Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 17

EXGAP170 – EXGAP179

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Septembre 2015

EXGAP170 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014.

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy. Soit $\mathscr{A}$ le lieu des points équidistants de l'axe Ox et du point $P(0,1)$ et $\mathscr{B}$ le lieu des points équidistants de l'axe Oy et du point $Q(2,0)$.

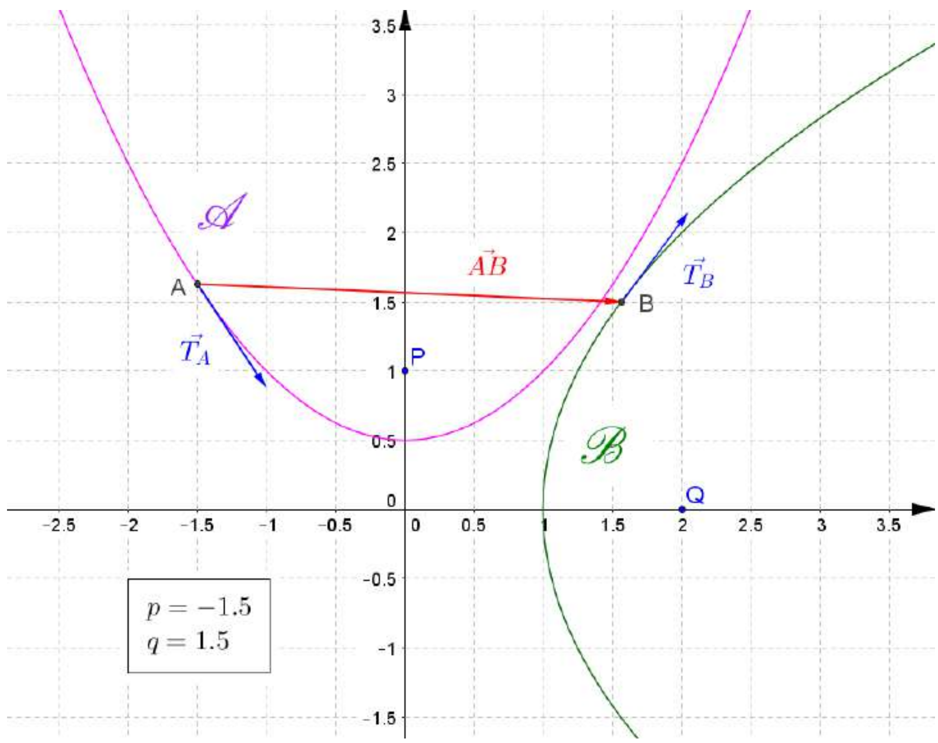
a. Donnez le lieu de $\mathscr{A}$ et identifiez le type de lieu. Même question pour $\mathscr{B}$.

b. Soit A un point variable de $\mathscr{A}$ d'abscisse p et B un point variable de $\mathscr{B}$ d'ordonnée q. Déterminez les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de p et q.

c. Donnez les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{T_A}$ tangent à $\mathscr{A}$ en A et d'un vecteur $\overrightarrow{T_B}$ tangent en $\mathscr{B}$ en B, en fonction de p et q.

d. En déduire les différents couples de valeurs (p,q) pour lesquels la droite AB est simultanément tangente à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

Solution proposée par Dominique Druez



a) $\mathscr{A} \equiv d\left(A,Ox\right)=d\left(A,P\right)\Rightarrow y=\sqrt{x^2+\left(1-y\right)^2}\Rightarrow \boxed{\mathscr{A} \equiv x^2=2y-1}$

C'est une hyperbole de foyer P et d'axe vertical.

$\mathscr{B} \equiv d\left(B,Oy\right)=d\left(B,Q\right)\Rightarrow x=\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}\Rightarrow \boxed{\mathscr{B} \equiv y^2=4x-4}$

C'est une hyperbole de foyer Q et d'axe horizontal.

b) $A\in\mathscr{A} \Rightarrow A\left(p,\dfrac{p^2+1}{2}\right)$; $B\in\mathscr{B} \Rightarrow B\left(\dfrac{q^2+4}{4},q\right)$

Et donc $\boxed{\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{q^2+4}{4}-p,q-\dfrac{p^2+1}{2}\right)}$

c) $\overrightarrow{T_A}$: On a $y=\dfrac{x^2+1}{2}$. On dérive par rapport à x : $\dfrac{dy}{dx}=x\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{T_A}=\left(1,p\right)}$

$\overrightarrow{T_B}$: On a $x=\dfrac{y^2+4}{4}$. On dérive par rapport à y : $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y}{2}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{T_B}=\left(\dfrac{q}{2},1\right)=\left(q,2\right)}$

d) Les trois vecteurs seront alignés si :

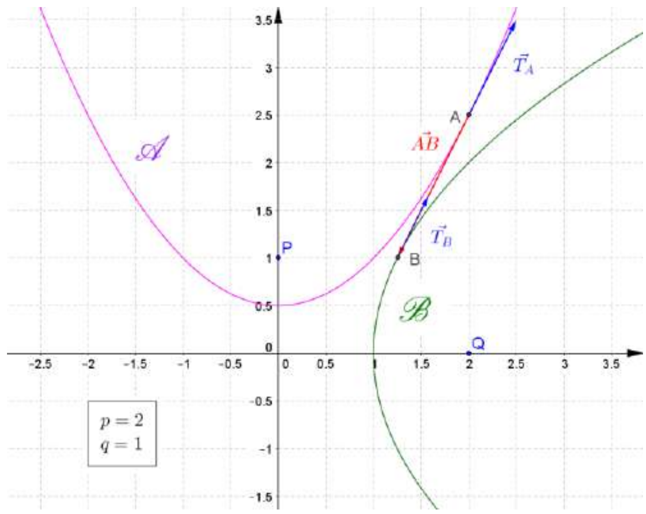
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{T_A}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q^2+4}{4}-p=k & (1) \\ q-\dfrac{p^2+1}{2}=kp & (2) \end{cases} \\ \overrightarrow{AB}=h\overrightarrow{T_B}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q^2+4}{4}-p=hq & (3) \\ q-\dfrac{p^2+1}{2}=2h & (4) \end{cases} \end{cases}$$

On tire $\begin{cases} (1) \text{ et } (3)\Rightarrow k=hq \\ (2) \text{ et } (4)\Rightarrow kp=2h \end{cases}$ et donc $q=\dfrac{2}{p}$ que l'on remplace dans (1) et (2)

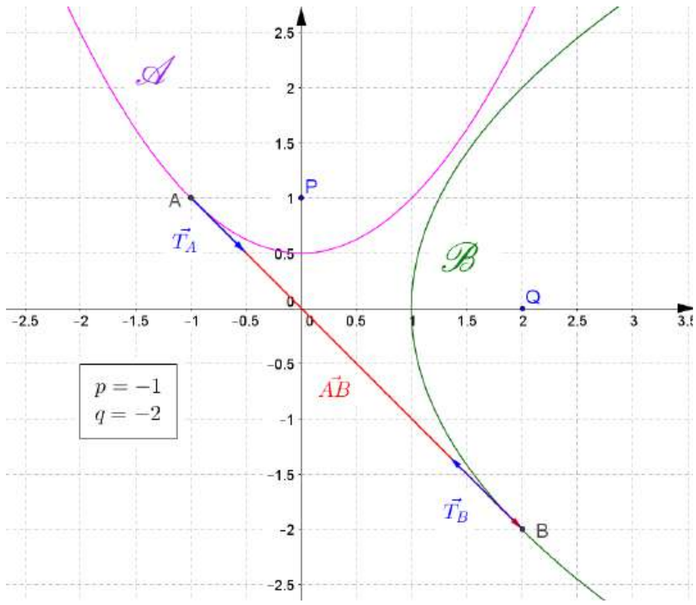
$$\begin{cases} \dfrac{1}{p^2}+1-p=k & (5) \\ \dfrac{2}{p}-\dfrac{p^2+1}{2}=kp & (6) \end{cases} \Rightarrow \text{On remplace } k \text{ dans } (6) : \dfrac{2}{p}-\dfrac{p^2+1}{2}=\left(\dfrac{1}{p^2}+1-p\right)p$$

On développe et on réduit pour obtenir : $p^2-2p-p+2=0$ qui se factorise facilement en : $\left(p-2\right)\left(p+1\right)\left(p-1\right)=0$

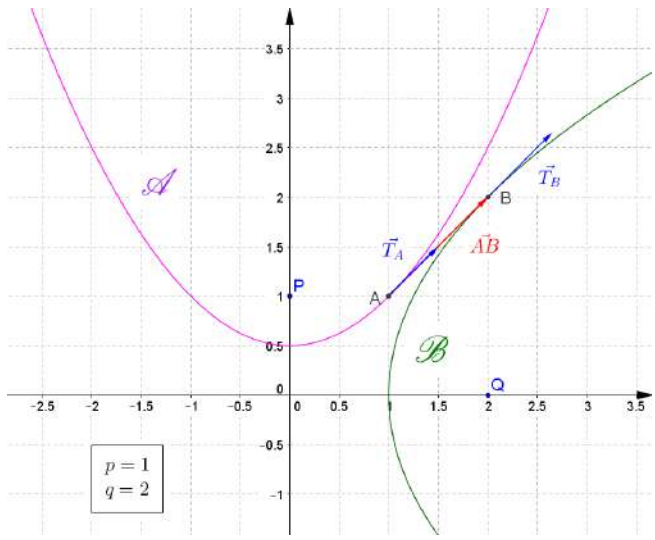
Il y a donc 3 couples : $\boxed{\left(2,1\right);\left(-1,-2\right);\left(1,2\right)}$



$\mathscr{A}$
$\mathscr{B}$
A
B
P
Q
$\vec{T}_A$
$\vec{T}_B$
$\vec{AB}$
$p = 2$
$q = 1$



$\mathscr{A}$
$\mathscr{B}$
A
B
P
Q
$\vec{T}_A$
$\vec{T}_B$
$\vec{AB}$
$p = -1$
$q = -2$

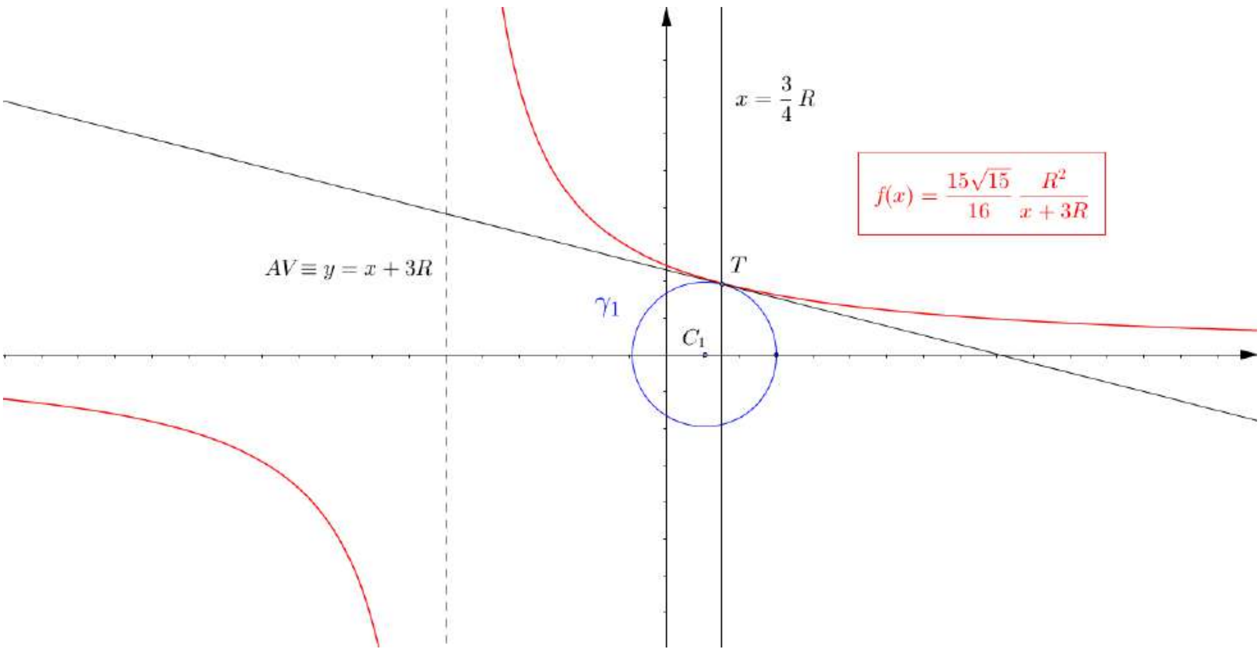


$\mathscr{A}$
$\mathscr{B}$
A
B
P
Q
$\vec{T}_A$
$\vec{T}_B$
$\vec{AB}$
$p = 1$
$q = 2$

EXGAP171 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2008.

Dans le système de référence orthonormé OXY, on considère la circonférence (γ_1) de rayon R et de centre C_1 dont les coordonnées (x, y) sont $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$.

Par les méthodes de la géométrie analytique, déterminer l'équation de l'hyperbole équilatère qui admet comme asymptote l'axe Ox et une parallèle à l'axe Oy et dont les points à abscisse positive présentent des ordonnées positives, sachant que cette hyperbole équilatère doit être tangente à la circonférence (γ_1) [2 coniques sont tangentes en un point si leurs tangentes en ce point sont confondues] en un point d'abscisse T d'absisse $x_T = \frac{3}{4}R$ et d'ordonnée positive.



Calculons la pente de la tangente en $x=\frac{3R}{4}$ et d'ordonnée positive au cercle γ_1.

$$\gamma_1 \equiv \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=R^2 \Rightarrow y=\sqrt{R^2-\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}$$

Si $x=\frac{3R}{4} \Rightarrow y=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{16}}=\frac{R}{4}\sqrt{15}$ et la dérivée est $y'=-\frac{x-\frac{R}{2}}{\sqrt{R^2-\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}}$

et donc la pente de la tangente vaut $-\frac{\frac{R}{4}}{\frac{R}{4}\sqrt{15}}=-\frac{1}{\sqrt{15}}$

D'autre part l'hyperbole équilatère est de la forme : $y=\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma$

Il reste à déterminer α,β et γ. $\gamma=0$ car l'axe des x est une asymptote.

Les deux coniques passent par le même point : $\frac{R}{4}\sqrt{15}=\frac{\alpha}{\frac{3R}{4}-\beta} \Rightarrow \alpha=\frac{R}{4}\sqrt{15}\left(\frac{3R}{4}-\beta\right) \quad (1)$

Les dérivées doivent aussi être égales : $-\frac{\alpha}{\left(\frac{3R}{4}-\beta\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}\left(\frac{3R}{4}-\beta\right)^2 \qquad (2)$

De (1) et $(2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\frac{3R}{4}-\beta\right)^2=\frac{R}{4}\sqrt{15}\left(\frac{3R}{4}-\beta\right)$

La solution : $\beta=\frac{3R}{4}$ est à rejetée car alors $\alpha=0$. Il reste :

$$\frac{1}{\sqrt{15}}\left(\frac{3R}{4}-\beta\right)=\frac{R}{4}\sqrt{15} \Rightarrow \frac{3R}{4}-\beta=\frac{15R}{4} \Rightarrow \beta=-3R \Rightarrow \alpha=\frac{R}{4}\sqrt{15}\left(\frac{3R}{4}+3R\right)=\frac{15\sqrt{15}}{16}R^2$$

L'équation de l'hyperbole est finalement : $\boxed{y=\frac{15\sqrt{15}}{16}.\frac{R^2}{x+3R}}$

EXGAP172 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2015.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère OXY. Veuillez incrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements et calculs intermédiaires (qui font aussi partie de la réponse) ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

Soient *Tintin* la droite verticale qui passe par le point $(1,0)$ et *Milou* la droite passant par l'origine et le point $(1,1)$.

On appelle *Dupondt* le lieu des points équidistants de *Tintin* et *Milou*.

1) Quelle est l'équation cartésienne de *Dupondt* ?

$Dupondt \equiv$

2) De quelle sorte de lieu s'agit-il? (par exemple, une ellipse, ou une droite, ou l'union de deux cercles, etc.)

Dupondt est

3) Quelle est l'intersection de *Dupondt* avec *Rastapopoulos*, qui est le cercle de rayon $\sqrt{2}$ centré sur l'origine?

$Dupondt \cap Rastapopoulos$

4) Représentez *Tintin, Milou, Dupondt* et *Rastapopoulos* par un dessin clair.

Solution proposée par Emilie Jacqmin

1) $Tintin \equiv x = 1$ et $Milou \equiv y = x$.

$M = (x;y) \in Dupondt \Leftrightarrow \text{dist}(M, Tintin) = \text{dist}(M, Milou)$

$$\Leftrightarrow |x-1| = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x - y = \pm\sqrt{2}.(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 \mp \sqrt{2}\right)x - y \pm \sqrt{2} = 0$$

Donc,

$$\boxed{Dupondt \equiv \begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)x - y + \sqrt{2} = 0 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)x - y - \sqrt{2} = 0 \end{cases}}$$

2) $\boxed{\textit{Dupondt} \text{ est l'union de deux droites}}$

3) $Rastapopoulos \equiv x^2 + y^2 = 2$

A résoudre :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \left(1-\sqrt{2}\right).x - y + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \left(1+\sqrt{2}\right).x - y - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$\boxed{Dupondt \cap Rastapopoulos = \left\{\left(0;\pm\sqrt{2}\right);\left(1;1\right)\right\}}$

4)

Le 10 octobre 2014

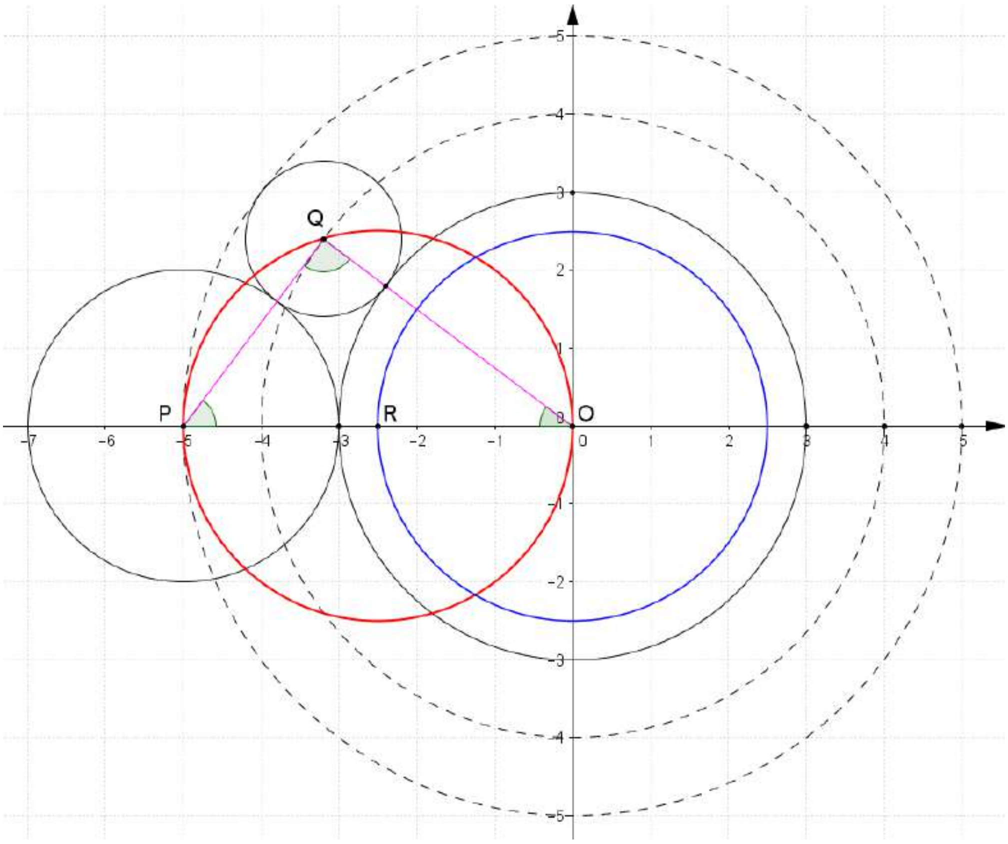
EXGAP173 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Le plan est rapporté au système d'axe orthonormés Oxy. Soit $\mathscr{C}_0$ le cercle de centre O et de rayon 3. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles de rayons fixes 1 et 2, respectivement, se déplaçant à l'extérieur de $\mathscr{C}_0$ en restant non seulement tangents à celui-ci mais aussi tangents entre eux (Le centre de $\mathscr{C}_1$ étant extérieur à $\mathscr{C}_2$).

a) Déterminer les longueurs des côtés du triangle OPQ, où P est le centre de $\mathscr{C}_1$ et Q est le centre de $\mathscr{C}_2$.

b) En déduire les angles de ce triangle.

c) Soit R le centre du cercle circonscrit au triangle OPQ. Identifiez la nature du lieu parcouru par R lorsque $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se déplacent sur $\mathscr{C}_0$, et donner une équation cartésienne de ce lieu.



a) Par construction, il est immédiat que $\overline{PQ}=3, \overline{QO}=4, \overline{PO}=5.$

b) $(3,4,5)$ est un triplet pythagoricien. Par conséquent, le triangle OPQ est rectangle en Q.

$$\Rightarrow QOP=\arcsin\frac{3}{5}=36.87° \Rightarrow QPO=90°-36.87°=53.13°$$

c) Puisque OPQ est un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit R est situé au milieu de PQ.

Le lieu de R est un cercle de centre O et de rayon $\overline{RO}=5/2$ et son équation est

$$\boxed{x^2+y^2=\frac{25}{4}}$$

Le 18 janvier 2015

EXGAP174 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy.

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $x^2 = 2py$, A un point variable de $\mathcal{P}$ d'abscisse $\lambda \neq 0$ et B un point variable de Ox abscisse μ.

a) Quelle relation doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB soit tangente à $\mathcal{P}$?

b) Démontrez que cette relation est équivalente à imposer que AB soit perpendiculaire à BF, où F est le foyer de $\mathcal{P}$.

---

a) Soit la conique $\mathcal{P} \equiv x^2 = 2py$. Si $A \in \mathcal{P} \Rightarrow A = \left(\lambda, \dfrac{\lambda^2}{2p}\right)$.

Etablissons l'équation de la tangente t à $\mathcal{P}$ en A:

On dérive : $2x = 2py' \Rightarrow y' = \dfrac{x}{p}$ et la pente de la tangente vaut $\dfrac{\lambda}{p}$

$$\Rightarrow t \equiv y - \frac{\lambda^2}{2p} = \frac{\lambda}{p}(x - \lambda)$$

Cette tangente coupe l'axe des x en $x = \mu$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda^2}{2p} = \frac{\lambda}{p}(\mu - \lambda) \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} = \mu - \lambda \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\lambda}{2}}$$

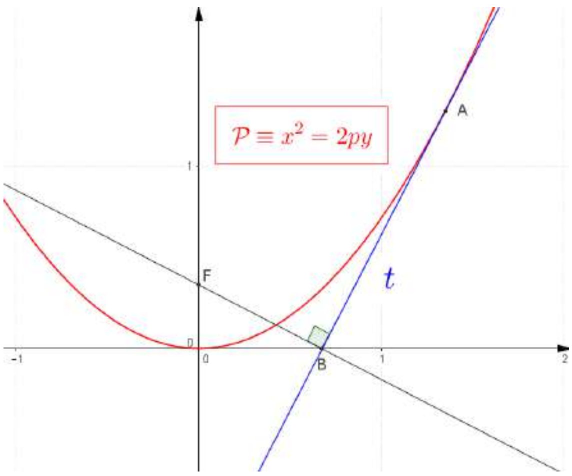
b) Le foyer a pour coordonnées $F = \left(0, \dfrac{p}{2}\right)$

Ce qui nous permet de définir le vecteur $\overrightarrow{FB} = \left(\mu, -\dfrac{p}{2}\right) = \left(\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{p}{2}\right)$

Or vecteur $\overrightarrow{AB} = \left(\mu - \lambda, -\dfrac{\lambda^2}{2p}\right) = \left(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{\lambda^2}{2p}\right)$

Ces deux vecteurs sont perpendiculaires puisque

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FB} = \left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda^2}{2p}\right).\left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{p}{2}\right) = -\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2p}.\frac{p}{2} = 0$$



Le 15 février 2016

EXGAP175 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

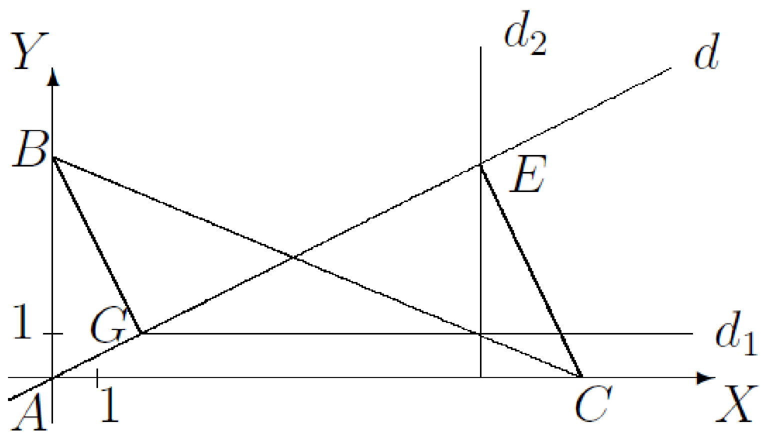
Soient ABC un triangle rectangle en A, et d une droite passant par A. On note G la projection orthogonale de B sur d, et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la parallèle à AC menée par G, et d_2 la parallèle à AB menée par E.

a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.

b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et de d_2 lorsque d varie.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cors/adm/

Choisissons un repère orthonormé d'origine A tel que la droite AC soit l'axe des abscisses et la droite AB celui des ordonnées. Les points A, B et C ont alors respectivement pour coordonnées $(0,0)$, $(0,b)$ et $(c,0)$ où b et c sont des constantes non nulles, strictement positives si on choisit l'orientation des axes en conséquence.



(a) Si d coïncide avec AB alors $G = B$ et $E = A$. La droite d_1 est alors la parallèle à AC passant par B et d_2 coïncide avec AB. Dès lors, les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes en B.

Si d diffère de AB, alors d a pour équation cartésienne $\lambda x - y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toute perpendiculaire à d a une équation cartésienne du type $x + \lambda y + \alpha = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). La perpendiculaire à d passant par B a donc pour équation $x + \lambda y - \lambda b = 0$ et l'équation de celle passant par C est $x + \lambda y - c = 0$. Enfin, l'équation cartésienne de BC est $bx + cy - bc = 0$.

Les coordonnées du point G sont les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y - \lambda b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x = \lambda b \end{cases}$$

c'est-à-dire $\left(\dfrac{\lambda b}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}\right)$.

De même, les coordonnées du point E sont les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x = c \end{cases}$$

c'est-à-dire $\left(\dfrac{c}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda c}{1+\lambda^2}\right)$.

Dès lors, les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation cartésienne $y = \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}$ et $x = \dfrac{c}{1+\lambda^2}$. Elles se coupent au point P de coordonnées $\left(\dfrac{c}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}\right)$. Ce point se trouve sur la droite BC car ses coordonnées vérifient l'équation de BC.

En effet, on a

$$b\,\frac{c}{1+\lambda^2} + c\,\frac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2} - bc = bc\left(\frac{1}{1+\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - 1\right) = 0.$$

Dès lors, P est le point de concours des droites d_1, d_2 et BC.

(b) Lorsque la droite d varie, le lieu géométrique du point P s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations de d_1 et d_2. On a

$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2} \\ x = \dfrac{c}{1+\lambda^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (b-y)\lambda^2 = y \\ x\lambda^2 = c - x \quad (*) \end{array}\right.$$

Comme $x \neq 0$ (sinon $(*)$ s'écrirait $0 = c$ ce qui est impossible puisque $c > 0$), le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2 = \dfrac{c-x}{x} \geq 0 \\ \dfrac{(b-y)(c-x)}{x} = y \end{array}\right.$$

et l'équation du lieu est $bx + cy - bc = 0$ avec $x \in]0, c]$.

Ainsi, le point P se trouve sur la droite BC, son abscisse variant dans $]0, c]$. Comme B fait également partie du lieu (cf. ci-dessus), le lieu de P est le segment $[BC]$.

Le 18 janvier 2015

EXGAP176 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Dans un repère orthonormé (O, X, Y), on considère une parabole $\mathscr{P}_1$ d'axe Y dont le sommet est l'origine O et dont tous les points ont une ordonnée positive ou nulle. On considère aussi la parabole $\mathscr{P}_2$, translatée de $\mathscr{P}_1$, de sommet au point de coordonnées $(4,0)$. Les paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont telles que leurs tangentes respectives à leur point d'intersection sont orthogonales. On demande de déterminer les équations cartésiennes de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

Vu les données du problème (à savoir, sommet à l'origine du repère, axe Y et ordonnées toutes positives), dans le repère donné, la parabole $\mathcal{P}_1$ a pour équation cartésienne

$$y = ax^2,$$

où a est un réel strictement positif. Comme la parabole $\mathcal{P}_2$ est de sommet $(4, 0)$ et est la translatée de $\mathcal{P}_1$, son équation cartésienne est

$$y = a(x - 4)^2.$$

Le point d'intersection de ces paraboles a donc une abscisse qui vérifie l'égalité

$$ax^2 = a(x-4)^2.$$

Le réel 2 est l'unique solution de cette équation. Cela étant, comme les coefficients angulaires des tangentes au point d'abscisse x sont respectivement

$$2ax \qquad \text{et} \qquad 2a(x-4),$$

l'expression du fait que ces tangentes sont orthogonales au point d'abscisse 2 s'exprime par l'égalité

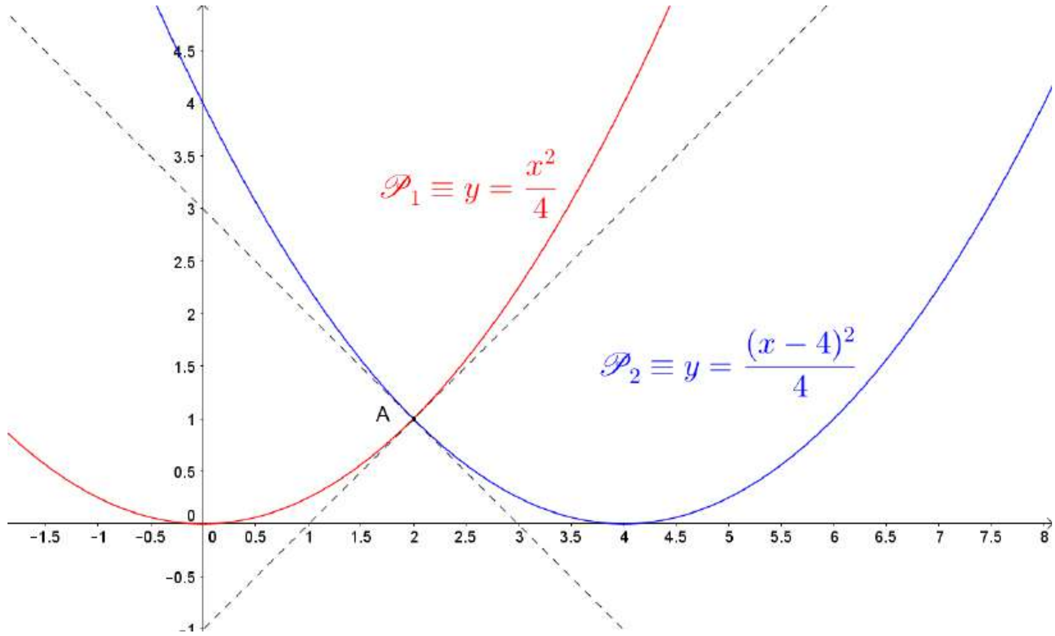
$$4a.2a(-2) = -1 \qquad \text{ou encore} \qquad a^2 = \frac{1}{16}.$$

Comme a est strictement positif, on obtient

$$a = \frac{1}{4}$$

et finalement les équations

$$y = \frac{x^2}{4} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{(x-4)^2}{4}.$$



EXGAP177 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2015.

A. Question préalable.

Dans le système de référence Oxy, considérons l'arc de cercle BCD de corde c_1 et de flèche f_1. Par la géométrie synthètique, déterminez et développez la valeur du rayon R.

A.1 Sur cette base, tracez à l'échelle un arc de cercle BCD de corde 18 cm et de flèche 3 cm, BD étant parallèle à l'axe des x, C étant sur l'axe des y.

B. Question principale

Tangentiellement en B et D, prolongez l'arc de cercle BCD de part et d'autre par de nouveaux arcs de cercles AB et DE de rayon $r\ (r < R)$, de manière à obtenir une anse de panier $ABCDE$ à trois centres $C_1(-a,0), C_2(b,0), C_3(a,0)$, centrée en O sur le repère orthonormé OXY et dont la flèche OC est de 7 cm. Complètez cette figure par une symétrie axiale suivant l'axe X, afin d'obtenir un ovale complet à double anse de panier dont les axes sont AE et CG, G étant le symétrique de C par rapport à l'axe des x ?

Cet ovale est proche de l'ellipse centrée sur le repère orthonormé OXY de mêmes axes AE et CG.

B.1. En vous basant sur la figure A.1, réalisez la figure de l'ovale complet.

B.2. Etablissez les équations des cercles et de l'ellipse.

B.3. Si F_1 et F_2 sont les foyers de l'ellipse, donnez-en les coordonnées.

B.4. Comparez les surfaces de l'ellipse et de l'ovale en anse de panier.

B.5. Pour un quadrant, expliquez le principe de résolution pour déterminer les coordonnées des divers points d'intersection entre l'ellipse et l'ovale en anse de panier.

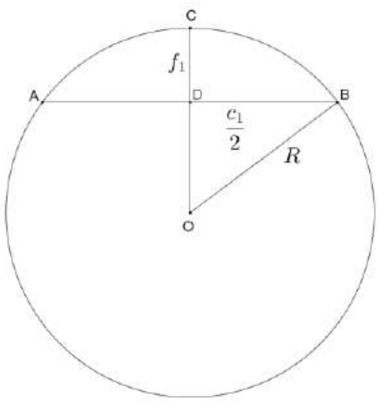


Figure 1

A.1) A partir de la figure 1, on déduit immédiatement :

$$R^2 = (R - f_1)^2 + \left(\frac{c_1^2}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{c_1^2 + 4 f_1^2}{8 f_1}}$$

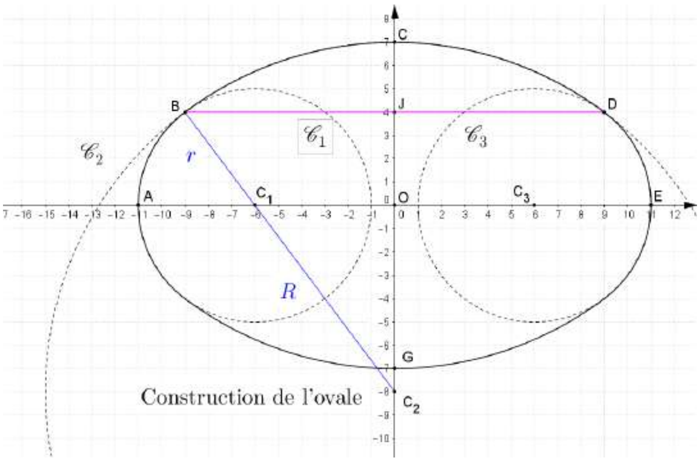


Figure 2

B.1) La figure 2 donne la construction de l'ovale.

- $R = \dfrac{18^2 + 4\times 3^2}{8\times 3} = 15 \text{ cm} \Rightarrow C_2 = (0,-8)$ car $\overline{OC} = 7$ cm
- Les triangles rectangles C_2BJ et C_2C_1O sont semblables :

$$\frac{\overline{C_2C_1}}{\overline{C_2B}} = \frac{\overline{C_1O}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{C_2O}}{\overline{C_2J}} \Rightarrow \frac{R-r}{R} = \frac{a}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = (-6,0) \\ C_3 = (6,0) \end{cases} \\ r = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

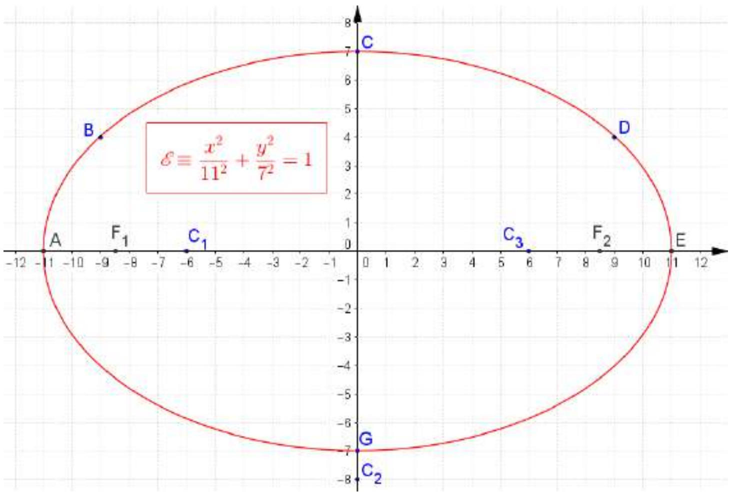


Figure 3

B.2) Les équations des cercles sont alors :

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathscr{C}_1 \equiv (x+6)^2 + y^2 = 25\\ &\mathscr{C}_2 \equiv x^2 + (y+8)^2 = 225\\ &\mathscr{C}_3 \equiv (x-6)^2 + y^2 = 25\end{aligned}}$$

L'équation de l'ellipse est : $\boxed{\mathscr{E} \equiv \frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1}$ (Figure 3)

B.3) Les coordonnées des foyers sont : $c = \sqrt{11^2 - 7^2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_1 = \left(-6\sqrt{2}, 0\right) \\ F_2 = \left(6\sqrt{2}, 0\right) \end{cases}}$

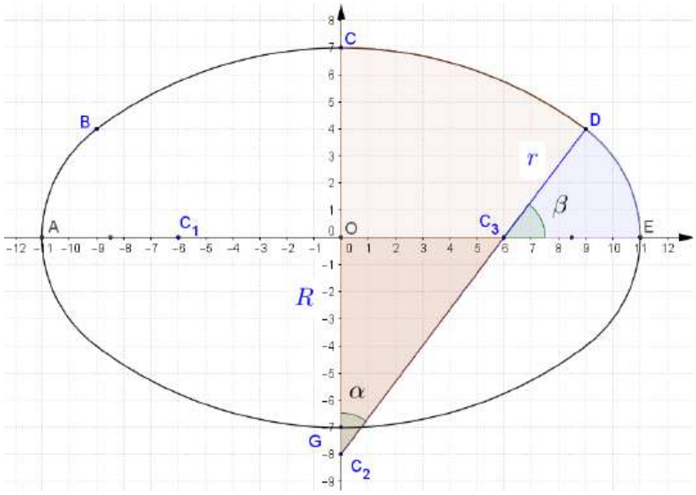


Figure 4

B.4) Soient les angles $\alpha = OC_2C_3 = \arctan\frac{6}{8} = 0.6435$ rad et $\beta = DC_3E = \frac{\pi}{2} - \alpha = 0.9273$ rad.

Considérons la partie de l'ovale située dans le premier quadrant, son aire est égale à la somme des aires des secteurs circulaires CC_2D et DC_3E diminuée de l'aire du triangle C_2OC_3

$$A_{1/4} = S_{CC_2D} + S_{DC_3E} - \Delta_{C_2OC_3} = \frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} - \frac{\overline{OC_3}.\overline{C_2O}}{2}$$

$$= \frac{0.6435 \times 15^2}{2} + \frac{0.9273 \times 5^2}{2} - \frac{6 \times 8}{2} = 59.9849 \text{ cm}^2$$

$$A_{ovale} = 4 \times 59.9849 = 239.9398 \text{ cm}^2$$

Aire de l'ellipse : $\mathrm{A}_{\mathscr{E}} = \pi.\overline{AO}..\overline{OC} = \pi \times 11 \times 7 = 241.9026 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{A_{\mathscr{E}}}{A_{ovale}} = \frac{241.9026}{239.9398} = 1.00818}$ soit seulement 0.82% de différence

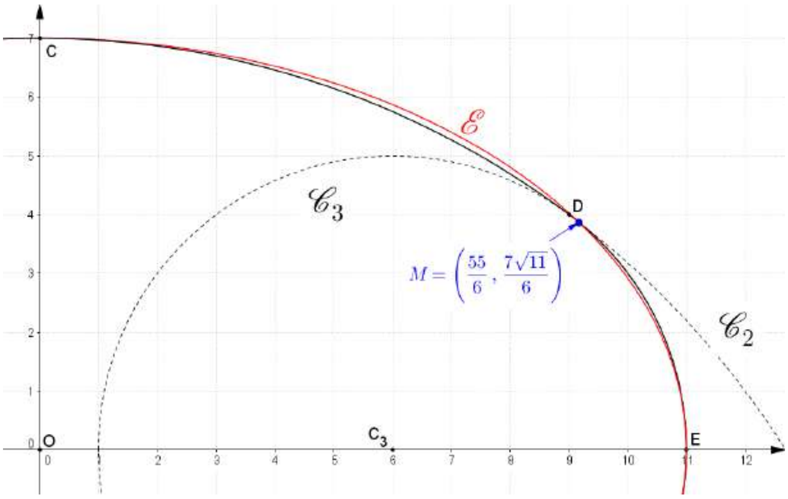


Figure 5

B.5) • Soit $9 \le x \le 11 \Rightarrow \begin{cases} \mathscr{E} \equiv \dfrac{x^2}{11^2} + \dfrac{y^2}{7^2} = 1 \\ \mathscr{C}_3 \equiv (x-6)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 7^2\left(1 - \dfrac{x^2}{11^2}\right) \\ (x-6)^2 + 7^2\left(1 - \dfrac{x^2}{11^2}\right) = 25 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 11 \text{ Ce que nous savions : c'est le point } E. \\ x = \dfrac{55}{6} \simeq 9.167 \Rightarrow y = \dfrac{7\sqrt{11}}{6} \simeq 3.869 \Rightarrow M = \left(\dfrac{55}{6}, \dfrac{7\sqrt{11}}{6}\right) \end{cases}$$

• Soit $0 \le x \le 9 \Rightarrow \begin{cases} \mathscr{E} \equiv \dfrac{x^2}{11^2} + \dfrac{y^2}{7^2} = 1 \\ \mathscr{C}_2 \equiv x^2 + (y+8)^2 = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 11^2\left(1 - \dfrac{y^2}{7^2}\right) \\ 11^2\left(1 - \dfrac{y^2}{7^2}\right) \begin{cases} \mathscr{E} \equiv \dfrac{x^2}{11^2} + \dfrac{y^2}{7^2} = 1 \\ \mathscr{C}_2 \equiv x^2 + (y+8)^2 = 225 \end{cases} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 7 \text{ Ce que nous savions : c'est le point } C. \\ y = \dfrac{35}{9} \Rightarrow x = \dfrac{22\sqrt{14}}{9} \simeq 9.146 > 9 : \text{A rejeter} \end{cases}$$

Le 2 février 2016.

EXGAP178 – EPL, UCL, LLN , juillet 2016 série 2.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère OXY. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

On considère la droite d_1 qui passe par $(1,3)$ et $(-1,2)$. On regarde une droite d_2, qui est perpendiculaire à d_1 et passe par $(1,8)$.

(1) Quelle est l'intersection de ces deux droites?

$$\boxed{d_1 \cap d_2 = \{(\quad , \quad)\}}$$

(2) Quelle est la distance de l'origine à d_1 ? Quel point de d_1 est le plus proche de l'origine?

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{dist}(O,d_1) = \\ \\ \text{point } = (\quad , \quad) \end{array}}$$

(3) Quelle est la distance de l'origine à d_2 ?

$$\boxed{\text{dist}(O,d_2) = }$$

(4) Quelle est la somme des carrés de ces deux distances?

$$\boxed{\text{Somme des carrés des distances} = }$$

(5) Dessinez la situation.

Solution proposée par Louis François

1) d_1 a pour pente $\dfrac{3-2}{1+1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d_1 \equiv y - 3 = \dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow d_1 \equiv y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ (1)

$d_2, \perp d_1$, a pour pente $-2 \Rightarrow d_2 \equiv y - 8 = -2(x-1) \Rightarrow d_2 \equiv y = -2x + 10$ (2)

$d_1 - d_2 : \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} + 2x - 10 = 0 \Rightarrow \dfrac{5}{2}x - \dfrac{15}{2} = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4$

Conclusion : $\boxed{d_1 \cap d_2 \equiv E = (3,4)}$

2) OB est de pente -2, et est donc $\perp d_1 \Rightarrow \text{dist}(O,d_1) = \overline{OB} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

B est aussi le point le plus proche de O.

Conclusion : $\boxed{\text{dist}(O,d_1) = \overline{OB} = \sqrt{5}; \quad \text{point : } B = (-1,2)}$

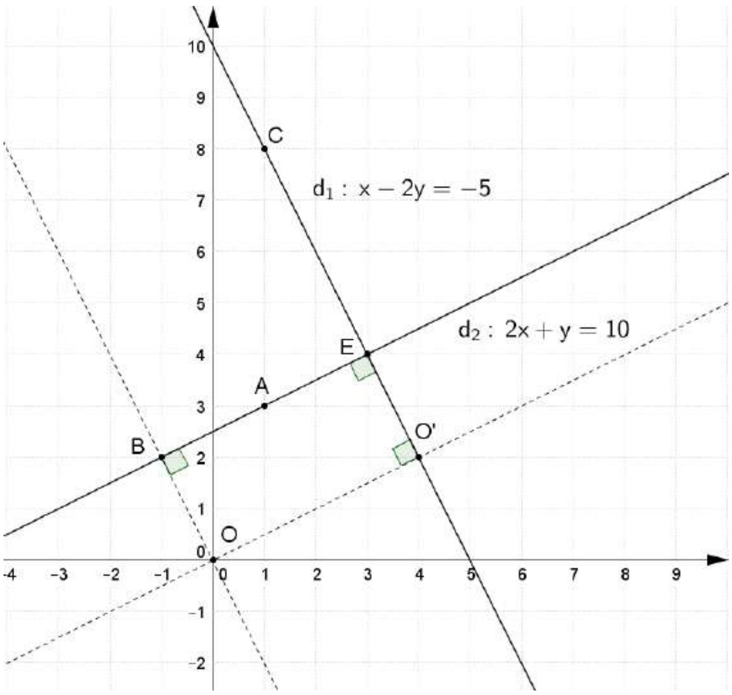
3) O' projection de O sur d_2 est le points le plus proche de O

Le quadrilatère $OBEO'$ est un rectangle,

donc $d(O,d_2) = d(O,O') = d(B,E) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Conclusion : $\boxed{d(O,d_2) = 2\sqrt{5}}$

4) $\boxed{\text{Somme des carrés des distances : 25}}$



Le 7 septembre 2016.

EXGAP179 – EPL, UCL, LLN , juillet 2016 série 1.

Cette question prend plce dans le plan euclidien de repère OXY. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles séparées.

On regarde le lieu des points dont la somme des carrés des distance aux deux points $(0,0)$ et $(2,0)$ est k (un paramètre réel).

(1) Pour $k=10,$ ce lieu est un cercle. Quel est son centre? Son rayon?

Centre $=$ Rayon $=$

(2) Pour quelle valeur de k, le lieu est-il un singleton (çàd réduit à un point)?

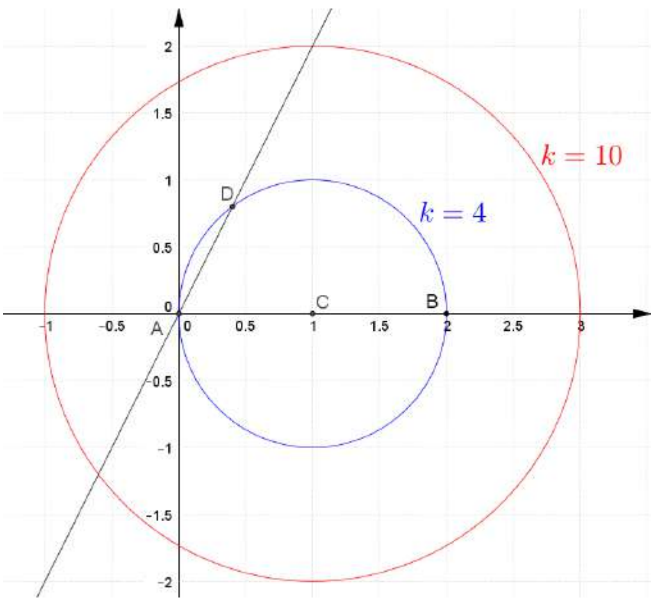
$k=$

(3) Pour $k=4,$ le lieu rencontre la droite $\{(t,2t):t\in\mathbb{R}\}$ en quels points?

Lieu $\cap$ droite $=$

(4) Représentez la situation (3) par un dessin.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$(1)\ x^2+y^2+(2-x)^2+y^2=k\Rightarrow ...\Rightarrow (x-1)^2+y^2=\frac{k}{2}-1$

Donc pour $k=10,$ on obtient un cercle d'équation : $(x-1)^2+y^2=4$

C'est-à-dire un cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2.

(2) Il suffit que le rayon soit nul $\Rightarrow \frac{k}{2}-1=0\Rightarrow k=2$

(3) Sous forme cartésienne la droite $\{(t,2t):t\in\mathbb{R}\}$ s'écrit : $y=2x$

Si $k=4,$ le cercle devient : $(x-1)^2+y^2=1$

On a alors le système :

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ y=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(0,0)\\ D\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)\end{cases}$$

Le 20 octobre 2016.