Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 16

EXGAP160 – EXGAP169

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Aout 2012

EXGAP160 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy.
Soit ε l'ellipse centrée en O passant par les points $A(2;\ 0)$ et $B(0;\ 4)$. Soit $d$une droite variable passant par le point $P(0;\ 5)$.

a) Discuter en fonction du coefficient angulaire m de la droite d le nombre de points d'intersection entre l'ellipse ε et la droite d.

b) Dans le cas où cette intersection est constituée de deux points $Q;R$, déterminer les coordonnées de ces points.

c) Soit M le milieu du segment $[QR]$. Etablir une équation cartésienne du lieu de M.

d) Identifier le type de lieu et représenter ce lieu sur un dessin en prenant pour unité 1cm (tracer la courbe à main levée à partir de quelques points particuliers).

Solution proposée par Dominique Druez

$$\varepsilon \equiv \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \ et\ d \equiv y=mx+5$$

Intersection de d et de ε: $\frac{x^2}{4}+\frac{(mx+5)^2}{16}=1$

$$(4+m^2)x^2+10mx+9=0$$

$$\rho=100m^2-4(4+m^2)9=64m^2-144=16(2m-3)(2m+3)$$

a)

		-3/2		3/2	
2m-3	-	-	-	0	+
2m+3	-	0	+	+	+
ρ	+	0	-	0	+

- m=-3/2, m=3/2, d est tangent à ε, une intersection
- -3/2<m<3/2, pas d'intersection
- m<-3/2 ou m>3/2, deux points d'intersection

b)

$$x_R=\frac{-10m+4\sqrt{(2m-3)(2m+3)}}{2(4+m^2)}=\frac{-5m+2\sqrt{(2m-3)(2m+3)}}{(4+m^2)}$$

$$y_R=mx_R+5=\frac{-5m^2+2m\sqrt{(2m-3)(2m+3)}}{(4+m^2)}+5=\frac{20+2m\sqrt{(2m-3)(2m+3)}}{(4+m^2)}$$

$$x_Q=\frac{-5m-2\sqrt{(2m-3)(2m+3)}}{(4+m^2)},\ y_Q=\frac{20-2m\sqrt{(2m-3)(2m+3)}}{(4+m^2)}$$

c)

$$x_M = \frac{x_R + x_Q}{2} = \frac{-10m}{2(4+m^2)} = \frac{-5m}{(4+m^2)} \ (1)$$

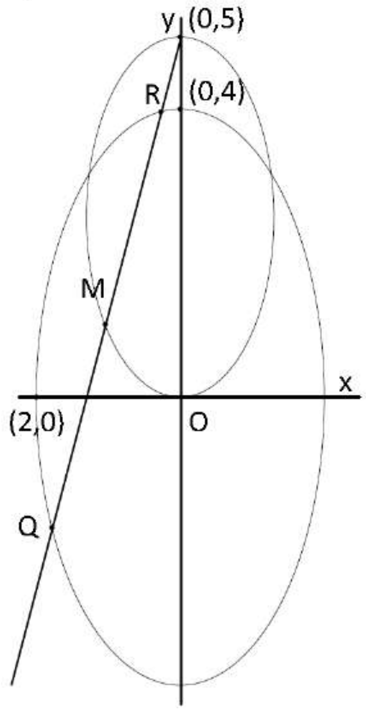
$$y_M = \frac{y_R + y_Q}{2} = \frac{40}{2(4+m^2)} = \frac{20}{(4+m^2)} \rightarrow m^2 = \frac{20-4y_M}{y_M}$$

Remplaçons m dans (1)

$$x_M = \frac{-5\sqrt{\dfrac{20-4y_M}{y_M}}}{\left(4+\dfrac{20-4y_M}{y_M}\right)} = \frac{-5y_M\sqrt{20-4y_M}}{\sqrt{y_M}(4y_M+20-4y_M)} = \frac{-\sqrt{y_M(20-4y_M)}}{4}$$

$$x^2 = \frac{-4y^2+20y}{16} = \frac{-y^2+5y}{4} \rightarrow 4x^2 + y^2 - 5y = 0$$

$$4x^2 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} \rightarrow \frac{x^2}{(5/4)^2} + \frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{(5/2)^2} = 1$$



Portion d'ellipse de centre (0, 5/2) ,
petit axe horizontal 5/2 et
grand axe vertical 5
situé sous l'ellipse ε.

7 février 2014

EXGAP161 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy. Soit C le cercle de rayon 2 centré en $C(2;1)$. On considère un point variable P du cercle C.

a) Exprimer lescoordonnées dupoint P en fonction de l′angle θ entre levecteur $\overline{CP}$ l′axe orienté Ox.

b) Calculer, toujours en fonction de θ les coordonnées du point Q obtenu par projection orthogonale du point P sur l'axe Oy.

c) En déduire les coordonnées du barycentre R du triangle OPQ.

d) Donner une équation cartésienne du lieu parcouru par R lorsque P parcourt le cercle C.

e) Identifier le type de lieu et représenter ce lieu sur un dessin en prenant pour unité 15mm (tracer la courbe à main levée à partir de quelques points particuliers).

Solution proposée par Dominique Druez

$P = (2 - 2\cos\theta\,, 1 + 2\sin\theta)$

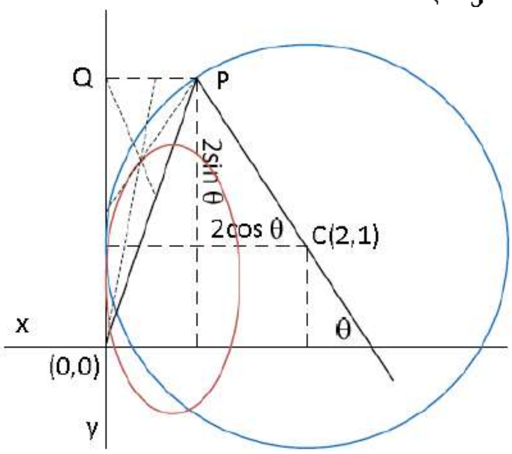
$Q = (0, 1 + 2\sin\theta)$

$$R = \left(\frac{2 - 2\cos\theta + 0 + 0}{3}, \frac{1 + 2\sin\theta + 1 + 2\sin\theta + 0}{3}\right) = \left(\frac{2 - 2\cos\theta}{3}, \frac{2 + 4\sin\theta}{3}\right)$$

Le lieu de R est une ellipse de centre (2/3, 2/3), de petit axe horizontal 4/3 et de grand axe 8/3.

$$x = \frac{2 - 2\cos\theta}{3} \to \cos\theta = \frac{-3x + 2}{2} \quad y = \frac{2 + 4\sin\theta}{3} \to \sin\theta = \frac{3y - 2}{4}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \to \left(\frac{-3x + 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y - 2}{4}\right)^2 = 1 \to \left(\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right)^2 = 1$$



---

7 février 2014

EXGAP162 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2014, série 1.

Dans le plan rapporté au repère OXY, on regarde la parabole P d'équation $y = 2x^2 + 3x + 1$.
Pour chaque point p de la parabole on considère le droite tangente à cette parabole.

(1) Quelle est l'équation cartésienne de la droite D_p tangente à la parabole, au point p de coordonnées (x_0, y_0)?

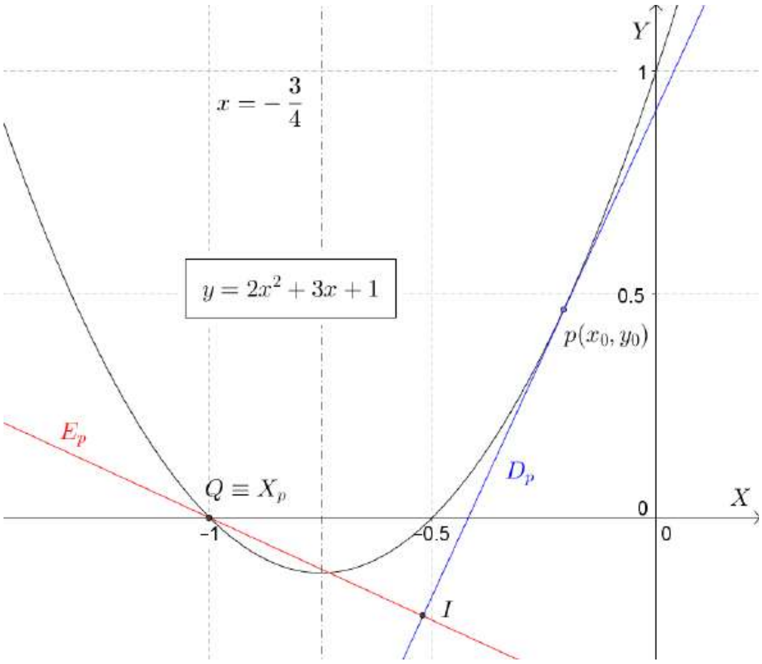
(2) Quelle est l'équation cartésienne de la droite E_p issue du point Q de coordonnées $(-1,0)$ et perpendiculaire à D_p ?

(3) Quelles sont les coordonnées du point $D_p \cap E_p$?

(4) La droite passant par Q et p coupe la parabole en un deuxième point X_p.
Quelles sont les coordonnées de X_p ?

(5) Quelle est la longueur du segment QX_p ?

Solution proposée par Michel Goffin



$(1)\, P$ est une parabole d'axe de symétrie : $x=-\dfrac{3}{4}$, de racines $(-1,0)$ et $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ passant par

$(0,1)$ et $\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$. La racine $(-1,0)$ est le point Q de l'énoncé.

$P \equiv y=2x^2+3x+1 \Rightarrow y'=4x+3$

p est un point quelconque : $p=(x_0,y_0)$ avec $y_0=2x_0^2+3x_0+1$ et $y'=4x_0+3$

$\Rightarrow D_p \equiv y-y_0=(4x_0+3)(x-x_0)$ ou bien $\boxed{D_p \equiv y=(4x_0+3)x-2x_0^2+1}$

(2) $\boxed{E_p \equiv y=-\dfrac{1}{4x_0+3}(x+1)}$

(3) On résout le système : $\begin{cases} D_p \equiv y=(4x_0+3)x-2x_0^2+1 \\ E_p \equiv y=-\dfrac{1}{4x_0+3}(x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{I=\left(\dfrac{4x_0^3+3x_0^2-2x_0-2}{8x_0^2+12x_0+5};\dfrac{-x_0^2-2x_0-1}{8x_0^2+12x_0+5}\right)}$

(4) Puisque $Q\in P : X_p=Q$

(5) $\overline{QX_p}=0$

Le 10 octobre 2014. Modifié le 14 février 2016 (Emilie Jacqmin)

EXGAP163 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2014, série 2.

Dans le plan rapporté au repère OXY, on regarde le lieu des points dont la distance à l'axe des x vaut α fois la distance au point A de coordonnées $(1,1)$(pour une réel positif α).

(1) Quelle est l'équation catésienne de ce lieu?

(2) Si $\alpha = 1/2$, s'agit-il d'une conique? Si oui, de quel type (ellipse, parabole, ou hyperbole)?

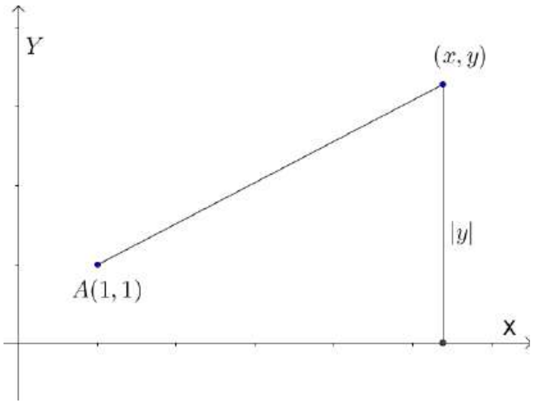
(3) Si $\alpha = 1$, s'agit-il d'une conique? Si oui, de quel type?

(4) Si $\alpha = 2$, s'agit-il d'une conique? Si oui, de quel type?

(5) Quels sont les points d'intersection de ce lieu avec la droite verticale d'abscisse 2, pour le cas $\alpha = 1/2$?

Justifiez vos réponses. Encadrez la réponse finale de chaque sous-question.

Solution proposée par Michel Goffin



(1) $\mathscr{L} \equiv |y| = \alpha\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{y^2}{\alpha^2}$

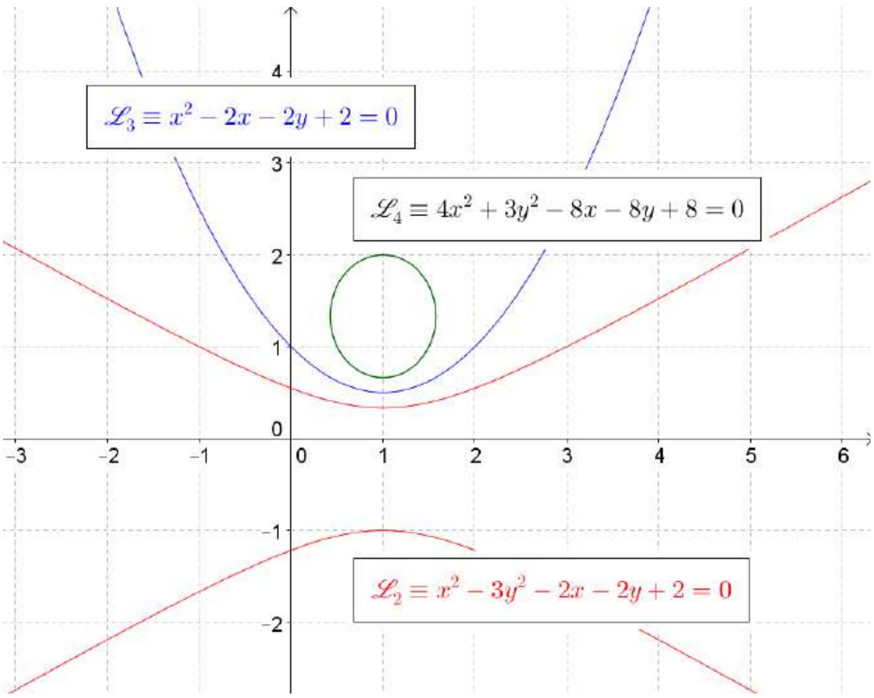
$$\Rightarrow \boxed{\mathscr{L} \equiv x^2 + y^2\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\right) - 2x - 2y + 2 = 0}$$

(2) $\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\mathscr{L}_2 \equiv x^2 - 3y^2 - 2x - 2y + 2 = 0}$. C'est une hyperbole.

(3) $\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\mathscr{L}_3 \equiv x^2 - 2x - 2y + 2 = 0}$. C'est une parabole

(4) $\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{\mathscr{L}_4 \equiv x^2 + 3y^2 - 8x - 8y + 8 = 0}$. C'est une ellipse

(5) $\begin{cases} \mathscr{L}_2 \equiv x^2 - 3y^2 - 2x - 2y + 2 = 0 \\ D \equiv x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -3y^2 - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(2, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}\right)}$



Le 12 octobre 2014

EXGAP164 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2014.

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé OXY le lieu des milieux des segments de droite joignant A_k à B_k. Ici A_k est le point de coordonnées (k,k) et B_k est le point de coordonnées $(1/k,-1/k)$, pour k réel non nul.

(1) Quel est l'équation cartésienne de ce lieu?

(2) Représentez ce lieu par un dessin clair.

(3) De quel type de courbe s'agit-il? (Autrement dit, s'agit-il d'un cercle, ou une une droite, ou une ellipse, etc.?

(4) En quel(s) point(s) cette courbe possède-t-elle une tangente verticale?

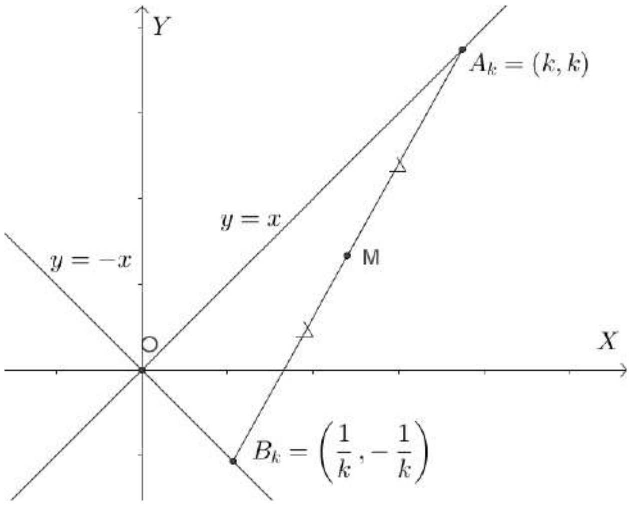
(5) Quelle est l'intersection de ce lieu avec la droite d'équation $x = y$?

(6) Quelle est l'intersection de ce lieu avec le cercle centré en l'origine, de rayon r, pour $r = 3$?

Pour quelles valeurs de r l'intersection est-elle vide?

Justifiez vos réponses. Encadrez la réponse finale de chaque sous-question.

Solution proposée par Michel Goffin



(1) $\mathscr{L}$ lieu du milieu $M : \left(\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right), \frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)\right)$

$$\Rightarrow \mathscr{L} \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=k \\ x-y=\frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow (x+y)(x-y)=1 \Rightarrow \boxed{\mathscr{L} \equiv x^2-y^2=1}$$

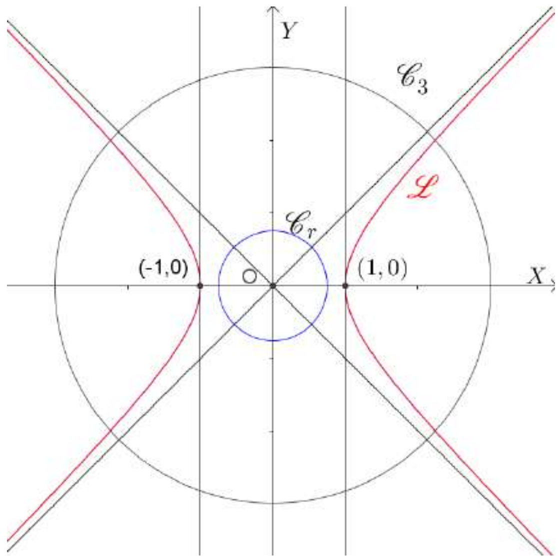
(3) Hyperbole équilatère reduite de sommets $(-1,0)$ et $(1,0)$, et d'asymptotes $y=\pm x$

(4) Tangentes verticales aux sommets $(\pm 1, 0)$

(5) $y=x$, asymptote, ne rencontre pas l'hyperbole (sauf à l'infini)

(6) a) $\begin{cases} \mathscr{C}_3 \equiv x^2+y^2=9 \\ \mathscr{L} \equiv x^2-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=5 \\ y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{5}, \pm 2) \\ (-\sqrt{5}, \pm 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathscr{C}_3 \equiv x^2+y^2=r^2 \\ \mathscr{L} \equiv x^2-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow 2y^2=r^2-1$ équation impossible si $r^2<1 \Rightarrow \boxed{0<r<1}$



Le 12 octobre 2014

EXGAP165 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Dans un repère orthonormé du plan on considère la parabole P d'équation cartésienne $y = ax^2$ (où a est un réel non nul donné). On donne aussi le point $P_0(x_0, y_0)$, différent de l'origine des axes. On note alors P_0 la parabole obtenue en translatant P de telle sorte que le sommet de P_0 coïncide avec le point P_0.

(a) Déterminer l'équation cartésienne de P_0.

(b) On considère les droites d passant par l'origine $(0,0)$. On demande de trouver le lieu des milieux des segments dont les extrémités sont les intersections de d et de P_0.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

(a) Le sommet de la parabole $\mathcal{P}$ est situé à l'origine du repère $(0, 0)$. Un point (x, y) appartient donc à $\mathcal{P}_0$ si et seulement si il existe un point (x', y') appartenant à $\mathcal{P}$ tel que

$$x = x' + x_0$$
$$y = y' + y_0,$$

c'est-à-dire si et seulement si le système d'équations

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ y' = ax'^2 \end{cases}$$

admet une solution. En éliminant x' et y' de ce système, on obtient l'équation cartésienne

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

(b) Il n'est pas nécessaire de considérer les droites d parallèles à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire, d'équation $x = b$ où b est une constante réelle), car celles-ci ne rencontrent $\mathcal{P}_0$ qu'en un seul point. Il est donc suffisant de considérer les droites d d'équation

$$y = mx,$$

où m est un paramètre réel. Les intersections (x, y) de d et de $\mathcal{P}_0$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a(x - x_0)^2 + y_0. \end{cases}$$

Pour une valeur donnée de m, ces intersections possèdent donc une abscisse x qui satisfait l'équation

$$a(x-x_0)^2+y_0=mx,$$

qui peut se réécrire

$$ax^2-(2ax_0+m)x+(ax_0^2+y_0)=0. \qquad (1)$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut

$$\Delta=m^2+4ax_0m-4ay_0.$$

L'équation (1) admet deux solutions (ce qui signifie que la droite d rencontre $\mathcal{P}_0$ en deux points distincts) lorsque ce discriminant est strictement positif. Selon les valeurs de a, x_0 et y_0, c'est le cas soit pour toutes les valeurs de m, soit pour les valeurs de m situées à l'extérieur d'un intervalle $[m_1, m_2]$ dont les bornes m_1 et m_2 dépendent de a, x_0 et y_0. (Ces bornes correspondent aux coefficients angulaires des droites issues de l'origine qui sont tangentes à la parabole $\mathcal{P}_0$.)
Si m est tel que $\Delta>0$, alors l'équation (1) admet deux solutions dont la somme vaut

$$\frac{2ax_0+m}{a}=2x_0+\frac{m}{a}.$$

Le milieu du segment reliant les intersections de d avec P_0 possède donc l'abscisse

$$x=x_0+\frac{m}{2a}.$$

De plus, étant donné que ce point appartient à d, son ordonnée satisfait $y=mx$, et vaut donc

$$y=mx_0+\frac{m^2}{2a}.$$

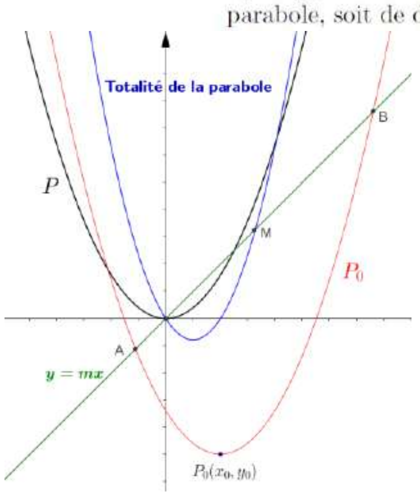
En éliminant le paramètre m du système

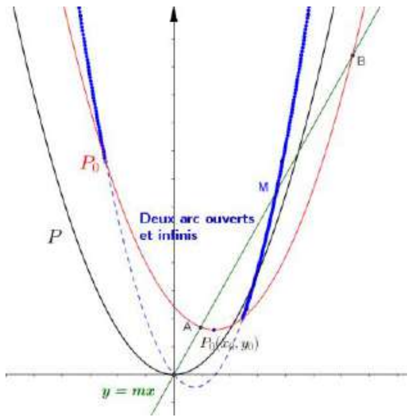
$$\begin{cases} x=x_0+\frac{m}{2a} \\ y=mx_0+\frac{m^2}{2a}, \end{cases}$$

on obtient

$$y=2ax^2+2(a-1)x_0x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)x_0^2,$$

qui est l'équation d'une parabole. En fonction des valeurs de a, x_0 et y_0, le lieu recherché est formé soit de la totalité de cette parabole, soit de deux arcs ouverts et infinis de celle-ci.



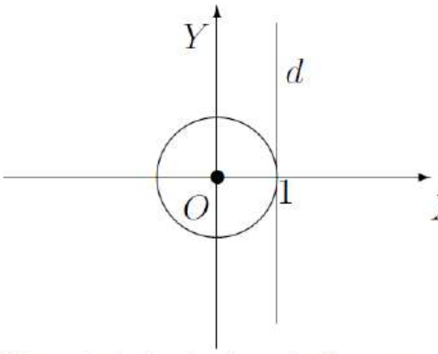


EXGAP166 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

On donne une droite d tangente à un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est égale à la distance à d. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de la représenter graphiquement.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

On choisit un repère orthonormé de telle sorte que l'origine O soit le centre du cercle, l'unité égale au rayon du cercle et l'axe des ordonnées parallèle à la droite donnée d. L'orientation est précisée par le schéma suivant.



Dans ces conditions, la droite d et le cercle $\mathcal{C}$ ont respectivement pour équation cartésienne

$$x = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Soit alors un point P de coordonnées cartésiennes (x, y). La distance $dist(P, d)$ de P à d est égale à

$$|x - 1|$$

et la distance $dist(P, \mathcal{C})$ de P au cercle est égale à

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right|$$

car les tangentes au cercle aux points d'intersection du cercle et de la droite d_0 joignant P à O (lorsque $P \neq O$) sont orthogonales à d_0. Cela étant, la recherche du lieu consiste donc à décrire l'ensemble des points P dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'égalité

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right| = |x - 1|.$$

Lorsque l'abscisse de P est supérieure ou égale à 1, on a

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right| = |x - 1| &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ et } x \geq 0.\end{aligned}$$

La partie correspondante du lieu est donc formée des points de l'axe X dont l'abscisse est supérieure ou égale à 1.

Lorsque l'abscisse de P est strictement inférieure à 1, alors on a (en fonction du fait que P est intérieur ou extérieur au cercle)

$$dist(P, \mathcal{C}) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - 1 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- Dans le premier cas, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| = |x-1| &\Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2+y^2}-1 = 1-x\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x\\ &\Leftrightarrow y=0 \text{ et } x \geq 0.\end{aligned}$$

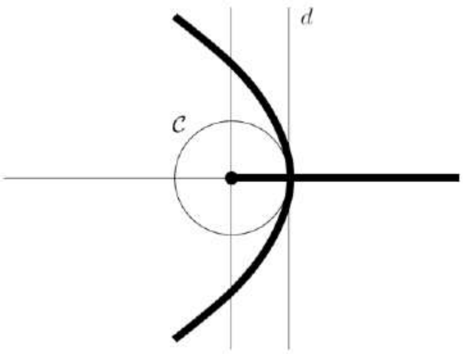
La partie correspondante du lieu est donc formée des points de l'axe X dont l'abscisse est positive (ou nulle) et strictement inférieure à 1.

- Dans le second cas, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| = |x-1| &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}-1 = 1-x\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2-x\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2 = (2-x)^2 \text{ et } x \leq 2\\ &\Leftrightarrow y^2 = 4(1-x).\end{aligned}$$

La partie correspondante du lieu est donc la parabole d'axe X, de sommet $(1,0)$ et passant par les points $(0,2)$ et $(0,-2)$.

En conclusion, le lieu correspond donc à l'union de la parabole d'équation $y^2 = 4(1-x)$ et de la demi-droite contenant les points de l'axe X d'abscisse positive ou nulle.



Remarque: On aurait pu résoudre ce problème en revenant directement à la description géométrique d'une parabole: considérer le centre du cercle et la directrice d_1, parallèle à la droite d donnée et située à l'extérieur du cercle et à une distance 1 de d. Mis à part la demi-droite correspondant à la partie de l'axe X de la résolution précédente, le lieu est donc l'ensemble des points à égale distance de 0 et d_1.

Le 7 septembre 2016.

EXGAP167 – EPL, UCL, LLN , juillet série 1.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles séparées.

(1) Quelle est l'équation cartésienne du lieu des points équidistants des points $(0,0)$ et $(2,4)$?

$\boxed{\text{Lieu}_1 \equiv \qquad\qquad}$

(2) Quelle est l'équation cartésienne du lieu des points à distance 3 du point $(2,0)$.

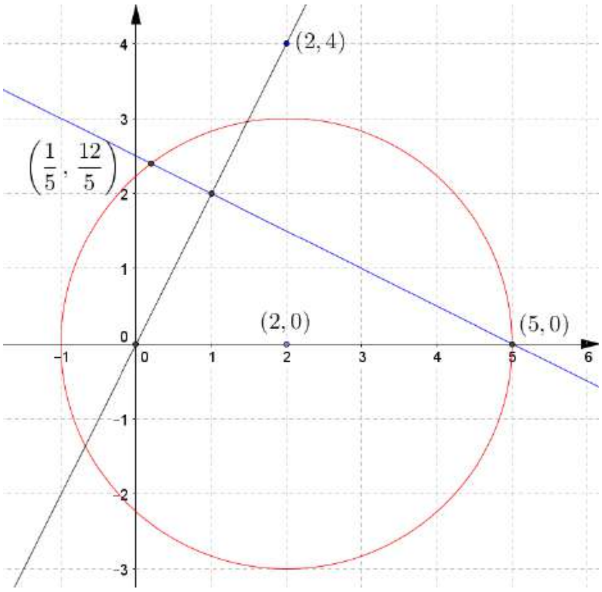
$\boxed{\text{Lieu}_2 \equiv \qquad\qquad}$

(3) Quelle est l'intersection de ces deux lieux?

$\boxed{\text{Lieu}_1 \cap \text{lieu}_2 \equiv \qquad\qquad}$

(4) Représentez la situation par un dessin

Solution proposée par Nicole Berckmans



(1) $\text{Lieu}_1 \equiv x+2y=5$

C'est la médiatrice du segment

(2) $\text{Lieu}_2 \equiv (x-2)^2+y^2=9$

C'est un cercle

(3) $\text{Lieu}_1 \cap \text{Lieu}_2 \equiv (5,0)$ et $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{12}{5}\right)$

Le 26 septembre 2015.

EXGAP168 – EPL, UCL, LLN , juillet série 2.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrie votre réponse dans les cadres prévus à cet éffet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

Soit un cercle C de rayon 1 et centré en l'origine O. La distance d'un point quelconque P de coordonnées (x, y) à C est définie comme la distance de P au point qui est à l'intersection du cercle avec la demi droite OP (partant de O et passant par P).

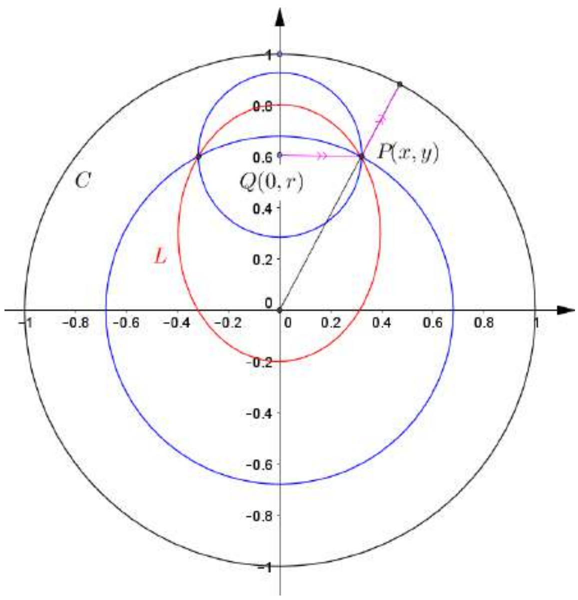
(1) Ecrivez ici la distance de P au cercle C (c'est donc une fonction de x et y)

Distance $(P,C) =$

(2) On considère le lieu des points équidistants du cercle C et du point Q de coordonnées $(0,r)$, pour $0 \le r \le 1$ quelconque. C'est une ellipse. Caractérisez-la :

Longueur de l'axe vertical :
Longueur de l'axe horizontale :
Coordonnées du centre :
Equation cartésienne :

Solution proposée par Nicole Berckmans



1ère méthode

Nous n'envisageons que le cas où le point P est à l'intérieur du cercle.

1. $d\left(P,C\right)=\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|$

2. $d\left(P,Q\right)=d\left(P,C\right)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\left(y-r\right)^2}=\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|$

On élève au carré : $\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2yr+r^2=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2\sqrt{x^2+y^2}+1$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=2yr-r^2+1$

On élève denouveau au carré : $4x^2+4y^2=4y^2r^2+4yr\left(1-r^2\right)+\left(1-r^2\right)^2$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2\left(1-r^2\right)-4yr\left(1-r^2\right)=\left(1-r^2\right)^2$

$4x^2+4\left(1-r^2\right)\left(y^2-yr\right)=\left(1-r^2\right)^2$

$4x^2+4\left(1-r^2\right)\left(y^2-yr+\frac{r^2}{4}\right)=\left(1-r^2\right)^2+r^2\left(1-r^2\right)$

$4x^2+4\left(1-r^2\right)\left(y-\frac{r}{2}\right)^2=\left(1-r^2\right)\left(1-\cancel{r^2}+\cancel{r^2}\right)$

$\frac{x^2}{\frac{1-r^2}{4}}+\frac{\left(y-\frac{r}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$ ou $\boxed{L\equiv\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{2}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{r}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1}$

Ce qui est bien l'équation d'une ellipse. Il faut bien sûr que $0\le r\le 1$

On a alors, longueur de l'axe vertical : 1

longueur de l'axe horizontal : $\sqrt{1-r^2}$

coordonnées du centre : $\left(0,\frac{r}{2}\right)$

2ème méthode

Si P est à l'intérieur du cercle. De l'énoncé on peut déduire que $PO+PQ=1$

Le lieu est donc une ellipse de foyer O et Q. La longueur de l'axe focal est : $2a=1$.

La distance entre les 2 foyers est : $2c=r$.

La longueur de l'axe non focal est

$$2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{1-r^2}$$

Remarques

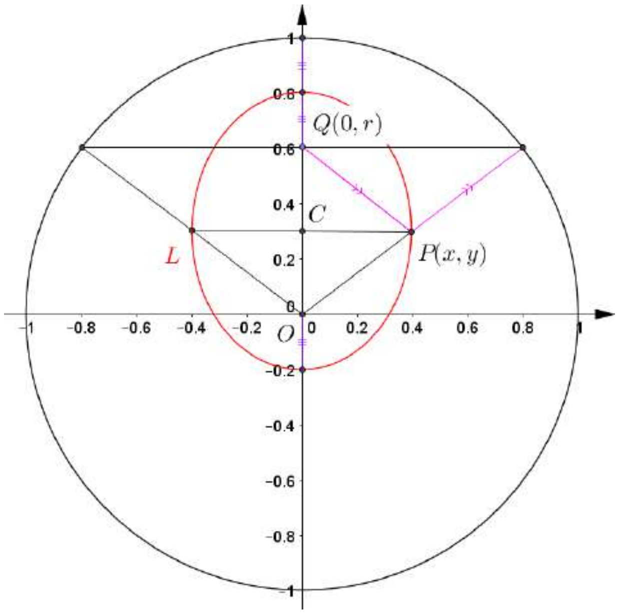
1) l'ellipse est à l'intérieur du cercle.

2) si $r=0,$ le lieu est un cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$

3) si $r=1$ le lieu est le $\frac{1}{2}$ axe OY d'ordonnée positive.

Si P est à l'extérieur du cercle, alors $PQ=PO-1 \Rightarrow PO-PQ=1$

Le lieu est une branche d'hyperbole de foyer O et Q. Dans ce cas $r>1,$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

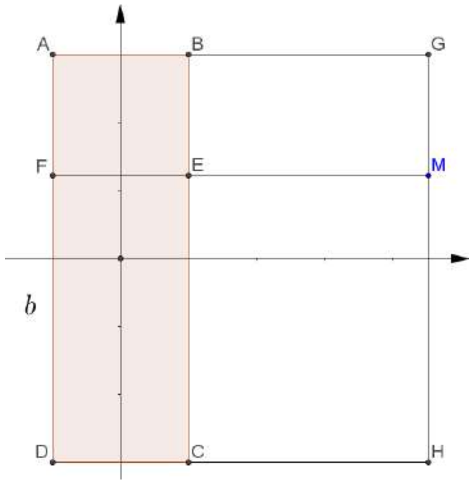


Le 26 septembre 2015.

EXGAP169 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2015.

Soit le rectangle $ABCD$ dont les coordonnées des sommets sont respectivement $A(-1,b)$, $B(1,b)$, $C(1,-b)$ et $D(-1,-b)$. Soit un plan M de coordonnées (x,y). b est un réel positif différent de 1. On demande :

1. Faire un dessin
2. Quel est le lieu des points $M(x,y)$ tels que la somme des carrés des distances aux côtés du rectangle est égale au carré du demi-périmètre du rectangle?
3. Dessinez, par des constructions successives exploitant les propriétés du triangle rectangle et à l'aide uniquement d'un compas et d'une règle, le lieu géométrique des points M en fonction du paramètre b.



La somme des carrés des distances du point M aux 4 côtés du rectangle est :

$$MG^2+MH^2+FM^2+EM^2 \qquad (1)$$

Le carré du demi périmètre est : $\left(\frac{1}{2}p\right)^2=(2+2b)^2 \qquad (2)$

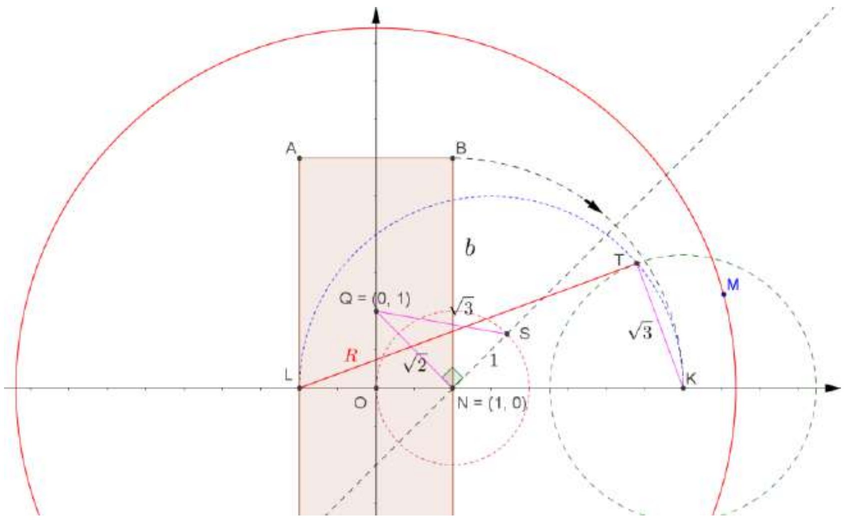
$(1)=(2)\Rightarrow MG^2+MH^2+FM^2+EM^2=(2+2b)^2$

$\Rightarrow (b-y)^2+(b+y)^2+(x+1)^2+(x-1)^2=(2+2b)^2$

On développe et on simplifie. Ce qui donne le lieu de M :

$$y^2+x^2=b^2+4b+1$$

C'est une cercle centré en O et de rayon : $r=\sqrt{b^2+4b+1}$



On a donc $R=\sqrt{b^2+4b+1} \Rightarrow R^2=b^2+4b+1 \Rightarrow R^2+3=b^2+4b+4$

Ce qui donne : $R^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(b+2\right)^2$. Autrement dit R est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hyténuse est $b+2$.

Exemple de construction :

1) • Soit les points $N\left(1,0\right)$ et $Q\left(0,1\right)$. Il est immédiat que $\overline{NQ}=\sqrt{2}$

• Soit S le point situé à une distance de 1 sur la perpendiculaire à QN en N : $\overline{QS}=\sqrt{3}$

2)• Reportons b sur l'axe Oy via un arc de cercle de centre N. Ce qui détermine le point K

On a : $\overline{LK}=b+2$

• On construit un demi-cercle de diamètre LK et on reporte à partir de K la distance $\overline{QS}$

Alors : $\overline{LT}=R$

Il ne reste plus qu'à tracer un cercle de centre O et de rayon $R=\overline{LT}$