Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 15

EXGAP150 – EXGAP159

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Aout 2012

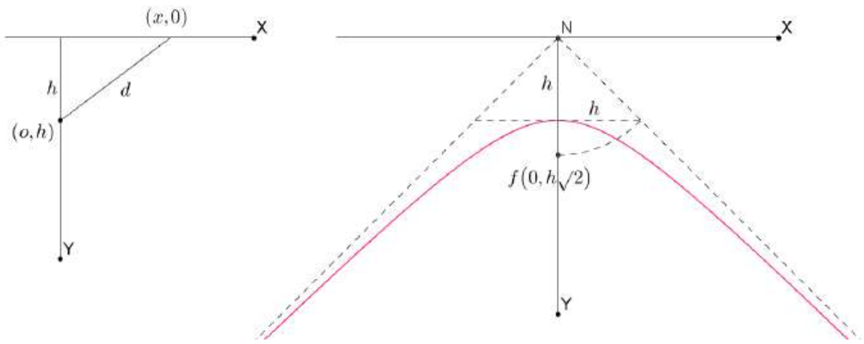
EXGAP150 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2012, série 2.

Un radar d'observation du sol est déplacé à la surface du sol. Le déplacement à lieu le long de l'axe X, tandis que la coordonnée vers la bas et y (l'interface air-sol est en $y = 0$).
En $(x, y) = (0, h)$ se trouve une cible. Pour toute position x du radar, ce dernier fournit sa distance $f(x)$ à la cible. Graphiquement, pour toute position x, l'on décide de reporter cette distance le long de l'axe Y. Autrement dit, l'on décrit une fonction $y = f(x)$ donnant la distance à la cible pour toute position du radar.

1) Faites un dessin approximatif de la courbe $y = f(x)$. montrer que $f(0) = h$.
2) A quel type de conique cette courbe appartient-elle? Donner son équation cartésienne.
3) Quelle la profondeur (coordonnée y) du foyer (ou d'un des foyers) de cette fonction?

NB1: le radar et la cible se trouvent en $z = 0$ (problème 2D).
NB2: l'on suppose une cible et un radar "pontuels" (on néglige leur taille).

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$f(x) = d = \sqrt{x^2 + h^2};\ f(0) = h;$$

$$y = \sqrt{x^2 + h} \Rightarrow y^2 - x^2 = h^2 \Rightarrow \frac{y^2}{h^2} - \frac{x^2}{h^2} = 1$$

C'est une hyperbole équilatère de sommet $(0, h)$ et de foyer $(0, h\sqrt{2})$

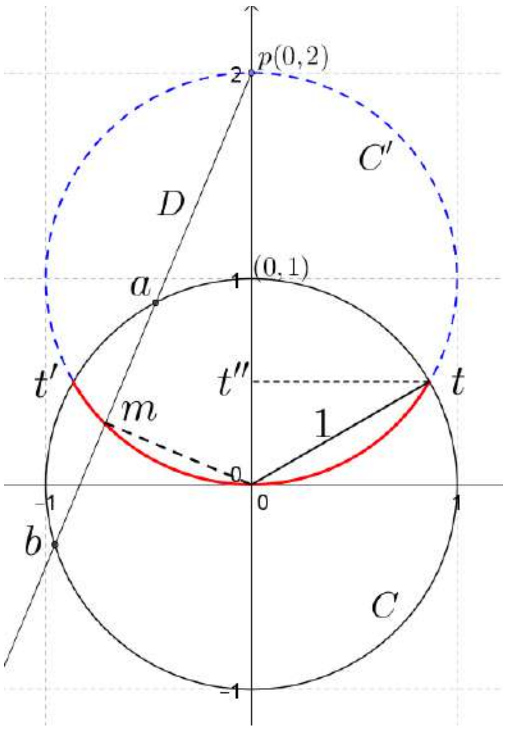
---

22 aout 2012

EXGAP151 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2012.

Soit le cercle C d'équation $x^2+y^2=1$. Soit le point p de coordonnées $(x,y)=(0,2)$.
On considère toutes les droites passant par p et coupant C en deux points.
Quel est le lieu du milieu de la corde délimitée par ces deux points?
Donnez l'équation cartésienne et déterminez-en les caractéristiques principales.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François



Géométrie synthétique

Soit m le milieu de pab. La médiatrice de ab est mo; $pm \perp mo$. m est donc un point du cercle C' de diamètre po, le centre de ce cercle C' est le milieu de $(0,1)$ de po et son rayon est 1.

$$C' \equiv x^2 + (y-1)^2 = 1,\ C' \equiv x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Le lieu est limité par les points de contact t et t' des tangentes à C issues de p.

$\Delta(p,t,o)$ est rectangle en p, $\|to\| = 1, \|tp\| = \sqrt{3}$

ot est moyenne géométrique entre $\|ot''\|$ et $\|op\|$

$1^2 = \|ot''\| \times 2 \Rightarrow \|ot''\| = 1/2, \|tt''\| = \sqrt{3}/2$

$\Rightarrow t : \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right), t' : \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Géométrie analytique

$\begin{cases} D \equiv y - 2 = \alpha x \\ C \equiv x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Droite issue de $(0,2)$

Equation aux abscisses des points d'intersection : $(1+\alpha^2)x^2 + 4\alpha x + 3 = 0$ (1)

Abscisse de $m = \dfrac{1}{2}$ somme des racines de (1) : $\begin{cases} x_m = \dfrac{-2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \alpha = \dfrac{y-2}{x} \end{cases}$

Lieu $\equiv x = \dfrac{\dfrac{-2y+4}{x}}{\dfrac{x^2+(y-2)^2}{x^2}} \Rightarrow L \equiv x^2 + y^2 - 2y = 0 = \text{cercle } C'$

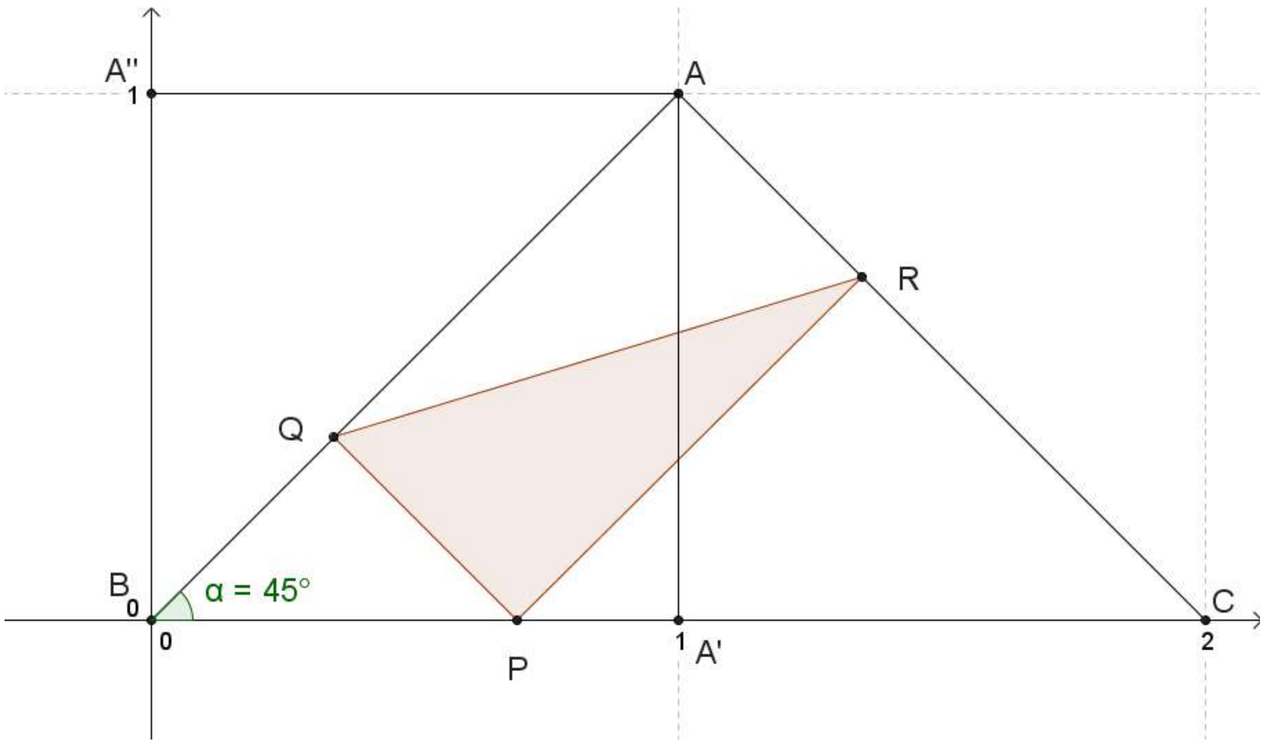
Point limites du lieu : $C \cap C' \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

EXGAP152 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Dans un repère orthonormé, on considère les trois points $A(1,1), B(0,0), C(2,0)$.
Pour tout point P de la droite BC, on notre Q la projection orthogonale de P sur la droite AB et R la projection orthogonale de P sur la droite AC.

a) En fonction de l'abscisse de P, évaluer le rapport de l'aire du triangle PQR à celle du triangle ABC.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de cette abscisse ce rapport est-il égal à $1/4$?



Soit P un point quelconque de la droite BC, d'abscisse $p=\overline{OP}$.
p est un nombre relatif, positif ou négatif car $p=0$ ne présente aucun intérêt.
De toute évidence l'aire du triangle ABC est égale à l'aire du carré $OA'AA''$: $\mathcal{A}_{ABC}=1\,\mathcal{U}$
La relation de Chasles : $\overline{OA}+\overline{AO}=\overline{OQ}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}+\overline{AQ}=\frac{p\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \overline{AQ}=\frac{p\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(p-2)\Rightarrow \overline{AQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}|p-2|$$

D'autre part, dans le triangle rectangle OQP, on a $\overline{QP}=|p|\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{PQR}=\frac{1}{2}\overline{QP}.\overline{AQ}=\frac{1}{2}.|p|\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}|p-2|$$

D'où le rapport demandé : $k=\frac{\mathcal{A}_{PQR}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{1}{4}|p(p-2)|$

Pour enlever les barres de module, il faut faire la variation du signe de $p(p-2)$ dont les racines sont 0 et 2.

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$p(p-2)$		+	0	−	0	+	

Rappel : $|a|=\begin{cases} a \text{ si } a>0 \\ -a \text{ si } a<0 \end{cases}$

<u>1) si $p<0$ ou $p>2$</u>

Alors $|p(p-2)|=p(p-2)$ et $k=\frac{1}{4}$ si $p(p-2)=1$

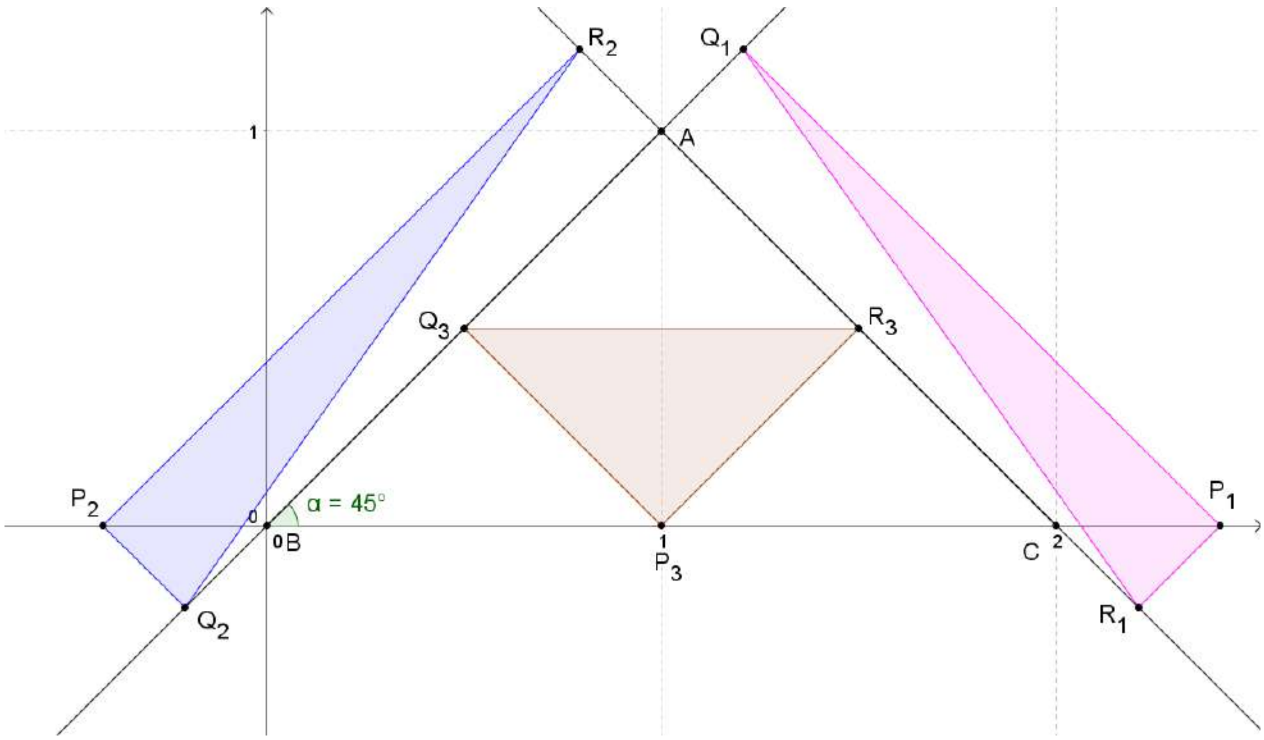
$$\Rightarrow p^2-2p-1=0 \text{ soit deux solutions } \begin{cases} p_1=1+\sqrt{2}\simeq 2.41 \\ p_2=1-\sqrt{2}\simeq -0.41 \end{cases}$$

<u>2) si $0<p<2$</u>

Alors $|p(p-2)|=(2-p)p$ et $k=\frac{1}{4}$ si $(2-p)p=1$

$$\Rightarrow p^2-2p+1=0\Rightarrow (p-1)^2=0 \text{ soit deux solutions confondues } p_3=1$$

Remarque : on peut évidemment construire, avec règle et compas, les 3 points $p_1=1+\sqrt{2}$, $p_2=1-\sqrt{2}$ et $p_3=1$

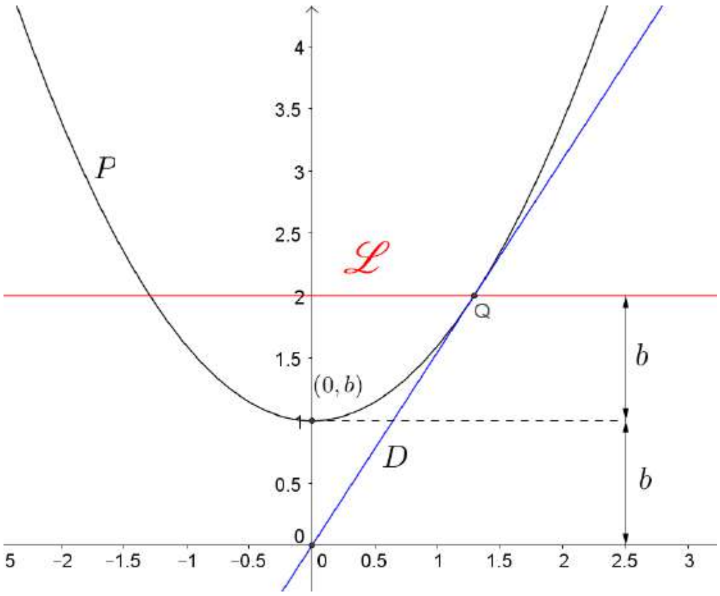


Le 22 septembre 2011

EXGAP153 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2013, série 1.

Soit une parabole P d'équation cartésienne $y = ax^2 + b$. Soit une droite D passant par l'origine et tangente à la parabole en un point Q. L'on fait varier a, tandis que b reste constante. Quel est le lieu géométrique de Q? Si vous utilisez une formule toute faite concernant la tangente à une parabole vous devez la démontrer.

Solution proposée par Louis François



<u>Méthode des génératrices</u> $Q = D \cap P$

Equation de D, droite issue de $(0,0)$ et tangente à P; càd $D \cap P$ est un point.

$$D \cap P : \begin{cases} D \equiv y = \lambda x \\ P \equiv y = ax^2 + b \end{cases} \Rightarrow \lambda x = ax^2 + b \Rightarrow ax^2 - \lambda x + b = 0$$

Une solution en x, donc $\rho = \lambda^2 - 4ab = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{ab}$

$$\begin{cases} \mathscr{C}_1 = \text{Parabole} \equiv y = ax^2 + b \\ \mathscr{C}_2 = \text{droite } D \equiv y = \pm 2\sqrt{ab}\, x \end{cases}$$

Eliminons le parmètre variable a

De $\mathscr{C}_2 : a = \dfrac{y^2}{4bx^2}$; dans $\mathscr{C}_1 : y = \dfrac{y^2}{4bx^2} x^2 + b \Rightarrow y^2 - 4by + 4b^2 = 0 \Rightarrow (y - 2b)^2 = 0$

Conclusion : Le lieu de Q est une droite horizontale d'équation : $\boxed{\mathscr{L} \equiv y = 2b}$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Méthode par traduction

$$Q(\alpha,\beta).\ \begin{cases} y = \lambda x & \text{car } D \text{ droite passant par } O(0,0) \\ \lambda = 2a\alpha & \text{pente de } D \text{ car } (ax^2+b)' = 2ax \\ \beta = ax^2 + b & \text{car } Q \in \text{ parabole} \end{cases}$$

Eliminons λ et a de ces 3 équations : $\begin{cases} \beta = 2a\alpha^2 & \Rightarrow a = \dfrac{\beta}{2\alpha^2} \\ \beta = a\alpha^2 + b & \Rightarrow \beta = \dfrac{\beta}{2} + b \quad \Rightarrow \dfrac{\beta}{2} = b \end{cases}$

Remplaçons α par x et β par y. L'équation du lieu est $\boxed{\mathscr{L} \equiv y = 2b}$

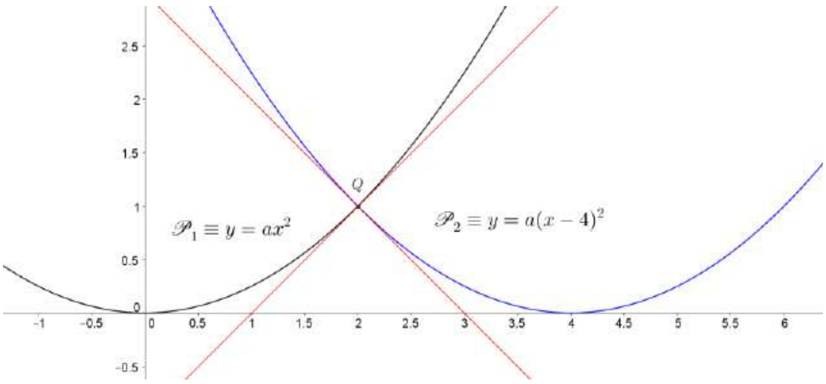
Le 19 septembre 2013

EXGAP154 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2013, série 2.

Soit un repère cartésien XY. Soit une parabole A d'axe Y, dont le sommet est en $(x, y) = (0,0)$ et dont les autres points satisfont à $y > 0$. Soit une parabole B, correspondant à une version translatée de A, avec un sommet en $(x, y) = (4,0)$. Ces paraboles se coupent à angle droite (les tangentes au point d'intersection sont orthogonales).

Donnez les équations cartésiennes de ces deux paraboles.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$Q = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 : \begin{cases} y = ax^2 \\ y = a(x-4)^2 \end{cases} \Rightarrow .... \Rightarrow Q(2,4a)$$

$$\mathscr{P}_1 : y_1' = 2ax \qquad \Rightarrow \text{ en } Q : y_1' = 4a$$

$$\mathscr{P}_2 : y_2' = 2a(x-4) \qquad \Rightarrow \text{ en } Q : y_2' = -4a$$

Les tangentes sont perpendiculaires : $y_1'.y_2' = -1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{P}_1 \equiv y = \dfrac{x^2}{4}, \quad \mathscr{P}_2 \equiv y = \dfrac{(x-4)^2}{4}}$

Le 19 septembre 2013

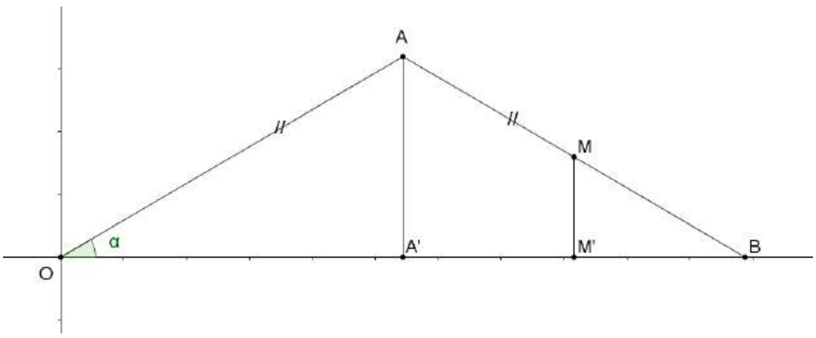
EXGAP155 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2013.

On modélise un système mécanique par un triangle (O, A, B) tel que le point O reste fixe et B ne peut se déplacer que sur l'axe horizontal (O, B). On suppose pour simplifier que les côtés OA et AB sont de même longueur L.

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.
2. Soit M le milieu du segment $[A, B]$. Déterminer le lieu des points décrits par le point M.
3. Soit S l'aire du triangle (O, M, B). Exprimer S en fonction de la distance OB uniquement.
4. Calculer S dans chacun des trois cas : $OB = 2L; OB = L\sqrt{2}; OB = L$.

NB. Justifier les réponses 2 à 4 en toute généralité. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Louis François



Résolution par la géométrie analytique - Méthode : lieu par traduction

2) Le lieu de A est un cercle $\mathscr{C}(0, L)$

Soit A' la projection de A sur OB, A' est le milieu de $[OB]$

$A : (L\cos\alpha, L\sin\alpha);\ \ A' : (L\cos\alpha, 0);\ \ B : (2L\cos\alpha, 0)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Rightarrow M : \begin{cases} x = \dfrac{3L\cos\alpha}{2} \\ y = \dfrac{L}{2}\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{\frac{3L}{2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{\frac{L}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ell_M \equiv \frac{x^2}{\left(\frac{3L}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 1}$$

Le lieu de M est une ellipse réduite de centre O et de demi-axes : $\dfrac{3L}{2}$ et $\dfrac{L}{2}$

Remarque : On aurait pu partir avec $A(a_1, a_2)$ où $a_1^2 + a_2^2 = L^2$; $B(2a_1, 0)$,.... $\begin{cases} x = \dfrac{3a_1}{2} \\ y = \dfrac{a_2}{2} \end{cases}$ etc

3) $S=\frac{1}{2}.\overline{OB}.\overline{MM'}=\frac{1}{2}.2L\cos\alpha.\frac{L}{2}\sin\alpha=L\cos\alpha.\frac{L}{2}\sqrt{1-\frac{4L^2\cos^2\alpha}{4L^2}}$

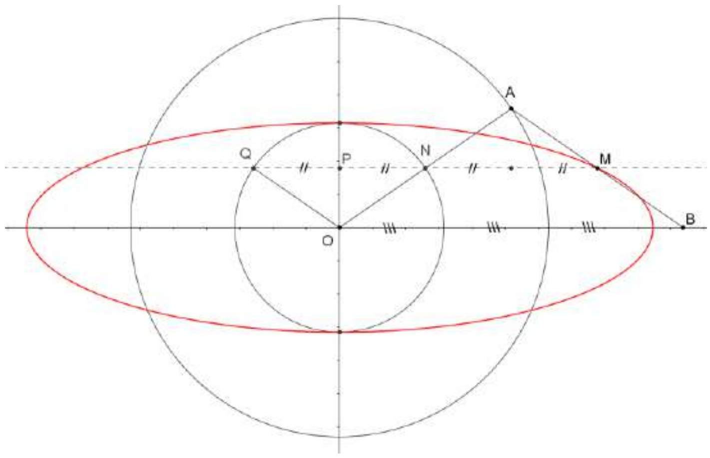
Or $\overline{OB}=2L\cos\alpha \Rightarrow \boxed{S=\frac{\overline{OB}}{8}.\sqrt{4L^2-\overline{OB}^2}}$

4) $\overline{OB}=2L \quad \Rightarrow \quad S=0$

$\overline{OB}=L\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad S=L^2/4$

$\overline{OB}=L \quad \Rightarrow \quad S=L^2\sqrt{3}/8$

Solution proposée par Nicole Berckmans



Résolution par la géométrie synthétique.

Le lieu de A est un cercle de centre O et de rayon L.

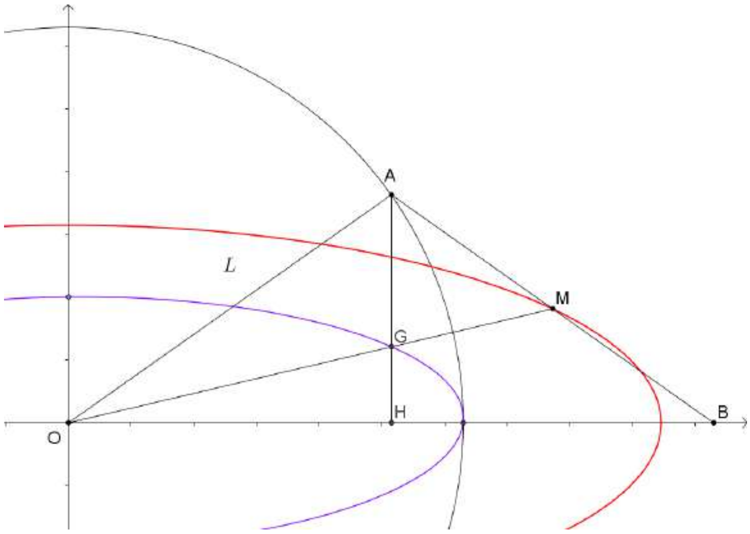
Par M traçons la parallèle à Ox qui coupe OA en N. Puisque M est le milieu de AB, $ON=L/2$

Le lieu de N est une cercle de centre O et de rayon $L/2$

On démontrer facilement que les triangles ΔOQM et ΔANM sont égaux. (isocèles, $L/2$, $\sphericalangle$ opposés,...). D'où $\overline{QN}=\overline{NM}$ et donc $\overline{PM}=3\overline{PN}$

L'affinité d'axe Oy qui applique N sur M (donc de rapport = 3) transforme le cercle de centre O et de rayon $L/2$ en une ellipse de centre O, dont le $1/2$ petit axe vaut $L/2$ et le $1/2$ grand axe vaut $3L/2$

Solution proposée par Michel Goffin



Notons G le centre de gravité du triangle OAB. G est l'intersection des médianes AH et OM.

De plus : $\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{AH}$ et $\overline{OM} = \frac{3}{2}\overline{OG}$

L'affinité d'axe Ox qui applique A sur G (donc de rapport $1/3$) transforme le cercle de centre O et de rayon L en une ellipse de centre O, de $1/2$ petit axe L et de $1/2$ grand axe $L/3$

L'homothétie $\mathscr{H}$ de centre O et de rapport $3/2$ envoie G sur M car $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$

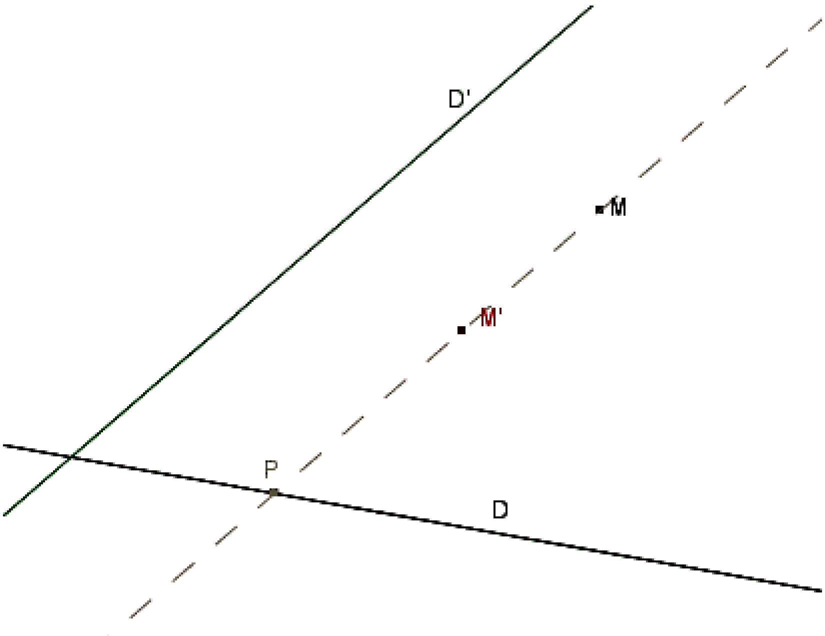
Cette homothétie transforme l'ellipse ci-dessus en une ellipse de centre O de $1/2$ petit axe $3/2 . L/3 = L/2$ et de $1/2$ grand axe $3L/2$

Rappel : Les affinités

Voir : http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./a/affinite.html

Soient D et D' deux droites non parallèles et k un réel non nul.
On appelle affinité d'axe D, de directrice D', et de rapport k l'application qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{PM'}=\text{k}.\overrightarrow{PM}$, P étant le point d'intersection de D avec la parallèle à D' menée par M. Si D et D' sont perpendiculaires, l'affinité est dite orthogonale. C'est par exemple par une affinité orthogonale d'axe (Ox) et de directrice (Oy), de rapport k, que l'on passe de la courbe représentative de f à la courbe représentative de kf.

En mathématiques, en géométrie en particulier, une affinité est une application affine ou linéaire égale à l'identité dans une direction et à une homothétie dans une autre.



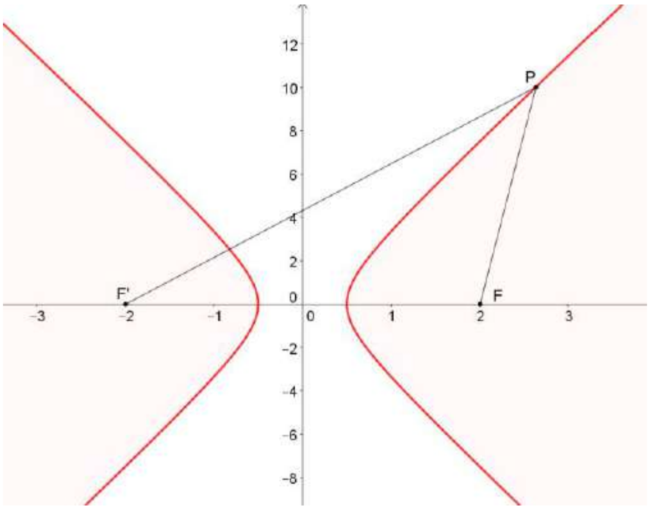
Pour la transformation d'un cercle en ellipse par affinité, voir :
http://gwendal.haudebourg.free.fr/maths/pdf/expose_48.pdf

Le 19 septembre 2013

EXGAP156 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Soient deux cibles situées en $(x, y) = (-2, 0)$ et $(x, y) = (2, 0)$. un radar, situé en un endroit inconnu du plan XY envoie une impulsion et reçoit en retour des impulsions en provenance des deux cibles. Entre les deux impulsions reçues, il y a décalage temporel de $2/c$, où c est la vitesse de la lumière. les distances sont données en mètres et c en mètres par secondes. Quel est le lieu des positions possibles du radar (son type et son équation cartésienne)? Pour information, le temps de parcours aller-retour d'une impulsion entre le radar et une cible correspond à $2d/c$ où d est la distance entre le radar et la cible. Commencez par faire un dessin et par relier les instants des implusions reçues avec la géométrie du problème.

Solution proposée par Louis François



$$e = vt \Rightarrow \begin{cases} 2PF' = ct_1 \\ 2PF = ct_2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{c} = t_1 - t_2 = \frac{2PF'}{c} - \frac{2PF}{c} = \frac{2}{c}$$

$P \in$ lieu $\Leftrightarrow PF' - PF = 1 \ (= 2A)$. P décrit donc une branche d'hyperbole de foyers F' et F, de centre $m(F, F')$, d'axe focal Ox.

L'hyperbole est réduite de modèle : $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 1$

avec $A = \dfrac{1}{2}$; $2C = 4 \Rightarrow C = 2$ et $B^2 = C^2 - A^2 = \dfrac{15}{4}$

$$\Rightarrow \mathscr{L} \equiv \frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{15/4} = 1 \Rightarrow \mathscr{L} \equiv 60x^2 - 4y^2 = 15$$

Le 19 septembre 2013

EXGAP157 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

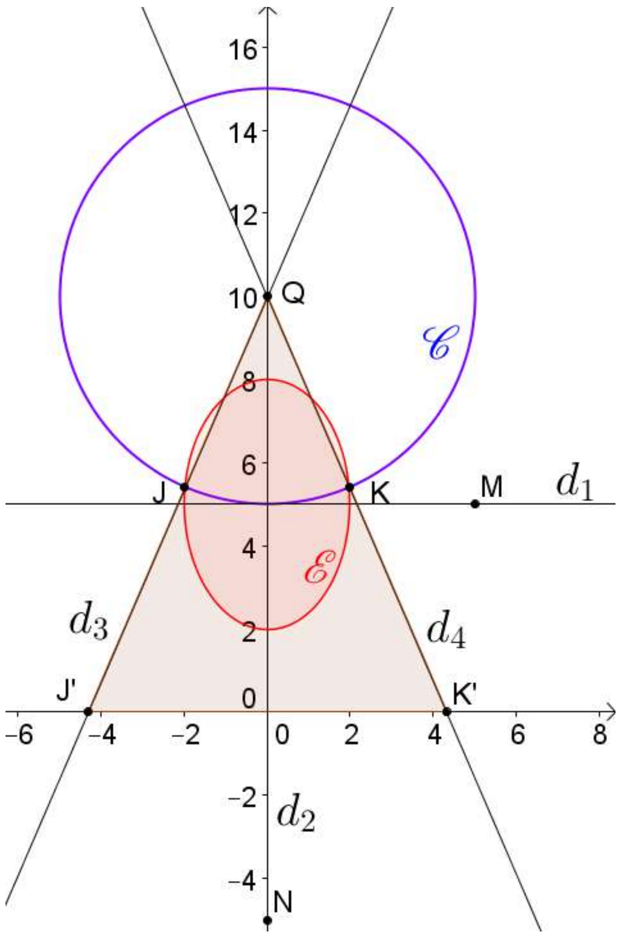
Soient dans un repère orthonormé Oxy, les points M, N et Q, dont les coordonnées connues sont respectivement $(5,5),(0,-5)$ et $(0,10)$. Soit une circonférence $\mathscr{C}$ de centre Q et dont le rayon vaut 5. On considère une ellipse $\mathscr{E}$ dont le grand axe parallèle à Oy vaut 6 et le petit axe vaut 4.

La droite d_1 portant le petit axe de l'ellipse $\mathscr{E}$ passe par M. La droite d_2 portant le grand axe de l'ellipse $\mathscr{E}$ passe par N. Les points J d'abscisse négative et K d'abscisse positive sont à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de l'ellipse $\mathscr{E}$. La droite d_3 passe par les points Q et J, la droite d_4 passe par les points Q et K. Les droites d_3 et d_4 coupent l'axe Ox respectivement en J' et K'.

On demande

1. déterminer l'équation cartésienne de la droite d_3.
2. de déterminer l'aire du triangle $J'K'Q$

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$\mathscr{C} \equiv x^2 + (y-10)^2 = 25$

$\mathscr{E} \equiv \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{9} = 1$

1. $\mathscr{C} \cap \mathscr{E}$: par substitution $\dfrac{25-(y-10)^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{9} = 36 \Rightarrow .... \Rightarrow -5y^2 + 140y - 611 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 14 - \dfrac{3\sqrt{205}}{5} \simeq 5.41 \\ y = 14 + \dfrac{3\sqrt{205}}{5} \simeq 22.59 \text{ A rejeter car hors du domaine de } y. \end{cases}$$

D'où $ord\ J = ord\ K \simeq 5.41 \Rightarrow x^2 = 25 - (5.41 - 10)^2 \Rightarrow x = \pm 1.98$

Donc : $J(-1.98, 5.41); K(1.98, 5.41)$

Ainsi : $d_3 \equiv y - 10 = \dfrac{10 - 5.41}{0 + 1.98} x \Rightarrow y = 2.32x + 10$

$\Rightarrow J' : (-4.31, 0)$ et $K' : (4.31, 0)$

2. Aire du triangle $J'K'Q = 2 \times$ aire du triangle rectangle $OJ'Q$

$$= 2 \times \frac{4.31 \times 10}{2} = 43.1$$

Le 5 novembre 2013

EXGAP158 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Dans un repère cartésien Oxy, soit un triangle ABP caractérisé par

- les points fixes A et B de coordonnées respectives $(-2,0)$ et $(2,0)$
- le pont P mobile et parcourant une parabole dont le sommet est en S de coordonnées $(0,1)$ et dont le foyer F a pour coordonnées $(0,2)$

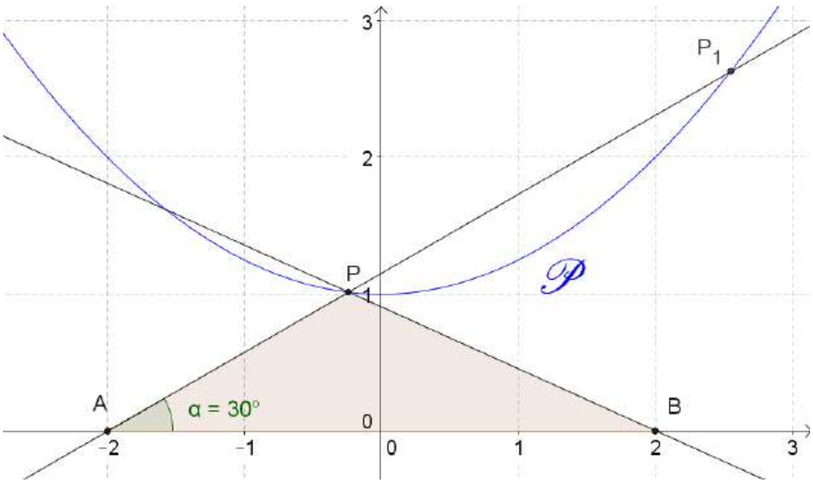
1. Rechercher les coordonnées du point P dans le cas particulier où l'angle $\widehat{BAP}$ vaut 30°
2. Dans le cas général où P est mobile sur la parabole.

   (a) rechercher, par la méthodes de la géométrie synthétique, le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABP; en établir l'équation cartésienne.

   (b) rechercher, par les méthodes de la géométrie synthétique, le lieu du pied B' de la hauteur issue de B du triangle ABP; en établir l'équation cartésienne.

   (c) rechercher, par les méthodes de la géométrie synthétique, le lieu du centre de gravité G du triangle ABP'; en établir l'équation cartésienne;

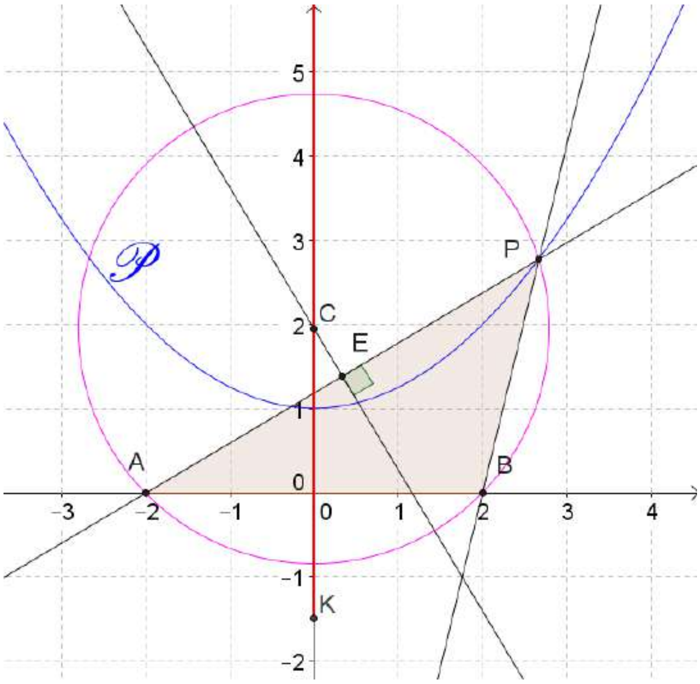
   (d) démontrer que le triangle $P'PF$ est isocèle, P' étant la projection orthogonale de P sur l'axe Ox.



1) Equation de la parabole $\mathscr{P} \equiv y = \dfrac{x^2}{4} + 1.$

Equation de $AP \equiv \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$

$$\mathscr{P} \cap AP \Rightarrow \frac{x^2}{4} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \Rightarrow 3x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 - 8\sqrt{3} = 0 \begin{cases} P:(-0.24249, 1.01470) \\ P_1:(2.55189, 2.62803) \end{cases}$$



2.(a) Le centre C du cercle circonscrit est le point de rencontre des médiatrices.
L'axe Oy est une médiatrice et il est fixe. Le lieu du centre est donc une demi-droite issue d'un point K dont nous allons déterminer les coordonnées.

Soit $P(\mu,\nu)$. Comme $P\in\mathscr{P}:\nu=\dfrac{\mu^2}{4}+1$

Soit E le milieu de $[AP]$. $E:\left(\dfrac{\mu-2}{2},\dfrac{\nu}{2}\right)$

La pente de AP est :$m_{AP}=\dfrac{\nu}{\mu+2}$

et la pente de la médiatrice de $[AP]$ est :$m_{EC}=-\dfrac{\mu+2}{\nu}$

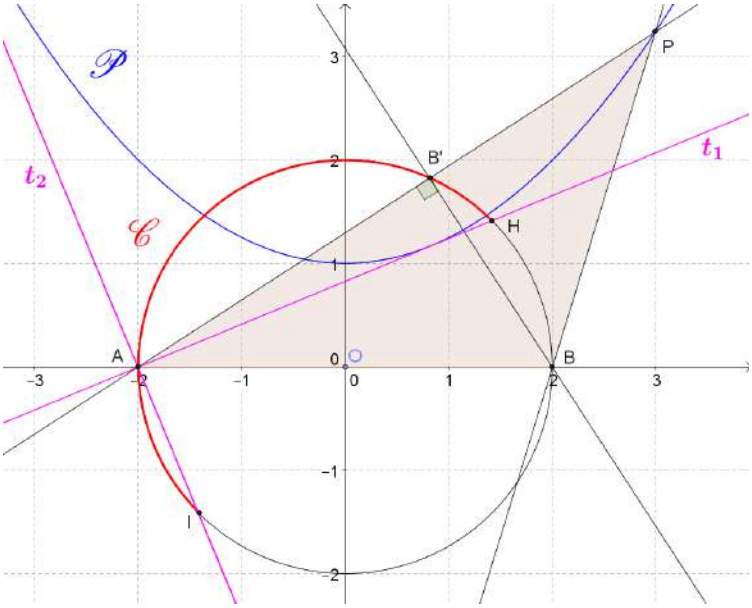
$$\Rightarrow EC\equiv y-\frac{\nu}{2}=-\frac{\mu+2}{\nu}\left(x-\frac{\mu-2}{2}\right)$$

L'ordonnée à l'origine $(x=0)$ de cette médiatrice est l'ordonnée de C.

$$\Rightarrow y_C=\frac{(\mu+2)(\mu-2)}{2\nu}+\frac{\nu}{2}=\frac{\mu^2-4+\nu^2}{2\nu}$$

L'ordonnée de K est obtenue quand $P:(0,1)\Rightarrow y_K=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow K\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$

Le lieu est la portion de l'axe des y pour laquelle $y\geq-\dfrac{3}{2}$



2.(b) L'angle $AB'B$ est un ange droit qui regarde le segment constant $[AB]$. Le lieu de B' est donc un arc de cercle centré sur l'origine O.

L'équation de ce cercle est : $\mathscr{C} \equiv x^2 + y^2 = 4$. Les extrémités H et I de ce lieu sont définies par les tangentes à $\mathscr{P}$ issues de A. Calculons les coordonnées de H et I.

L'équation d'une droite issue de A a pour équation : $y = m(x+2)$. L'intersection de cette droite avec $\mathscr{P}$ est donnée par l'équation : $\dfrac{x^2}{4} + 1 = m(x+2) \Rightarrow x^2 - 4mx + 4 - 8m = 0$

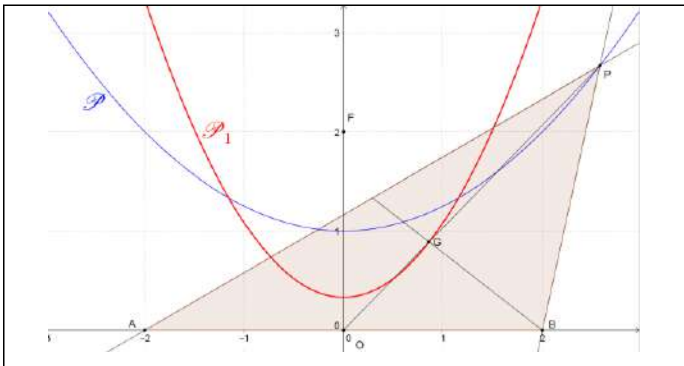
Le réalisant de cette équation doit être nul : $m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} -1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{cases}$

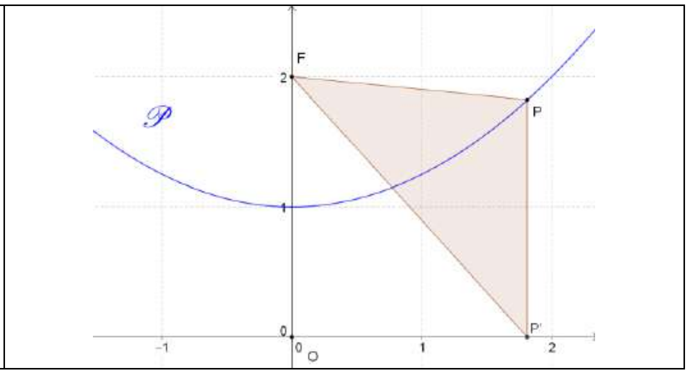
Donc $t_1 \equiv y = \left(-1+\sqrt{2}\right)(x+2)$ et $H = \mathscr{C} \cap t_1$ est donné par l'équation :

$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow \left(-1+\sqrt{2}\right)^2 (x+2)^2 = (2-x)(2+x)$. On simplifie par $2+x$ (qui correspond au point A) $\Rightarrow x = \dfrac{2-2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4-2\sqrt{2}} = \ldots = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \Rightarrow H\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

De la même façon, on trouve pour $t_2 \equiv \left(-1-\sqrt{2}\right)(x+2) : I\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Le lieu de B' est donc un demi-cercle de diamétre $[HI]$ et situé au-dessus de $[HI]$





2. (c) Le centre de gravité se trouve au 1/3 de la médiane. G est donc l'image de P selon l'homothétie de centre O et de rapport 1/3. L'image homothétique d'une parabole est une parabole.

Soit $P(\mu,\nu)$ avec $\nu = \frac{\mu^2}{4}+1$ et soit $G(x,y)$ avec $x = \frac{\mu}{3}$ et $y = \frac{\nu}{3}$.

On obtient alors l'équation de la parabole : $\mathscr{P}_1 \equiv 3y = \frac{9x^2}{4}+1 \Rightarrow \mathscr{P}_1 \equiv y = \frac{3x^2}{4}+\frac{1}{3}$.

(d) Le triangle $P'PF$ est isocèle. Cela résulte directement de la définition de la parabole qui est le lieu des points équidistants d'une droite (la directrice) et d'un point (le foyer).

Le 18 novembre 2012.

EXGAP159 – POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2013.

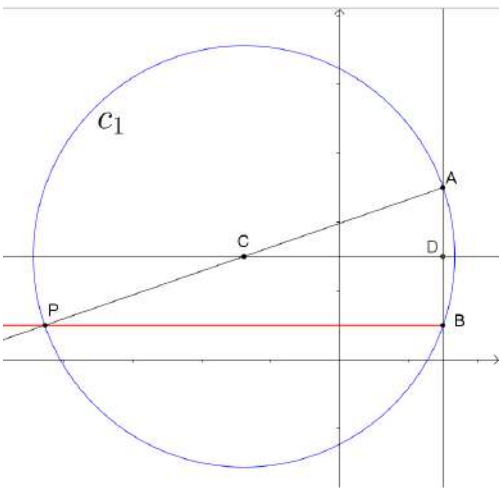
Soit un segment vertical AB dans un repère orthonormé Oxy $\left(y_A > y_B > 0, x_A = x_B > 0\right)$

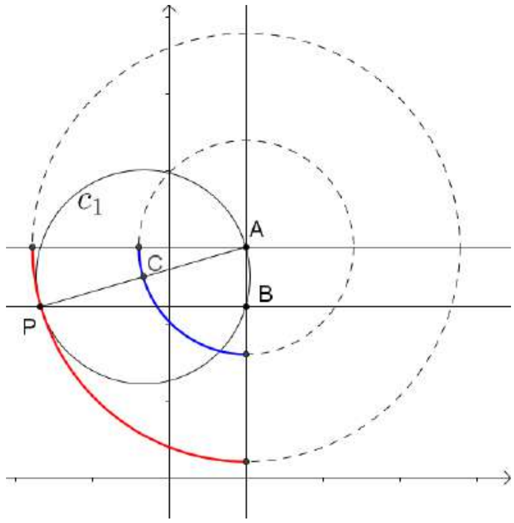
Soit la circonférence c_1 de centre C $\left(x_C \le x_A\right)$ et passant par A et B.

Soit le point J appartenant à c_1 et tel que $y_J = y_C$ et $x_J > x_C$ et le point D qui est projection de J sur AB.

1. on demande de tracer un schéma illustrant la configuration.
2. on demande de rechercher le lieu du point P, extrémité du diamètre passant par A, lorsque le diamètre de la circonférence croît, A et B restant fixes.
3. on demande de rechercher le lieu du point P, extrémité du diamètre passant par A, lorsque le diamètre reste constant, le point A reste fixe et le point B se déplace sur une droite parallèle à Oy.
4. Pour le cas particulier où $x_A = 5, y_A = 15, x_B = 5$ et $y_B = 5,$ on demande d'établir l'expression liant la distance DJ au rayon r de la circonférence. Quelle est la valeur particulière de DJ lorsque le rayon $r = 5$?

Solution proposée par Fabienne Zoetard





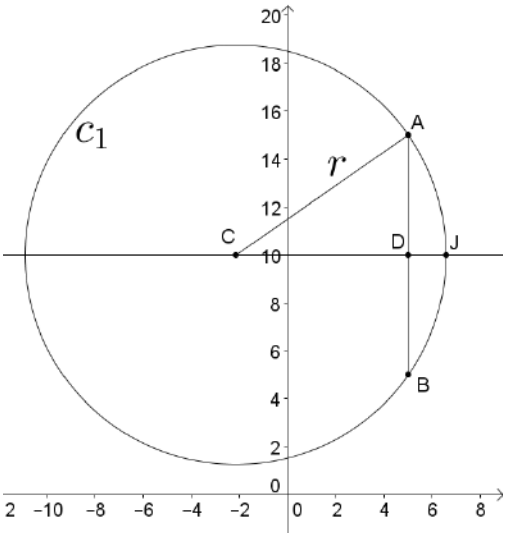
2) $\underline{A, B \text{ fixes}}$: $C \in$ à la médiatrice de $[A, B]$.

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow \quad y_P = y_C - \overline{AD} = \frac{y_A + y_B}{2} - \frac{y_A - y_B}{2} = y_B$$

Le lieu de P est la demi-droite parallèle à Ox et issue de B.

3) $\underline{A \text{ fixe, } B \text{ varie, diamètre constant}}$:

$\overline{AC} = r$. Donc $C \in$ au $\frac{1}{4}$ de cercle de centre A et de rayon r et $P \in$ au $\frac{1}{4}$ de cercle de centre A et de rayon $2r$. Ces $\frac{1}{4}$ de cercle sont situés à droite de AB et en dessous de A.



4) $\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AD}^2 = r^2 - 25 \quad \Rightarrow \overline{DJ} = r - \overline{CD} = r - \sqrt{r^2 - 25}$

Dans le cas particulier ou $r = 5,$ alors $C \equiv D$ et $\overline{DJ} = 5$

Le 17 novembre 2013