrow{AE}\right|^2 = (x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2$

$\overrightarrow{AX} = \left[(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2\right](x_E\,\vec{u} + y_E\,\vec{v})$

$\rightarrow \quad x_X = \left[(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2\right]x_E \quad et \quad y_X = \left[(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2\right]y_E$

$x_X = \left[(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2\right]x_E$

$y_X = \left[(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2\right]y_E$

$\rightarrow \quad \dfrac{x_X}{y_X} = \dfrac{x_E}{y_E} \quad \rightarrow$ Le lieu est donc $y = \dfrac{x_E}{y_E}x$ c'est-à-dire la droite OE, ce qui était évident.

Les coordonnées extrèmes de X sont :

$A \equiv E \quad \rightarrow \quad (0,0)$

A diamètralement opposé à E : $(2x_E, 2y_E)$
