

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 13

EXGAP130 – EXGAP139

<http://matheux.ovh/Accueil.html>

**Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson**

Sep 09

EXGAP130 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2009 série 1.

Soit un système de coordonnées cartésiennes (x, y) . On considère la famille des paraboles (type A) qui ont pour axe de symétrie l'axe X et pour sommet le point $(c, 0)$.

Une autre famille (type B) est constituée de paraboles qui ont pour axe de symétrie l'axe Y et pour sommet le point $(0, d)$.

- 1) Donnez une équation cartésienne générale pour chacun des deux types de paraboles.
- 2) Faites un dessin montrant une parabole de type A et une parabole de type B telles qu'elles aient un et un seul point de contact (les paraboles sont tangentes).

Pour chaque parabole de type A , il existe une seule parabole de type B qui lui soit tangente.

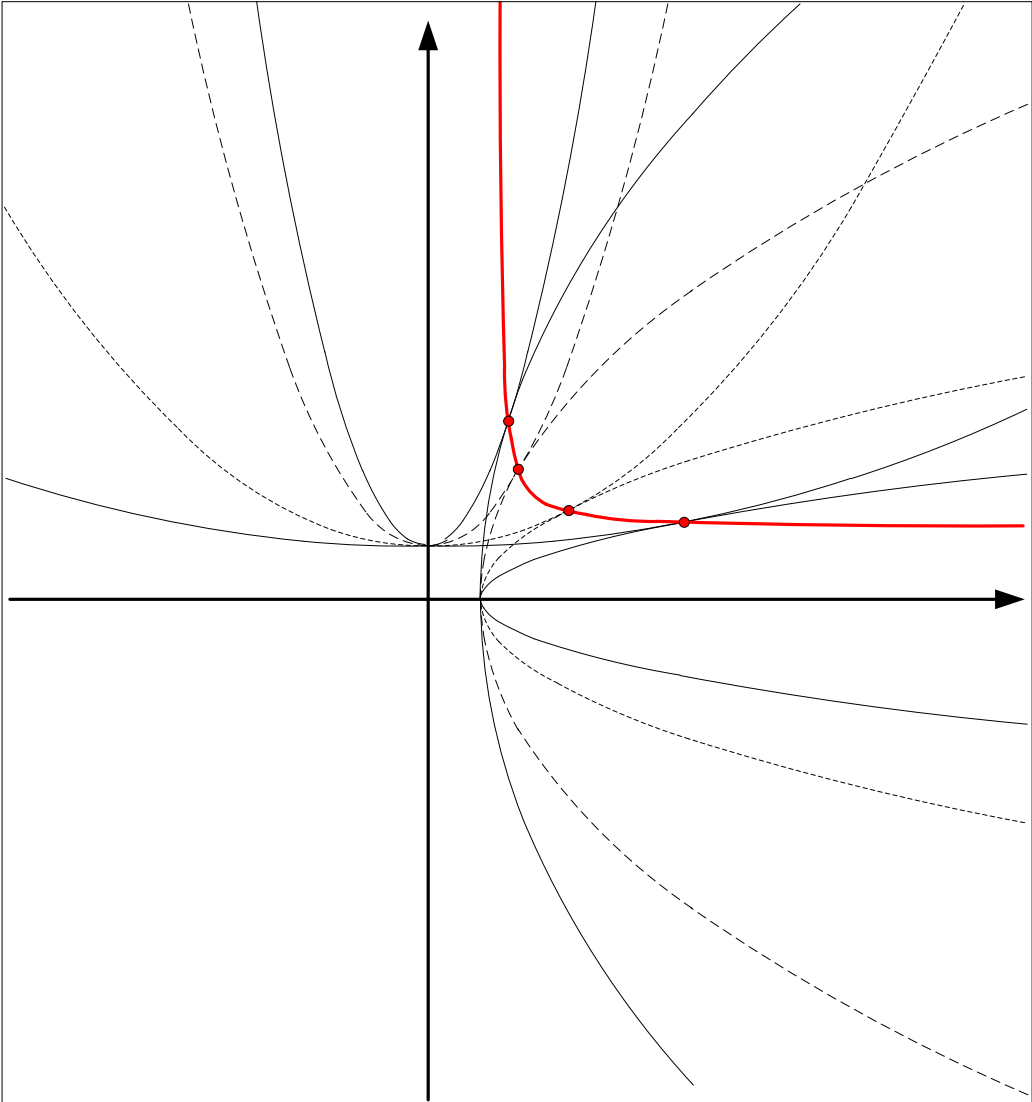
On se propose de chercher le lieu des points de contact entre ces paraboles.

Soit (x_c, y_c) un tel point de contact. Pour trouver le lieu des points de contact (une équation liant x_c à y_c), l'on va utiliser le fait que, en un tel point, les droites tangentes aux deux paraboles ont la même pente (il s'agit d'ailleurs d'une seule et même droite).

- 3) Donnez une équation exprimant l'égalité de ces pentes.
- 4) Donnez, en fonction des paramètres c et d uniquement, l'équation du lieu des points de contact entre les paraboles.

Suggestion : évitez de résoudre des équations d'ordre élevé; basez votre approche sur le fait que l'équation liant x_c à y_c ne peut faire apparaître que les paramètres c et d .

- 5) A quel type de courbes ce lieu appartient-il ?



Les familles ont pour équation : $\begin{cases} \text{Type A : } a^2 x = y^2 + a^2 c \\ \text{Type A : } y = bx^2 + d \end{cases}$

Si ces deux familles ont une tangente commune, alors les dérivées, au point de contact (x_c, y_c)

des deux familles sont égales : $\frac{a}{2\sqrt{x_c - c}} = 2bx_c \quad (1)$

De plus le point de contact appartient aux deux familles :

$$\text{Type A} \rightarrow y_c = a\sqrt{x_c - c} \rightarrow a = \frac{y_c}{\sqrt{x_c - c}}$$

$$\text{Type B} \rightarrow y_c = bx_c^2 - d \rightarrow b = \frac{y_c - d}{x_c^2}$$

On remplace dans (1)

$$\frac{y_c}{2(x_c - c)} = 2 \frac{y_c - d}{x_c} \rightarrow 3x_c y_c - 4dx_c - 4cy_c + 4cd = 0$$

Le lieu est donc :

$$y = \frac{4d}{3} \frac{(x - c)}{\left(x - \frac{4c}{3}\right)}$$

C'est une hyperbole équilatère de type $y = k \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta} \right)$, de centre $(4d/3, 4c/3)$

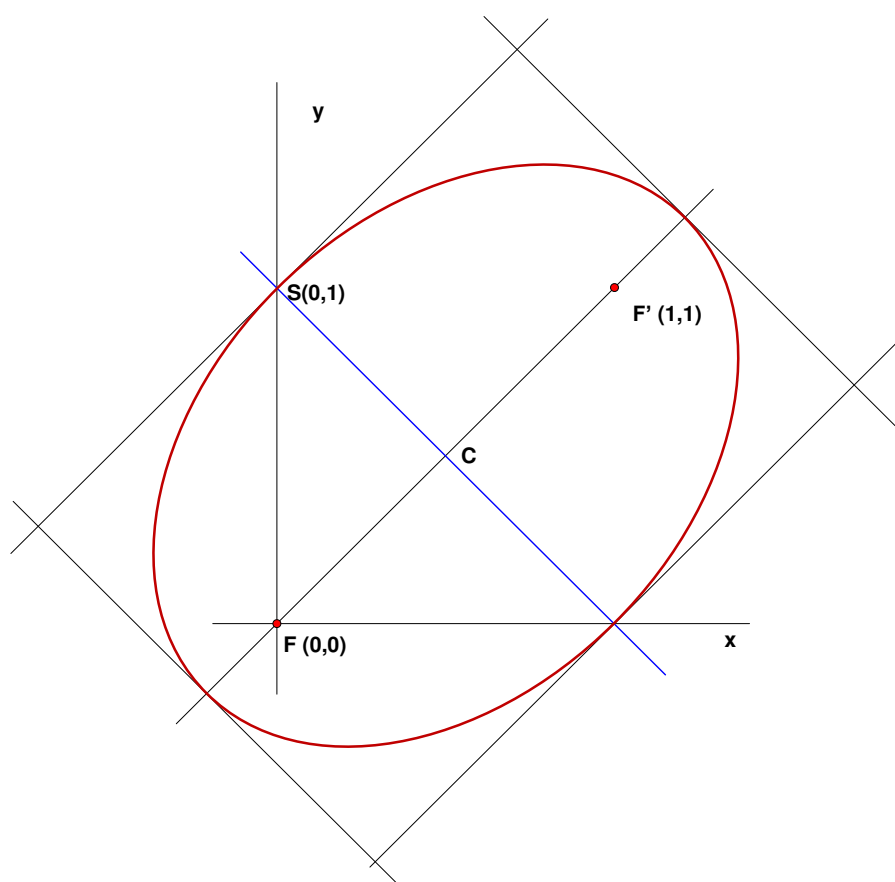
Notons que dans le cas particulier où $c = 0$, le lieu est une droite horizontale : $y = \frac{4d}{3}$

EXGAP131 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2009.

Donnez l'équation cartésienne de l'ellipse dont les foyers sont en : $F(0,0)$ et $F'(1,1)$ et qui passe par le point $S(0,1)$. Commencez par faire un dessin.

NB : L'exercice requiert la mise en oeuvre d'une propriété des ellipses (14 points sur 25) ainsi qu'une partie algébrique qui permet d'amener le résultat sous une forme qui puisse être identifiée à l'équation d'une ellipse (11 points sur 25). Cette deuxième partie peut être un peu longue: essayez d'utiliser une « astuce » pour raccourcir le développement

Solution proposée par Paul Etienne



Soit $P(x, y) \in E \rightarrow d(P, F) + d(P, F') = d(S, F) + d(S, F')$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + 1 \rightarrow 4(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$$

$$\rightarrow \boxed{3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 1 = 0}$$

Remarques

1. Le milieu des foyers est le centre $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de E

2. Comme $SC \perp FF'$: S est un sommet du petit axe, l'autre est $S'(1, 0)$

3. Les sommets du grand axe sont à distance 1 de C sur SS'

Réduction de la conique proposée par Christophe Leclère

Il reste à transformer l'équation $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$ en une forme canonique pour les ellipses.

Pour ce faire, il convient d'utiliser un repère dans lequel les axes de l'ellipse sont parallèles aux axes.

D'après la figure (ou en examinant la droite FF'), on remarque que, dans le repère proposé, les axes de l'ellipse forment un angle de 45° avec les axes Ox et Oy .

On va donc exprimer l'équation dans un nouveau repère dont les (nouveaux) axes Ox' et Oy' sont déterminés par des vecteurs unités u (selon Ox') et v (selon Oy') dont les coordonnées dans le repère original sont données par

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad v\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Un point P repéré dans le nouveau repère par les coordonnées (x', y') aura donc pour coordonnées dans le repère original $(x, y) = x'u + y'v$, c'est-à-dire

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Cette relation entre les coordonnées dans l'ancien et le nouveau repère, nous permet de réécrire l'équation de l'ellipse dans le nouveau repère :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(x' - y')^2 + \frac{3}{2}(x' + y')^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') - 1 &= 0 \\ 3x'^2 + 3y'^2 - x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}x' - 1 &= 0 \\ 2x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 4y'^2 &= 1 \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme canonique d'une ellipse, c'est-à-dire $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$, il suffit de réécrire

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}x' = 2\left(x'^2 - \sqrt{2}x'\right) = 2\left(\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$$

L'équation devient alors,

$$2\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4y'^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1} - \frac{y'^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

ce qui correspond à une ellipse de centre $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et de rayons 1 (en Ox') et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (en Oy').

Dans le repère original, le centre devient $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, qui est bien un point à mi-chemin entre

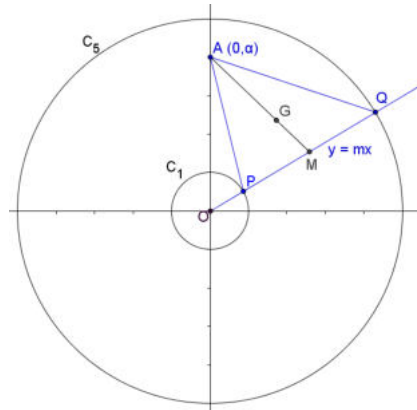
les deux foyers F et F' . On peut également vérifier que la distance entre $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et le sommet

du petit axe $S(0,1)$ vaut bien $\frac{\sqrt{2}}{2}$

EXGAP132 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2009.

OXY est un repère orthonormé du plan. C_1 et C_5 sont les cercles centrés à l'origine de rayons respectifs 1 et 5. Une demi-droite mobile d'origine O et de pente m (où m est un paramètre réel ou infini) coupe C_1 en P et C_5 en Q . Soit A un point de l'axe OY .

- Déterminer le lieu du centre de gravité (centre de masse, barycentre) du triangle APQ .
- Existe-t-il des positions particulières de A , sur OY , telles que le lieu soit tangent à C_1 et C_5 ?
- Y-a-t-il d'autres points du plan pour lesquels cette propriété est vérifiée? Si oui, lesquels?



- 1) Les équations des cercles sont : $\begin{cases} C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1 \\ C_5 \equiv x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ et l'équation de la droite variable $d \equiv y = mx$.

Les points d'intersections de la droite d avec les cercles sont :

$$P = C_1 \cap d : \left(\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}, m\sqrt{\frac{1}{1+m^2}} \right) \quad \text{et} \quad Q = C_5 \cap d : \left(\sqrt{\frac{25}{1+m^2}}, m\sqrt{\frac{25}{1+m^2}} \right)$$

Soit le point $A(0, \lambda)$ un point de l'axe des y , les coordonnées de G , centre de gravité du triangle APQ ,

sont : $G : \left(\frac{x_A + x_P + x_Q}{3}, \frac{y_A + y_P + y_Q}{3} \right)$.

On remplace et on obtient le système :

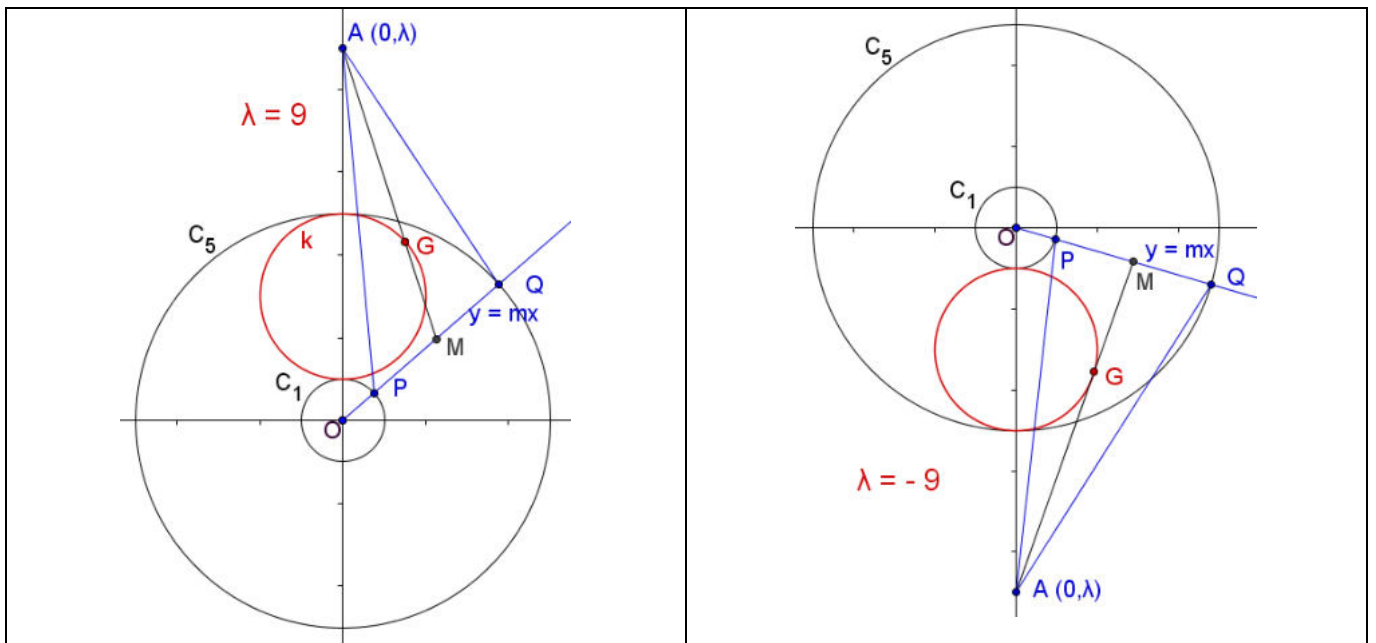
$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{1}{1+m^2}} + \sqrt{\frac{25}{1+m^2}} \right) \\ y_G = \frac{1}{3} \left(\lambda + m\sqrt{\frac{1}{1+m^2}} + m\sqrt{\frac{25}{1+m^2}} \right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x_G = 6\sqrt{\frac{1}{1+m^2}} \\ 3y_G - \lambda = 6\sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3x_G}{6} \right)^2 = \frac{1}{1+m^2} \\ \left(\frac{3y_G - \lambda}{6} \right)^2 = \frac{m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

On élimine facilement le paramètre m en additionnant membre à membre :

$$\rightarrow \left(\frac{3x_G}{6} \right)^2 + \left(\frac{3y_G - \lambda}{6} \right)^2 = 1 \rightarrow 9x_G^2 + (3y_G - \lambda)^2 = 36 \rightarrow \boxed{x_G^2 + \left(y_G - \frac{\lambda}{3} \right)^2 = 4}$$

C'est un cercle de centre $\left(0, \frac{\lambda}{3} \right)$ et de rayon 2

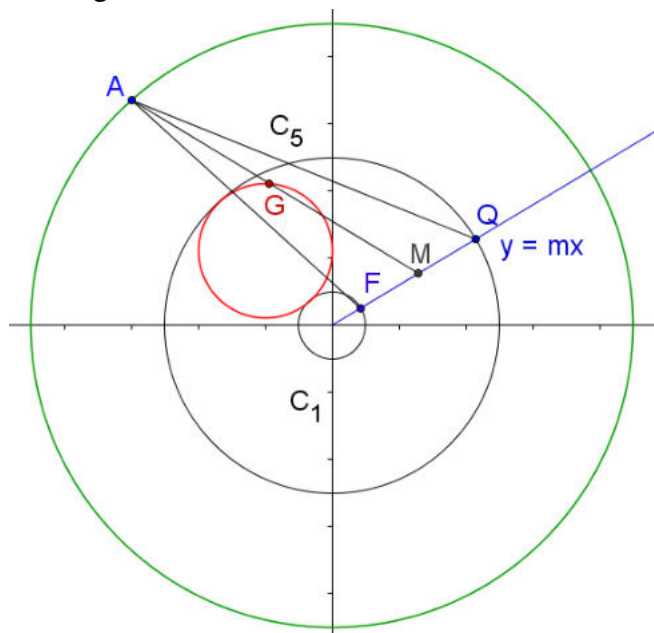


b) Le lieu sera tangent aux deux cercles si l'ordonnée du centre $\left(\frac{\lambda}{3}\right)$ est situé à mi-distance des deux

circonférences C_1 et C_5 . $\rightarrow \frac{\lambda}{3} = 3 \rightarrow \boxed{\lambda = 9}$

Par simple raison de symétrie : $\boxed{\lambda = -9}$ est également une solution.

c) De même pour des raisons de symétrie, on en déduit que si A se déplace sur la circonférence de centre O et de rayon 9, le lieu sera tangent aux deux cercles donnés.

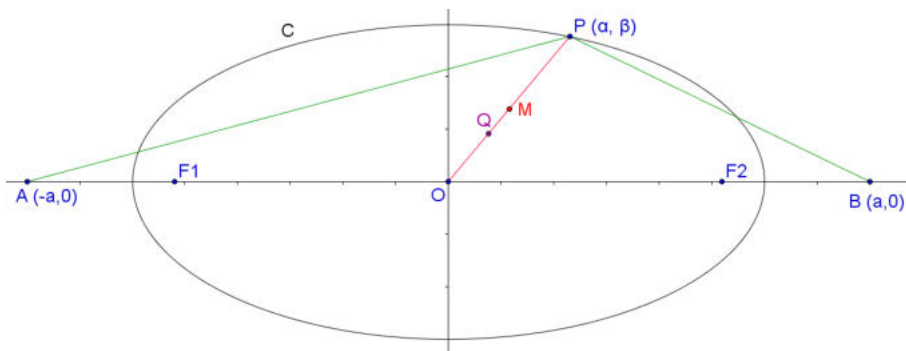


EXGAP133 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2009.

OXY est un repère orthonormé du plan. On donne l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} = 1$ et

deux points de l'axe OX : $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ où a est réel positif.

- Déterminez le lieu géométrique du centre de gravité (centre de masse, barycentre) du triangle PAB sachant que P est un point quelconque de l'ellipse.
- Calculer la valeur de a si A et B sont les foyers de l'ellipse.
- Déterminez le lieu géométrique du point Q situé sur OP au tiers de OP à partir de O .
- Déterminez le lieu géométrique du point M , milieu de OP .



a) Soit $P(\alpha, \beta)$ appartenant à l'ellipse C . Donc : $\frac{\alpha^2}{36} + \frac{\beta^2}{9} = 1 \rightarrow \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{36 - \alpha^2}$.

Le centre de gravité G du triangle PAB est le point de rencontre de ces médianes.

$$\rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\alpha}{3} \\ y_G = \pm \frac{1}{6} \sqrt{36 - \alpha^2} \end{cases} \rightarrow y_G = \pm \frac{1}{6} \sqrt{36 - 9x_G^2} \rightarrow 36y_G^2 = 36 - 9x_G^2 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1}$$

C'est une ellipse centrée à l'origine, de demi grand axe $a = 2$, de demi petit axe $b = 1$ et de foyers $H_1(-\sqrt{3}, 0)$ et $H_2(\sqrt{3}, 0)$.

b) Les foyers de l'ellipse C sont : $F_1(-3\sqrt{3}, 0)$ et $F_2(3\sqrt{3}, 0)$. $\rightarrow \boxed{\alpha = 3\sqrt{3}}$

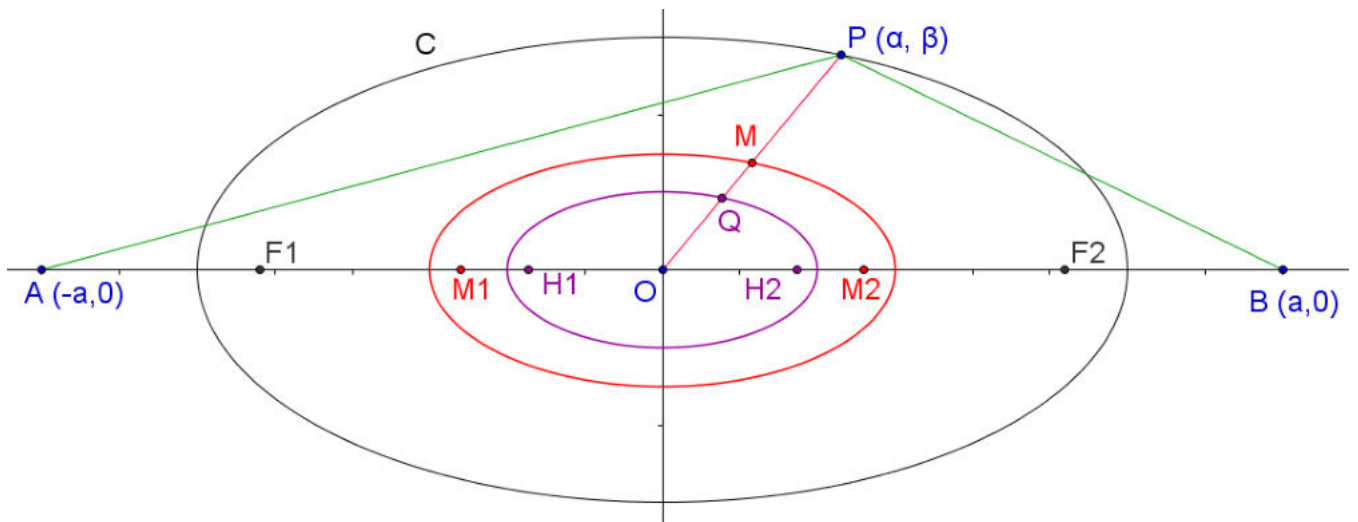
c) Q est le centre de gravité du triangle PAB , la question a donc été résolue au point a)

d) Les coordonnées de M sont :

$$\begin{cases} x_M = \frac{\alpha}{2} \\ y_M = \pm \frac{1}{4} \sqrt{36 - \alpha^2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1}$$

C'est une ellipse de centrée à l'origine, de demi grand axe $a = 3$, de demi petit axe $b = \frac{3}{2}$

et de foyers $M_1\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et $M_2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$



Le 25 juin 2010

EXGAP134 – FACSA, ULiège, Liège, Juillet 2018.

Un segment de longueur constante se déplace dans le plan, de manière telle que ses extrémités A et B s'appuient sur les deux côtés d'un angle droit donné.

On demande

- (a) de déterminer le lieu d'un point P quelconque du segment (en précisant la nature de ce lieu).
- (b) de représenter graphiquement ce lieu lorsque P est le milieu du segment.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/>

- (a) On se place dans un repère orthonormé dont les axes correspondent aux côtés de l'angle droit donné. Dans ce repère, les points A et B possèdent les coordonnées $A : (\alpha, 0)$ et $B : (0, \beta)$, avec $\alpha, \beta \geq 0$. La longueur $|AB|$ étant constante, on peut choisir sans perte de généralité l'unité du repère égale à cette longueur, ce qui impose la contrainte $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Cette contrainte permet d'exprimer β en fonction de α , et dès lors d'exprimer les coordonnées de A et de B en termes du seul paramètre α . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} A &: (\alpha, 0) \\ B &: (0, \sqrt{1 - \alpha^2}), \end{aligned}$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Si P est un point donné du segment $[AB]$, alors ses coordonnées (x_P, y_P) satisfont l'équation paramétrique de la droite AB :

$$\begin{aligned}(x_P, y_P) &= (\alpha, 0) + \lambda \overrightarrow{AB} \\ &= (\alpha, 0) + \lambda \left((0, \sqrt{1 - \alpha^2}) - (\alpha, 0) \right) \\ &= ((1 - \lambda)\alpha, \lambda\sqrt{1 - \alpha^2}),\end{aligned}$$

avec $\lambda \in [0, 1]$ constant.

Pour obtenir une équation cartésienne du lieu, il suffit alors d'éliminer le paramètre α du système

$$\begin{cases} x_P = (1 - \lambda)\alpha \\ y_P = \lambda\sqrt{1 - \alpha^2} \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

On obtient l'équation

$$\lambda^2 x_P^2 + (1 - \lambda)^2 y_P^2 = \lambda^2 (1 - \lambda)^2,$$

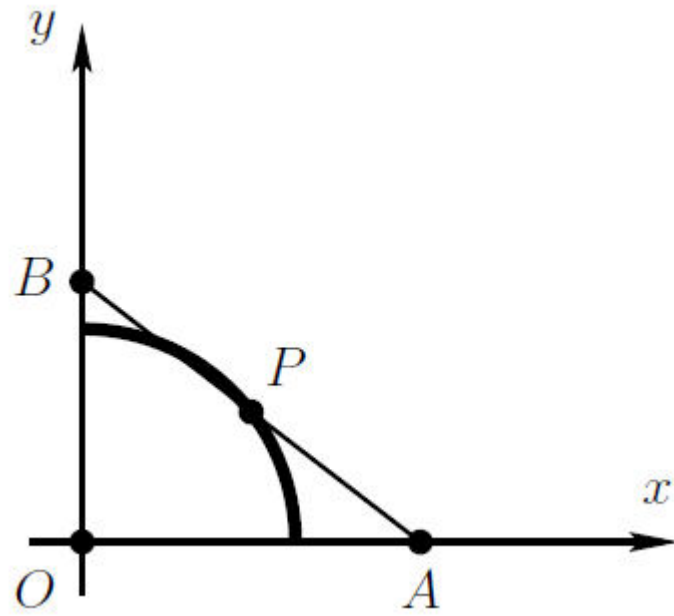
qui est celle d'une ellipse dont les axes sont parallèles à ceux du repère. (Cette ellipse dégénère en un segment de droite dans les cas particuliers $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.) Étant donné que les contraintes imposées à α et λ correspondent à $x_P \geq 0$ et $y_P \geq 0$, le lieu recherché est l'arc de cette ellipse limité au premier quadrant du repère.

- (b) Il y a plusieurs façons de résoudre le problème pour ce cas particulier. Le plus simple consiste à poser $\lambda = \frac{1}{2}$ dans l'équation obtenue au point (a). Cette équation devient alors

$$x_P^2 + y_P^2 = \frac{1}{4},$$

qui montre que le lieu est l'arc du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré sur l'origine O du repère correspondant au premier quadrant.

Il était également possible de résoudre le problème par la géométrie synthétique. Le triangle OAB étant rectangle en O , son hypoténuse $[AB]$ est un diamètre de son cercle circonscrit, ce qui entraîne $|OP| = |AP| = |BP| = \frac{1}{2}|AB|$. La longueur $|AB|$ étant constante, $|OP|$ l'est aussi, dont on déduit que P se déplace sur un arc de cercle de rayon $\frac{1}{2}|AB|$ centré en O .



Le 25 juin 2010

EXGAP135 – EPL , UCL, Louvain, juillet 2010 série 1.

Dans le plan xy , donnez l'abscisse cartésienne de la parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe x , dont l'abscisse du sommet est $x = -1$, qui passe par l'origine o et qui, en o , est tangente à la droite d'équation $x = y$.

Solution proposée par Christophe Leclère

La parabole étant parallèle à l'axe des x , elle a pour équation: $x = ay^2 + by + c$.

Comme elle passe par l'origine, on peut immédiatement déduire que : $c = 0$.

Le sommet de la parabole se situe en $y = -\frac{b}{2a}$, où on trouve

$$x = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} = -\frac{b^2}{4a} = -1 \text{ et donc } a = \frac{b^2}{4}.$$

L'équation de la parabole peut donc se réécrire $x = \frac{b^2}{4}y^2 + by$ ou encore $x = \left(\frac{b}{2}y + 1\right)^2 - 1$.

Cette dernière version permet d'obtenir les équations de chacune des branches de la parabole :

$$\left(\frac{b}{2}y + 1\right)^2 = x + 1 \text{ (pour } x \geq -1) \Rightarrow \frac{b}{2}y = -1 \pm \sqrt{x+1} \Rightarrow y = \frac{2}{b}(-1 \pm \sqrt{x+1})$$

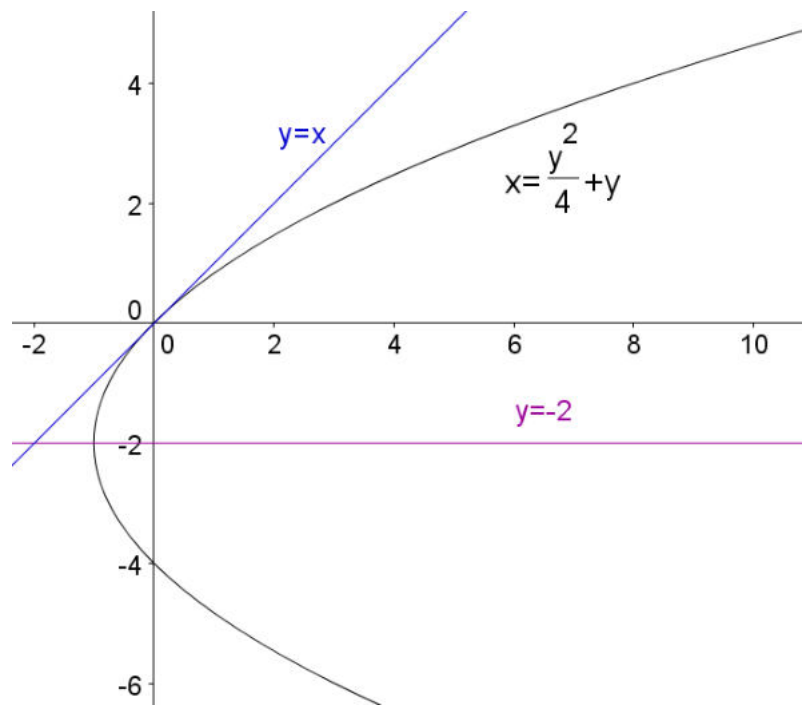
La branche qui passe par l'origine est $y = \frac{2}{b}(-1 + \sqrt{x+1})$.

En dérivant l'expression pour calculer le coefficient angulaire de la tangente, on obtient

$$y'(x) = \frac{2}{b} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{b\sqrt{x+1}}$$

Comme $y'(0) = 1$, on trouve $b = 1$.

Au final, l'équation de la parabole est donc : $x = \frac{y^2}{4} + y$



13 décembre 2010

EXGAP136 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 2.

Les équations cartésiennes de deux paraboles sont données par $y = x^2$ et $y = (x-b)^2 + a$.
Trouvez b pour que les deux paraboles se croisent en formant un angle droit
(les tangentes aux paraboles au point d'intersection forment un angle droit), d'abord pour
 $a = 0$ ensuite pour $a = 1$. Dans le deuxième cas, le résultat peut être présenté sous une forme
non simplifiée (quoique la plus simple possible)

1er cas : $a = 0$

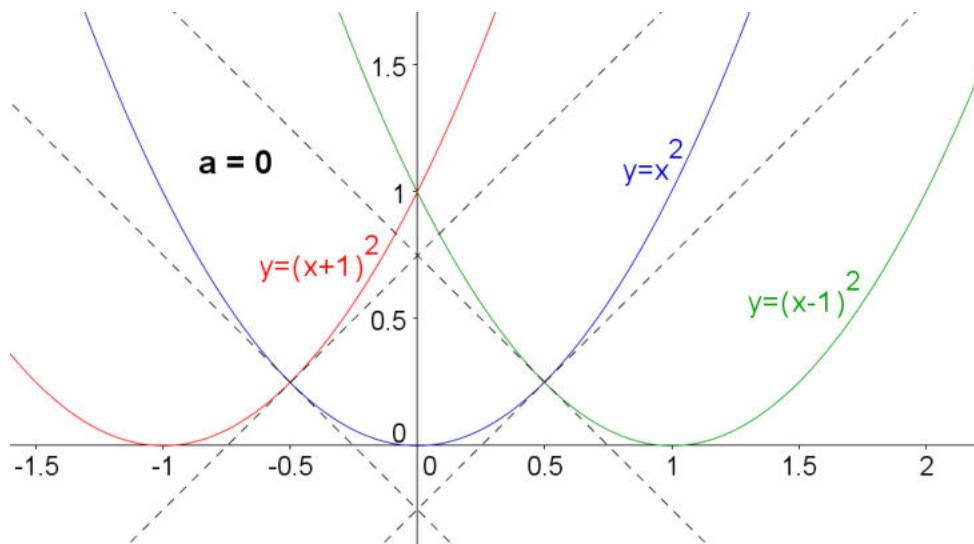
Soit α l'abscisse du point d'intersection des deux paraboles.

$$\rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-b)^2 \end{cases} \rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha b + b^2 \rightarrow \alpha = \frac{b}{2}$$

En ce point, les tangentes sont perpendiculaires, donc $m_{t_1} = -\frac{1}{m_{t_2}}$

$$\rightarrow \begin{cases} y = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow m_{t_1} = 2\alpha = b \\ y = (x-b)^2 \rightarrow y' = 2(x-b) \rightarrow m_{t_2} = 2(\alpha - b) = 2\left(\frac{b}{2} - b\right) = -b \end{cases}$$

$$\rightarrow b = -\frac{1}{b} \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow \boxed{b = \pm 1}. \text{ Il y a donc deux solutions}$$



2ème cas : $a = 1$

Soit α l'abscisse du point d'intersection des deux paraboles.

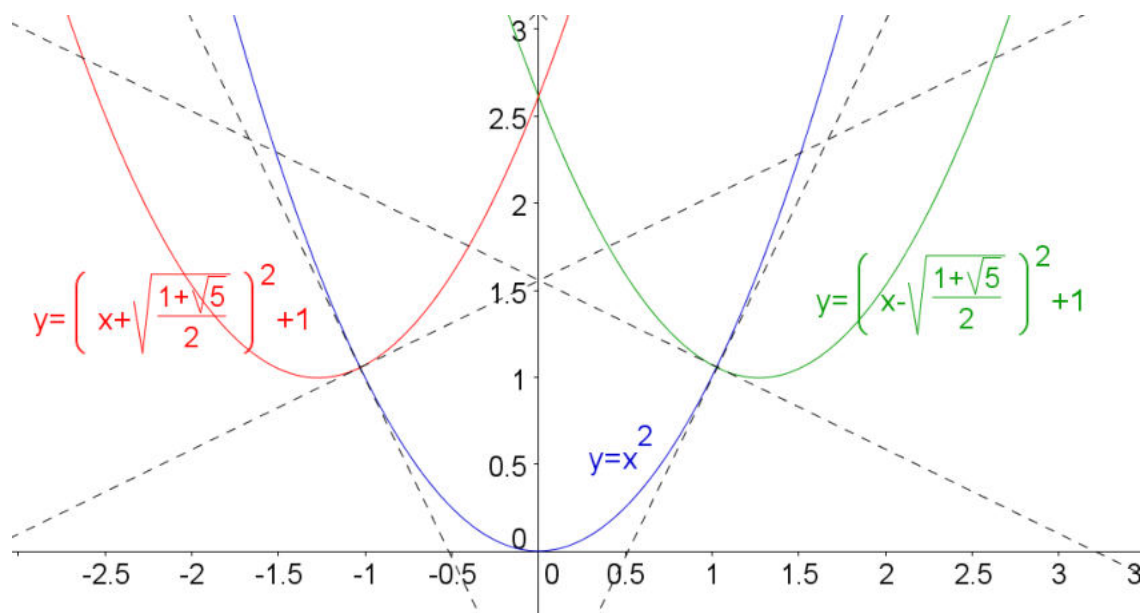
$$\rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-b)^2 + 1 \end{cases} \rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha b + b^2 + 1 \rightarrow \alpha = \frac{b^2 + 1}{2b}$$

En ce point, les tangentes sont perpendiculaires, donc $m_{t_1} = -\frac{1}{m_{t_2}}$

$$\rightarrow \begin{cases} y = x^2 & \rightarrow y' = 2x & \rightarrow m_{t_1} = \frac{b^2 + 1}{b} \\ y = (x-b)^2 + 1 & \rightarrow y' = 2(x-b) & \rightarrow m_{t_2} = 2(\alpha - b) = 2\left(\frac{b^2 + 1}{2b} - b\right) = \frac{1 - b^2}{b} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{b^2 + 1}{b} = -\frac{1}{\frac{1 - b^2}{b}} \rightarrow b^4 - b^2 + 1 = 0 \rightarrow b^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{On rejete la solution négative})$$

$$\rightarrow \boxed{b = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}. \text{ Il y a donc aussi deux solutions}$$



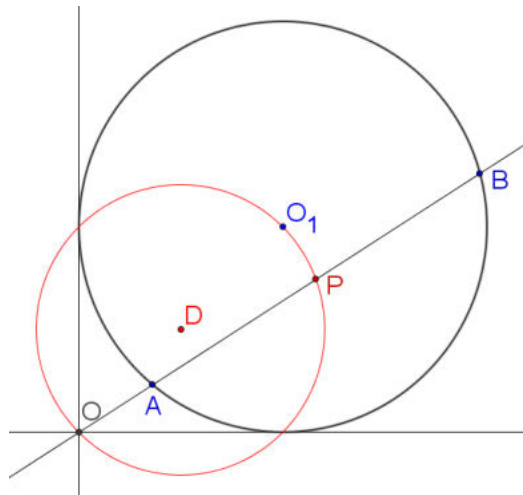
20 juillet 2010

EXGAP137 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 2.

Soit le cercle dont l'équation cartésienne est donnée par $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$.

On imagine une droite D passant par l'origine et ayant deux points d'intersection avec le cercle et l'on prend le point P situé au milieu de ces deux points (la position du point P dépendra bien-entendu de la pente α de D). Donnez l'équation cartésienne du lieu des points P qui répondent à la définition ci-dessus (α n'apparaît pas dans la réponse !).

A quelle forme géométrique précise ce lieu correspond-il ?



La droite a pour équation $D \equiv y = \alpha x$

Remplaçons y par cette valeur dans l'équation du cercle :

$$(x - R)^2 + (\alpha x - R)^2 = R^2 \rightarrow (1 + \alpha^2)x^2 - 2R(1 + \alpha)x + R^2 = 0$$

Pour une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, le milieu des solutions est donné par $-\frac{b}{2a}$

L'abscisse du point P est alors : $x = \frac{R(1 + \alpha)}{(1 + \alpha^2)}$ or $\alpha = \frac{y}{x}$

$$\rightarrow x = \frac{R\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} \rightarrow x \frac{x^2 + y^2}{x^2} = R \frac{x + y}{x} \rightarrow x^2 + y^2 - Rx - Ry = 0$$

$$\rightarrow x^2 - Rx + \frac{R^2}{4} + y^2 - Ry + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{2} \rightarrow \boxed{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2}}$$

Le lieu est donc un cercle de centre $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$, de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, qui passe par l'origine et limité aux points de tangence $(R, 0)$ et $(0, R)$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Il suffit de remarquer que comme P est le milieu de la corde AB , alors l'angle O_1PO est un angle droit et donc OO_1 est un diamètre.

Le lieu est donc un cercle de centre $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$, de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, qui passe par l'origine et limité aux points de tangence $(R, 0)$ et $(0, R)$.

15 août 2010. (Modifié le 30 janvier 2011 Nicole Berckmans)

EXGAP138 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O , et on considère les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ soient perpendiculaires.

Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur la droite PQ

Solution proposée par David Hamoir

Soient les coordonnées de P : $(1, \alpha)$

Equation de la droite $OP \equiv y = \alpha x$

Equation de la droite $OQ \equiv -\frac{1}{\alpha}x$

\rightarrow Coordonnées de $Q = (-\alpha, 1)$

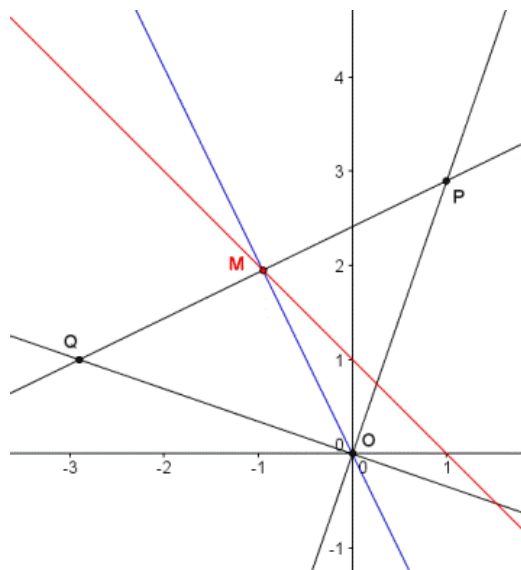
Nous en déduisons l'équation de la $PQ \equiv y = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}x + \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

Et l'équation de la perpendiculaire à PQ passant par l'origine : $y = -\frac{\alpha+1}{\alpha-1}x$

Les coordonnées de M , intersection de la droite PQ et de la perpendiculaire :

$$M = \begin{cases} x = \frac{1-\alpha}{2} \\ y = \frac{1+\alpha}{2} \end{cases}$$

L'équation du lieu de M s'obtient en éliminant α : $y = -x + 1$



EXGAP139 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 09.

Dans le plan XY , soient les points P_1 et P_2 de coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(1,0)$.

Soit C_1 le lieu des points dont la somme des distances à P_1 et P_2 est 4.

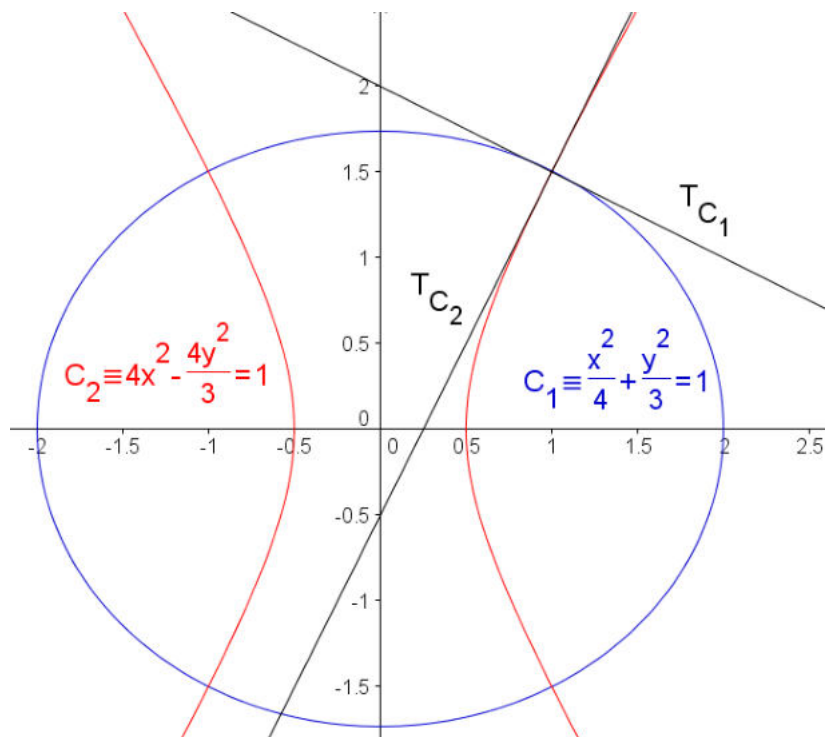
Soit C_2 le lieu des points dont la différence à P_1 et P_2 est ± 1 .

Avec quel angle ces deux lieux se coupent-ils? Justifiez votre réponse en détail.

Indications :

- 1) Déterminez à quels types de courbes C_1 et C_2 appartiennent.
- 2) Donnez les équations cartésiennes de C_1 et C_2 .
- 3) L'angle avec lequel deux courbes se coupent est l'angle que forment leurs tangentes au point d'intersection des courbes.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$1-2) C_1 \text{ est une ellipse : } 2a = 4; 2c = 2; b^2 = a^2 - c^2 = 3 \Rightarrow C_1 \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (1)$$

$$C_2 \text{ est une hyperbole : } 2a = 1; 2c = 2; b^2 = c^2 - a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow C_2 \equiv 4x^2 - \frac{4y^2}{3} = 1 \quad (2)$$

$$3) C_1 \cap C_2 = \left\{ \left(1, \frac{3}{2}\right); \left(1, -\frac{3}{2}\right); \left(-1, \frac{3}{2}\right); \left(-1, -\frac{3}{2}\right) \right\}$$

Cherchons les coefficients angulaires des tangentes en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Utilisons les dérivées :

$$(1) \rightarrow \frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{3} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3x}{4y} = -\frac{3 \times 1}{4 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \rightarrow 8x - \frac{8yy'}{3} = 0 \Rightarrow y' = \frac{3x}{y} = \frac{3 \times 1}{\frac{3}{2}} = 2$$

Les deux tangentes sont perpendiculaires.

Il en est de même aux autres points d'intersection.