Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 18

EXGAP180 – EXGAP189

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Novembre 2016

EXGAP180 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Cette question prend place dans l'espace euclidien OXY. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet, et vos raionnements et calcule intermédiaires (qui font aussi partie de la réponse) ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

Marius lance avec son talent coutumier une boule de pétanque (vue comme un point) vers le cochonnet, point situé aux coordonnées $(10,0)$ (unités en mètres, donc à 10 mètres de l'origine). La trajectoire de la balle est une parabole, passant par le point $(0,1)$ (la main de Marius), et d'axe de symétrie vertical.

(1) Si la parabole monte depuis la main de Marius et culmine à 5 mètres du sol avant de retomber sur le cochonet, quelle est son équation cartésienne.

Parabole $\equiv$

(2) Quelles sont les coordonnées du foyer de cette parabole?

Foyer $\equiv$

(3) Quelle est l'équation de la tangente de cette parabole en $(0,1)$ (donc la direction dans laquelle Marius propulse sa boule)?

Tangente $\equiv$

(4) Représenter la situation par un dessin clair.

(5) Si Marius lance la boule à l'horizontale (la tangente à la parabole est horizontale en $(0,1)$), quelle est l'équation cartésienne de cette parabole?

Parabole $\equiv$

Cette question est particulièrement difficile. On peut toujours écrire quelque chose, mais il ne faut pas nécessairement aller jusqu'à la fin.

Trois façons différentes permettent de répondre à la question.

Pour rappel les calculatrices ne sont pas autorisées.

Solution proposée par Marc Decoux et Nicole Berckmans

(1) La parabole peut s'écrire : $y = ax^2 + bx + c.$

Passage par $(0,1)$ $\quad\Rightarrow c = 1$

Passage par $(10,0)$ $\quad\Rightarrow 100a + 10b + 1 = 0$ $\quad(1)$

Concavité tournée vers le bas : $a < 0$ $\quad(2)$

Pour différentier la bonne de la mauvaise, je mets comme condition : $f'(0) > 0$ $\quad(3)$

Pour trouver le sommet, j'annule la dérivée : $2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b > 0$

Je développe : $5 = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) \Rightarrow 5 = \dfrac{ab^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{2a} + 1$ $\quad(4)$

Puisque $b > 0,$ on doit avoir : $b = 4\sqrt{-a}$ $\quad(5)$

que je remplace dans $(1),$ pour obtenir : $100a + 40\sqrt{-a} + 1 = 0$

Ceci est une équation du second degré en $\sqrt{-a}$. Pour faciliter le travail, nous pouvons poser : $h = \sqrt{-a} \Rightarrow a = -h^2.$

Finalement, nous obtenons : $\quad h = \sqrt{-a} = \dfrac{20 \pm \sqrt{400+100}}{100} = \dfrac{20 \pm \sqrt{5}}{10}$

Puisque : $h = \sqrt{-a}$ est positif, on choisira : $\sqrt{-a} = \dfrac{2+\sqrt{5}}{10}$

D'où (5) donne : $b = 4\sqrt{-a} = \dfrac{2\left(2+\sqrt{5}\right)}{5}$

et $\quad a = \dfrac{b^2}{16} = -\dfrac{1}{16}\dfrac{4\left(2+\sqrt{5}\right)^2}{25} = -\dfrac{9+4\sqrt{5}}{100}$

L'équation de la parabole est donc : $\boxed{P \equiv y = -\dfrac{9+4\sqrt{5}}{100}x^2 + \dfrac{2\left(2+\sqrt{5}\right)}{5}x + 1}$

Ou encore : $\boxed{P \equiv y = -0.1794\,x^2 + 1.6944\,x + 1}$

(2) Pour trouver le foyer d'une parabole, on peut utiliser la relation focale, où $F(f_1, f_2)$ est le foyer, $\mathscr{D}$ la directrice, $P(10,0)$ un point de la parabole, et $S(s_1, s_2)$ le sommet.

On sait que : distance de P à $\mathscr{D}$ = distance de P à F.

Cherchons f_1 : $f_1 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{20(2+\sqrt{5})}{9+4\sqrt{5}} = \dfrac{20(2+\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{1} = 20\sqrt{5}-40 \simeq 4.7214$ m

Selon le schéma on voit que $\overline{SF} = 5 - f_2$ et que la distance de P à $\mathscr{D} = 5 + (5 - f_2) = 10 - f_2$

$\Rightarrow \overline{PF}^{\,2} = d^{\,2}(P, \mathscr{D}) \Rightarrow (10 - f_1)^2 + f_2^2 = (10 - f_2)^2$

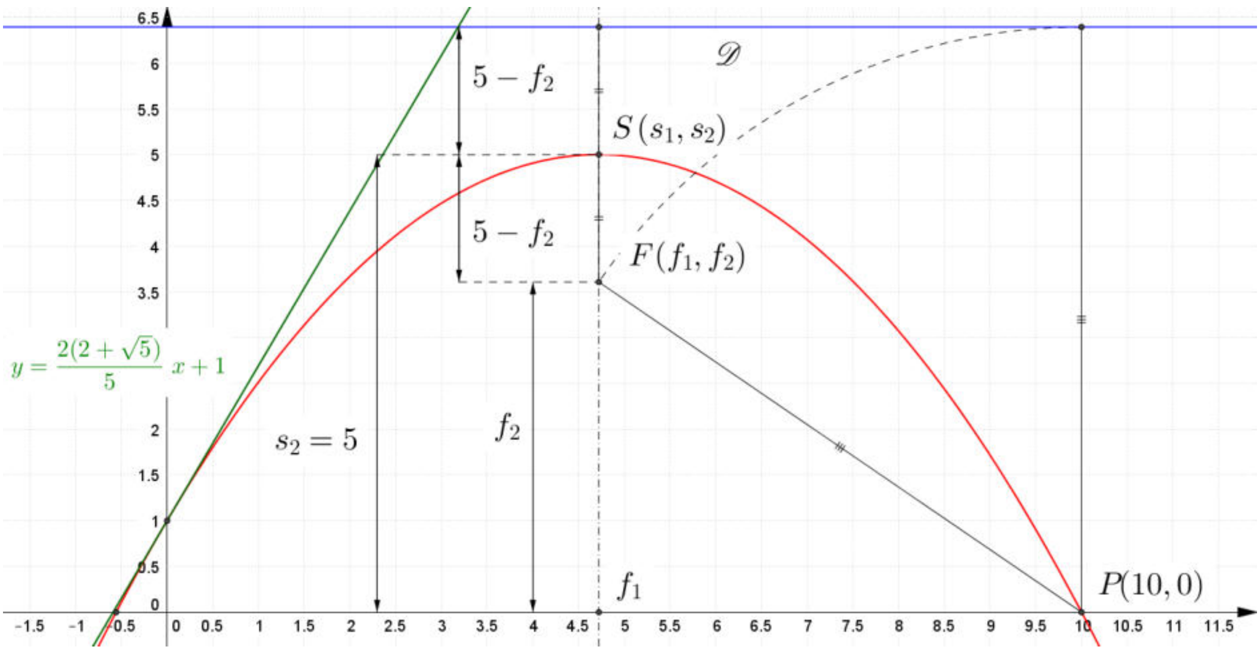
$\Rightarrow (10 + 40 - 20\sqrt{5})^2 + f_2^2 = 100 - 20 f_2 + f_2^2$

On trouve finalement : $f_2 = -220 + 100\sqrt{5} \simeq 3.6068$ m

Conclusion : $\boxed{F(20\sqrt{5}-40, -220+100\sqrt{5}) \quad \text{ou} \quad F(4.7214, 3.6068)}$

(3) tangente en $(0,1)$: $y - 1 = f'(0).x, \quad f'(x) = 2ax + b, \quad f'(0) = b$

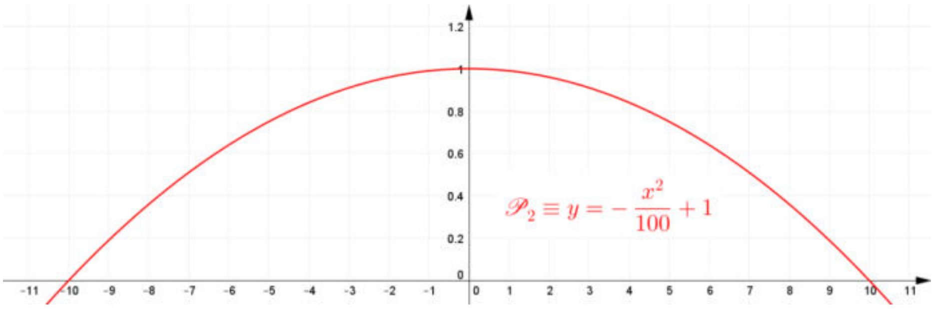
$\Rightarrow \boxed{t \equiv y = \dfrac{2(2+\sqrt{5})}{5}x + 1}$



(5) Si le tir est horizontal, alors le point $(0,1)$ est un sommet et $(-10,0)$ et $(10,0)$ sont les deux racines.

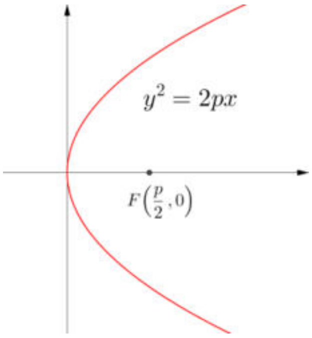
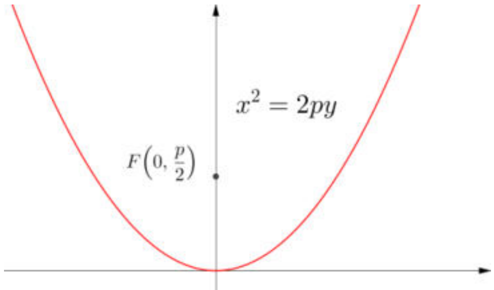
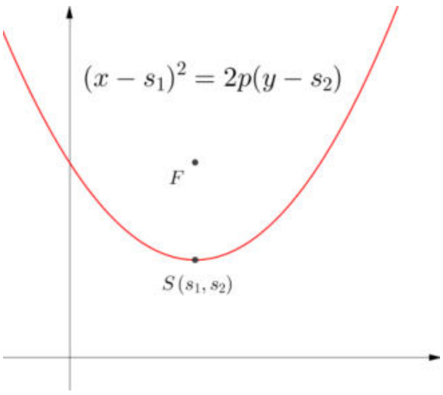
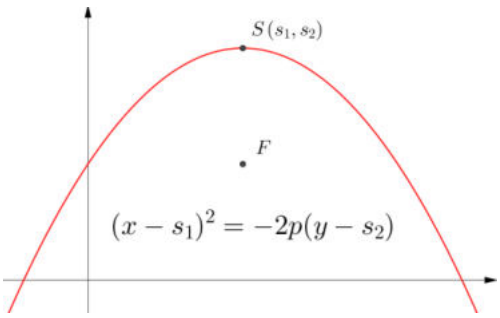
La parabole peut alors s'écrire : $\mathscr{P} \equiv y = a(x-10)(x+10) = a(x^2 - 100)$

$(0,1) \in \mathscr{P} \Rightarrow 1 = -100a \Rightarrow \boxed{\mathscr{P} \equiv -\dfrac{x^2}{100} + 1}$



Solution proposée par Louis François

Rappels

Ici, $\mathscr{P} \equiv (x-s_1)^2 = -2p(y-5)$ (1) puisque $s_2 = 5$

$$\begin{cases}(0,1)\in\mathscr{P} & \text{si } s_1^2 = 8p \\ (10,0)\in\mathscr{P} & \text{si } (10-s_1)^2 = 10p\end{cases} \Rightarrow \frac{s_1^2}{(10-s_1)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5s_1^2 = 4(10-s_1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}\, s_1 = 2(10-s_1) \Rightarrow s_1 = 20(-2+\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow p = \frac{s_1^2}{8} = 50(-2+\sqrt{5})^2 = 50(9-4\sqrt{5})$$

On remplace dans $(1) \Rightarrow \boxed{\mathscr{P} \equiv \left(x-20(-2+\sqrt{5})\right)^2 = -100(9-4\sqrt{5})(y-5)}$

On en déduit les coordonnées du foyer :

$$F(s_1,s_2) = F\left(s_1, 5-\frac{p}{2}\right) = F\left(20(-2+\sqrt{5}), 5-25(\sqrt{5}-2)^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F\left(20(-2\sqrt{5}), -220+100\sqrt{5}\right)}$$

(3) $\mathscr{P} \equiv y-5 = -\frac{1}{2p}(x-s_1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p}(x-s_1)$

En $x=0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{s_1}{p} = \frac{20(-2+\sqrt{5})}{50(-2+\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5(-2+\sqrt{5})} = \frac{2(2+\sqrt{5})}{5}$

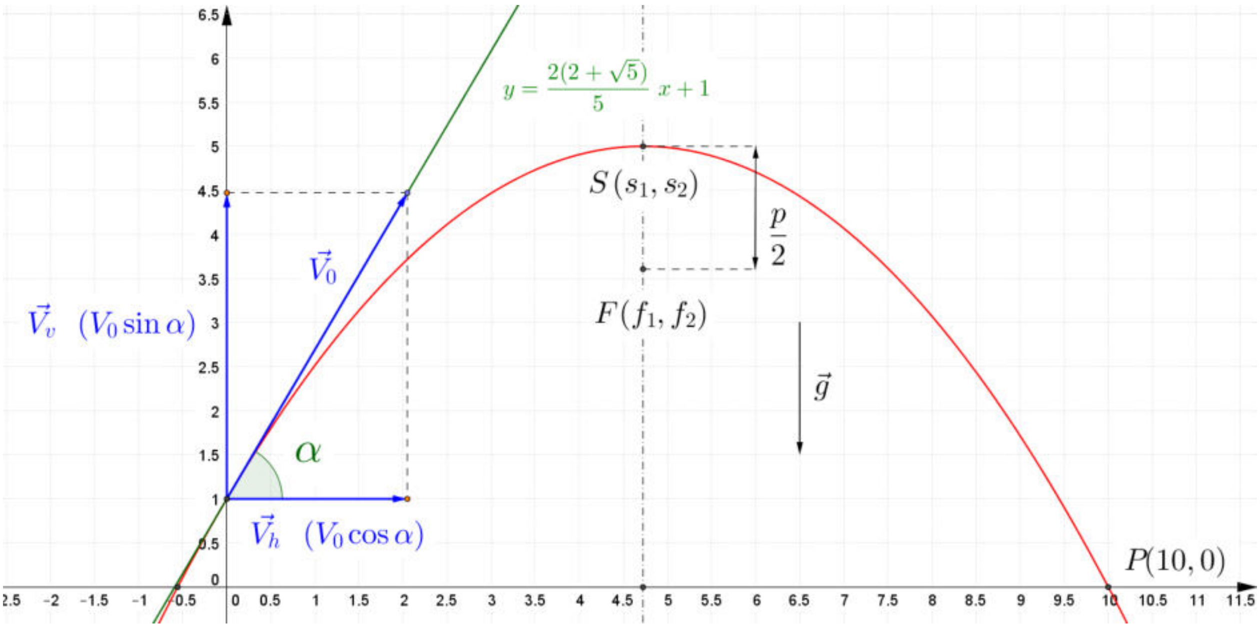
La tangente en $(0,1)$ est alors : $\boxed{t \equiv y-1 = \frac{2(2+\sqrt{5})}{5}x}$

(5) idem

Solution proposée par Jacques Collot

(1) Cette approche est différente au sens où on va appliquer la théorie vue au cours de physique. (Chapitre de mécanique sur les mouvements à deux dimensions). Il s'agit bien ici d'un tir parabolique. Horizontalement, le mouvement est un MRU et verticalement, un MRUA. Sachant que le mobile part du point $(0,1)$, les équations paramètrique de la tajectoire en fonction du temps t et l'équation cartésienne sont :

$$\begin{cases} x = V_0 \cos\alpha\, t & (1) \\ y = 1 + V_0 \sin\alpha\, t - \frac{g}{2}t^2 & (2) \\ V_v = V_0 \sin\alpha - gt & (3) \end{cases} \Rightarrow y = 1 + \tan\alpha\, t - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_0^2 \sin^2\alpha} \qquad (4)$$



(a) Au sommet la composante verticale de la vitesse est nulle. Le temps t_s pour atteindre le sommet : $(3) \Rightarrow t_s = \dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}$

et on remplace dans $(2) \Rightarrow 5 = 1 + \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \dfrac{g}{2}\dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} \Rightarrow V_0^2 = \dfrac{8g}{\sin^2\alpha} \quad (5)$

(b) Le temps de vol t_v pour aller au point $P(10,0)$ est donné par $(1) \Rightarrow t_v = \dfrac{10}{V_0 \cos\alpha}$

et on remplace dans $(2) \Rightarrow 0 = 1 + 10\tan\alpha - \dfrac{g}{2}\dfrac{10^2}{V_0^2 \cos^2\alpha}$

Compte tenu de (5), on obtient une équation en $\tan\alpha$: $1 + 10\tan\alpha - \dfrac{25}{4}\tan^2\alpha = 0$

Nous gardons la réponse positive : $\tan\alpha = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{5} \simeq 1.6944 \quad (\alpha = 59.45°)$

a le coefficient du x^2 dans (4) devient :

$$a = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} = -\frac{g}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{8g} = -\frac{\tan^2\alpha}{16} = -\frac{\left(\frac{4+2\sqrt{5}}{5}\right)^2}{16} = \ldots = -\frac{9+4\sqrt{5}}{10}$$

L'équation de la parabole est donc : $\boxed{P \equiv y = -\dfrac{9+4\sqrt{5}}{100}x^2 + \dfrac{2(2+\sqrt{5})}{5}x + 1}$

Ou encore : $\boxed{P \equiv y = -0.1794\, x^2 + 1.6944\, x + 1}$

Notons en passant que : $V_0 = \sqrt{\dfrac{8g}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 9.81}{\sin^2 59.45°}} = 1.846 \text{ m/s}$

(2) Rappel : une parabole de la forme $y = ax^2 + bx + c$ peut facilement ce mettre sous la forme $y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En comparant avec l'équation focale : $y - s_2 = -\frac{1}{2p}(x - s_2)^2$ $(-$ car une parabole à concavité négative$)$, on en déduit que le sommet S a pour coordonnées $S = (s_1, s_2) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ (ce que nous savions) et que $\frac{p}{2} = -\frac{1}{4a}$.

La figure nous indique aussi que l'ordonnée du foyer : $f_2 = s_2 - \frac{p}{2}$

Dans notre cas cela donne : $s_1 = f_1 = -\frac{\frac{4+2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{9+4\sqrt{5}}{100}} = \ldots = 20\sqrt{5} - 40 \simeq 4.7214$ m;

$\frac{p}{2} = -\frac{1}{4\left(-\frac{9+4\sqrt{5}}{100}\right)} = \ldots = 25\left(9 - 4\sqrt{5}\right) \Rightarrow f_2 = 5 - 25\left(9 - 4\sqrt{5}\right) = 100\sqrt{5} - 220 \simeq 3.6068$ m.

Conclusion : $\boxed{F\left(20\sqrt{5} - 40, 100\sqrt{5} - 220\right) \quad \text{ou} \quad F(4.7214; 3.6068)}$

(3) L'équation de la tangente en $(0,1)$est immédiate :

$t \equiv y - y_0 = \tan\alpha\left(x - x_0\right) \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{4+2\sqrt{5}}{5}x + 1}$

(5) Idem les résolutions précédentes.

14 octobre 2016

EXGAP181 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

On donne une doite d passant par le centre $\mathscr{C}$, et on considère le lieu des cercles qui sont à la fois tangents à d et tangents extérieurement à $\mathscr{C}$. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof Bernard Boigelot, Prof François Bastin :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

On choisit un repère orthonormé de telle sorte que l'origine O soit le centre du cercle, l'unité égale au rayon du cercle et l'axe des abscisses défini par d.

La tangente à un cercle en un point est orthogonale au rayon joignant le centre du cercle au point. Dès lors un point P de coordonnées cartésiennes (x, y) appartient au lieu si et seulement si P est extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et la distance $dist(P, d)$ de P à d est égale à la distance $dist(P, \mathcal{C})$ de P à $\mathcal{C}$. Avec le choix du repère, ceci s'exprime par

$$|y| = \sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

On obtient donc successivement

$$\begin{aligned} |y| = \sqrt{x^2+y^2} - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ (|y|+1)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ 1 + 2|y| = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + 2|y| = x^2. \end{aligned}$$

On obtient donc successivement

$$\begin{aligned} |y| = \sqrt{x^2+y^2} - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ (|y|+1)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ 1 + 2|y| = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + 2|y| = x^2. \end{aligned}$$

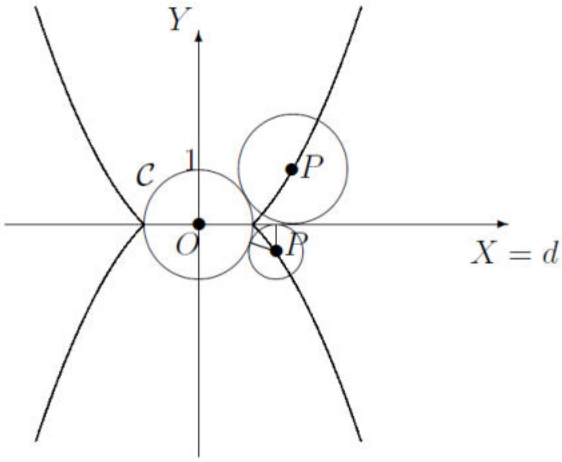
Lorsque l'ordonnée de P est positive ou nulle, on obtient donc que P appartient au lieu si et seulement si

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

et lorsqu'elle est négative, P appartient au lieu si et seulement si

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

Le lieu est donc formé de deux parties de paraboles d'axe Y: les points de la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ dont l'ordonnée est positive et les points de la parabole d'équation $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ dont l'ordonnée est négative.



Remarque: On aurait également pu résoudre ce problème en revenant directement à la description géométrique de deux (parties de) paraboles: considérer le centre du cercle (O) comme foyer et comme directrices les deux droites parallèles à la droite donnée situées à une distance égale au rayon du cercle.

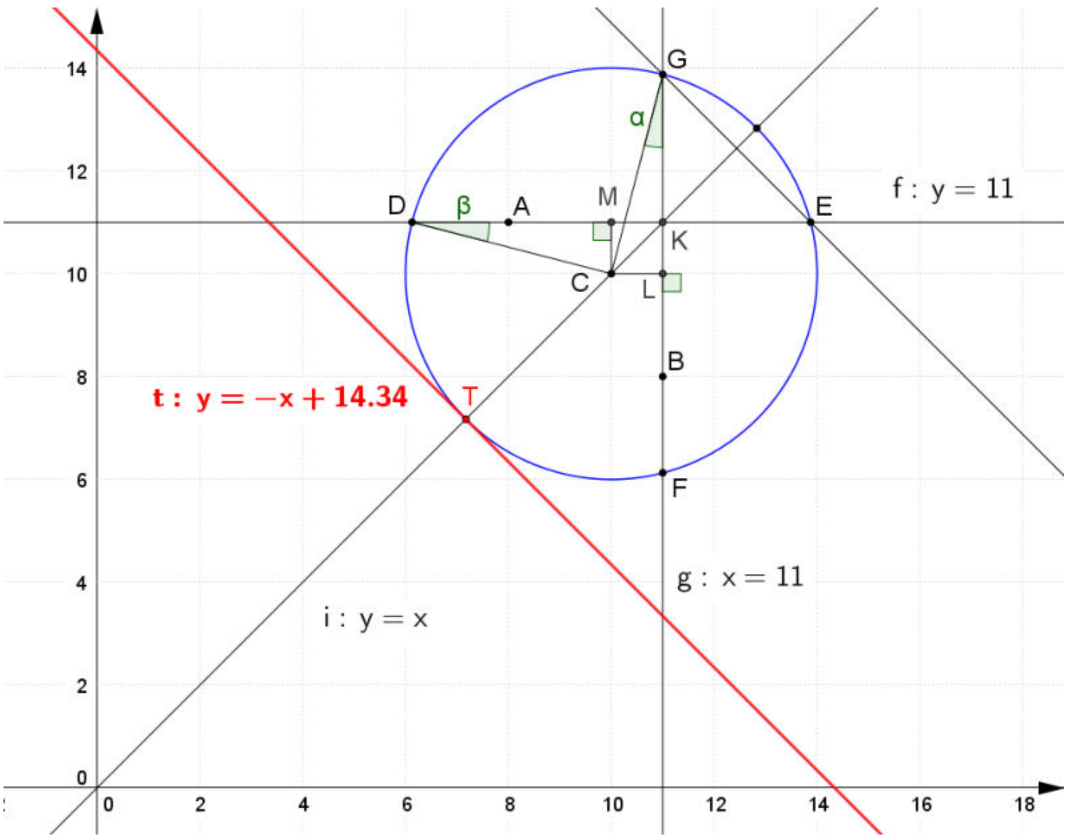
EXGAP182 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Dans un repère orthonormé OXY, soit un cercle c de centre $C(10,10)$ et de rayon 4. Soit une droite a parallèle à l'axe OX et passant par $A(8,11)$. Cette droite coupe le cercle c en deux points D et E tels que l'abscisse de D est inférieure à celle de E. Soit une droite b parallèle à OY et passant par le point $B(11,8)$. Cette droite coupe le cercle c en deux points F et G tels que l'ordonnée de F est inférieure à celle de G. Soit t la tangente au cercle c parallèle à la droite GE telle que l'ordonnée du point de tangence T soit inférieure à l'orodnnée de B.

(a) On demande de déterminer les coordonnées du point T et l'équation cartésienne de t.

(b) Soit K l'intersection entre la droite a et la droite b; soient α l'amplitude de l'angle $\widehat{KGC}$ et β celle de l'angle $\widehat{CDK}$. On demande de démontrer par les méthodes de la géométrie synthétique la relation suivante : $\alpha = \beta$.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



(a)Le cercle a pour équation : $\mathscr{C} \equiv (x-10)^2 + (y-10)^2 = 16$

Les coordonnées des point E et G sont :

$E = \mathscr{C} \cap f \Rightarrow E_x = 10+\sqrt{15} \Rightarrow E\left(10+\sqrt{15},11\right)$

$G = \mathscr{C} \cap g \Rightarrow G_y = 10+\sqrt{15} \Rightarrow G\left(11,10+\sqrt{15}\right)$

On en déduit que $m_{GE} = -1 \Rightarrow m_t = -1$ $(t$ étant la tangente cherchée$)$.

La dérivée de $\mathscr{C}$ parapport à x donne :

$$2(x-10)+2(y-10)y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x-10}{y-10}$$

Pour le point de tangence $T(x_T, y_T)$: $y' = -1 = -\dfrac{x_T - 10}{y_T - 10}$

Ce qui implique que $x_T = y_T$ et en rempaçant dans l'équation du cercle :

$2(x_T - 10)^2 = 16 \Rightarrow x_T = y_T = 10 \pm 2\sqrt{2}$

On garde l'ordonnée la plus petite $\Rightarrow$ $\boxed{T = \left(10-2\sqrt{2},10-2\sqrt{2}\right)}$

L'équation de la tangente est alors : $\boxed{t \equiv y = -x + 20 - 4\sqrt{2}}$

(b) Soit M la projection de C sur DE et L la projection de C sur FG.

Les triangles rectangles CLG et CMD sont isométriques puisque

$\overline{CG} = \overline{CD} = R$ et $\overline{CM} = \overline{CL} = 1$.

Donc les angles $\widehat{CGL}$ et $\widehat{CDM}$ ont même amplitude.

Rappel : tangentes à un cercle $\mathscr{C}$

(a) par un point donné $P(x_1, y_1) \in \mathscr{C}$

Cercle centré à l'origine : $\mathscr{C} \equiv x^2 + y^2 = R^2$

On dérive $\mathscr{C}$: $2x - 2y.y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y} = -\dfrac{x_1}{y_1}$

La tangente est alors : $y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

En réarrangeant on trouve facilement : $\boxed{t \equiv x_1x + y_1y = R^2}$

Cercle quelconque de centre $C(x_C, y_C)$: $\mathscr{C} \equiv (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

La tangente est $\boxed{t \equiv x_1(x - x_C) + y_1(y - t_C) = R^2}$

(b) parallèle à une direction m

Cercle centré à l'origine : $\mathscr{C} \equiv x^2 + y^2 = R^2$

On a $t \equiv x_1x + y_1y = R^2 \Rightarrow y = -\dfrac{x_1}{y_1}x + \dfrac{R^2}{y_1}$

or $\dfrac{x_1}{y_1} = m$ et $x_1^2 + y_1^2 = R^2 \Rightarrow \dfrac{R^2}{y_1^2} = \dfrac{x_1^2}{y_1^2} + 1 = m^2 + 1$

La tangente est alors : $\boxed{t \equiv y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}}$

Cercle quelconque de centre $C(x_C, y_C)$: $\mathscr{C} \equiv (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

La tangente est $\boxed{t \equiv y - y_C = m(x - x_C) \pm R\sqrt{1 + m^2}}$

(c) par un point $P(x_1, y_1)$ extérieur au cercle $\mathscr{C}$

Cercle centré à l'origine : $\mathscr{C} \equiv x^2 + y^2 = R^2$

La corde de contact des points de tangences est : $p \equiv x_1x + y_1y = R^2$

Les coordonnées des points de tangences sont données par $p \cap \mathscr{C}$

Ce qui permet de trouver facilement les tangentes.

Cercle quelconque de centre $C(x_C, y_C)$: $\mathscr{C} \equiv (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

La corde de contact des points de tangences est :

$$c \equiv x_1(x - x_C) + y_1(y - y_C) = R^2$$

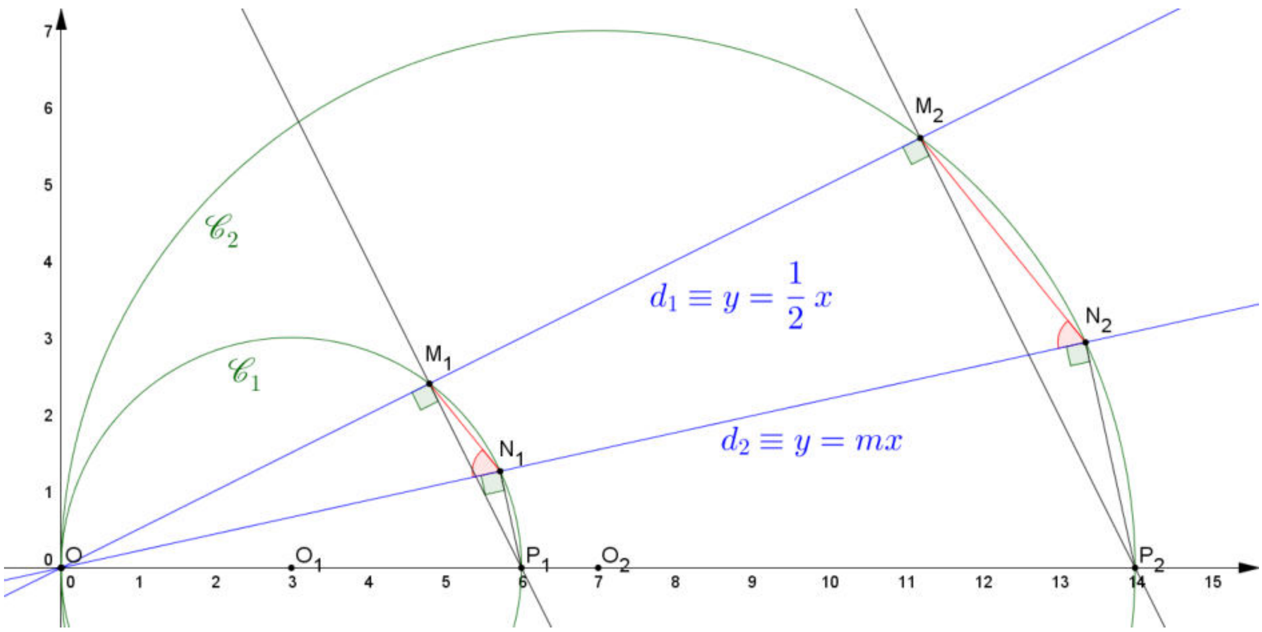
Remarque : La droite p s'appelle la polaire du point P, et celui-ci s'appelle le pôle de la droite p, pour le cercle $\mathscr{C}$

EXGAP183 – POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2016.

Dans un repère cartésien Oxy, on considère un cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O_1 de coordonnées $(3,0)$ et passant par O et un cercle $\mathscr{C}_2$ de centre O_2 de coordonnées $(7,0)$ et passant aussi par le point O. En plus du point O, les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ coupent l'axe Ox respectivement en P_1 et en P_2. On y ajoute la droite d_1 d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ qui coupe les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en O mais aussi, sur la partie droite, en des points notés respecti--vement M_1 et M_2.

On demande de

1. démontrer par les méthodes de la géométrie synthétique que les segments M_1P_1 et M_2P_2 sont parallèles;
2. démontrer par les méthodes de la géométrie analytique que la droite passant par les points M_1 et P_1 est parallèle à la droite passant par les points M_2 et P_2.
3. démontrez par les méthodes de la géométrie synthétique que les segments M_1N_1 et M_2N_2 sont aussi parallèles, les points N_1 et N_2 étant les intersections respectivement avec les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'une droite d_2 d'équation $y=mx$, m étant arbitrairement choisi entre 0 et $\dfrac{1}{2}$ (la droite d_2 est donc entre l'axe Ox et la droite d_1 et est distincte de ceux-ci).



1) Les triangles OM_1P_1 et OM_2P_2 sont rectangles puisque OP_1 et OP_2 sont des diamètres. Les segments M_1P_1 et M_2P_2 sont donc perpendiculaires à la droite d_1 et sont donc parallèles.

De même on démontre que $N_1P_1 // N_2P_2$

2) $M_1 = \mathscr{C}_1 \cap d_1 = \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 3^2 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x\left(\dfrac{5}{4}x - 6\right) = 0 \Rightarrow M_1 = \left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$

$M_2 = \mathscr{C}_2 \cap d_1 = \begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = 7^2 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x\left(\dfrac{5}{4}x - 14\right) = 0 \Rightarrow M_2 = \left(\dfrac{56}{5}, \dfrac{28}{5}\right)$

$m_{M_1P_1} = \dfrac{0 - \dfrac{12}{5}}{6 - \dfrac{24}{5}} = \dfrac{-12}{6} = -2;$ $\qquad m_{M_2P_2} = \dfrac{0 - \dfrac{28}{5}}{14 - \dfrac{56}{5}} = \dfrac{-28}{14} = -2;$

Les droites M_1P_1 et M_2P_2 sont donc parallèles.

3) Notons que les angles $\overline{M_1P_1N_1}$ et $\overline{M_2P_2N_2}$ sont égaux puisque ce sont des angles à côtés parallèles.

Les triangles rectangles OM_1P_1 et OM_2P_2 sont semblables car l'angle $\overline{M_2OP_2}$ est commun : $\Rightarrow \dfrac{\overline{M_1P_1}}{\overline{M_2P_2}} = \dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}$ (1)

De même pour les triangles rectangles ON_1P_1 et $ON_2P \Rightarrow \dfrac{\overline{N_1P_1}}{\overline{N_2P_2}} = \dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}$ (2)

(1) et $(2) \Rightarrow \dfrac{\overline{M_1P_1}}{\overline{M_2P_2}} = \dfrac{\overline{N_1P_1}}{\overline{N_2P_2}}$.

Les triangles $M_1P_1N_1$ et $M_2P_2N_2$ ont donc un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Ils sont donc semblables. On peut alors écrire :

$$\overline{M_1N_1P_1} = \overline{M_2N_2P_2} \Rightarrow \overline{M_1N_1P_1} - \underbrace{\overline{ON_1P_1}}_{=90°} = \overline{M_2N_2P_2} - \underbrace{\overline{ON_2P_2}}_{=90°} \Rightarrow \overline{M_1N_1O} = \overline{M_2N_2O}$$

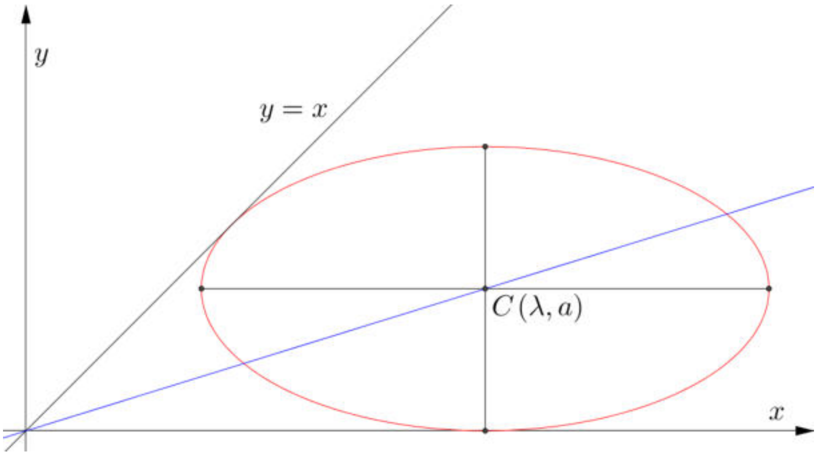
Ces derniers angles sont des angles correspondants et donc $M_1N_1 // M_2N_2$

Le 28 mars 2017

EXGAP184 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormé $Oxyz$.
Soit dans ce plan une ellipse dépendant d'un paramètre réel $a > 0$, de grand axe parallèle à l'axe Ox et de longueur $2a$ et de petit axe parallèle à l'axe Oy et de longueur a.
Déterminez la nature et une équation cartésienne du lieu parcouru par le centre de cette ellipse lorsque a varie dans $\mathbb{R}$ et que l'ellipse reste tangente à la fois à l'axe Ox et à la droite d'équation $y = x$

Solution proposée par Fabienne Zoetard



Le centre de l'ellipse a pour coordonnées : $C(\lambda, a)$ où λ est un paramètre à déterminer.

L'ellipse a pour équation : $E \equiv \dfrac{(x-\lambda)^2}{a^2} + \dfrac{\left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = 1$

La droite $y = x$ étant tangente à l'ellipse, on a :

$$\frac{(x-\lambda)^2}{a^2} + \frac{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow ...... \Rightarrow 5x^2 - 2(\lambda + 2a)x + \lambda^2 = 0$$

Le réalisant Δ' de cette équation doit être nul: $\Delta' = (\lambda + 2a)^2 - 5\lambda^2 = 0$

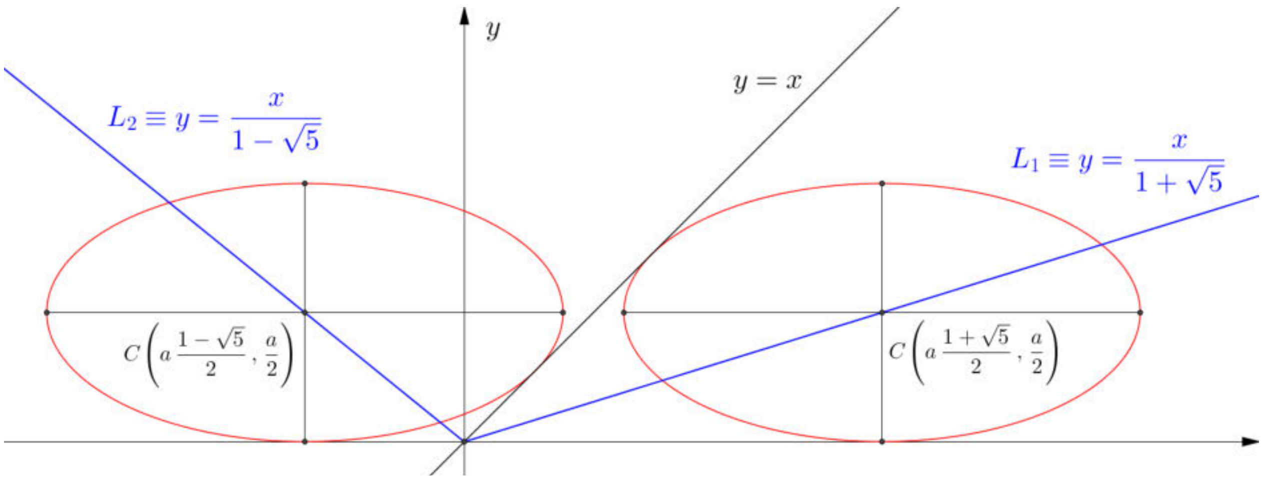
Ce qui donne une équation en λ : $\lambda^2 - a\lambda - a^2 = 0$ dont les solutions sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = a\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = a\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

On en déduit les équations paramètriques du lieu : $\begin{cases} x = a\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

En éliminant a, on obtient les équations du lieu qui est constitué de deux démi-droite issues de l'origine (car $a > 0$):

$$\boxed{L_1 \equiv y = \frac{x}{1+\sqrt{5}} \qquad L_2 \equiv y = \frac{x}{1-\sqrt{5}}}$$



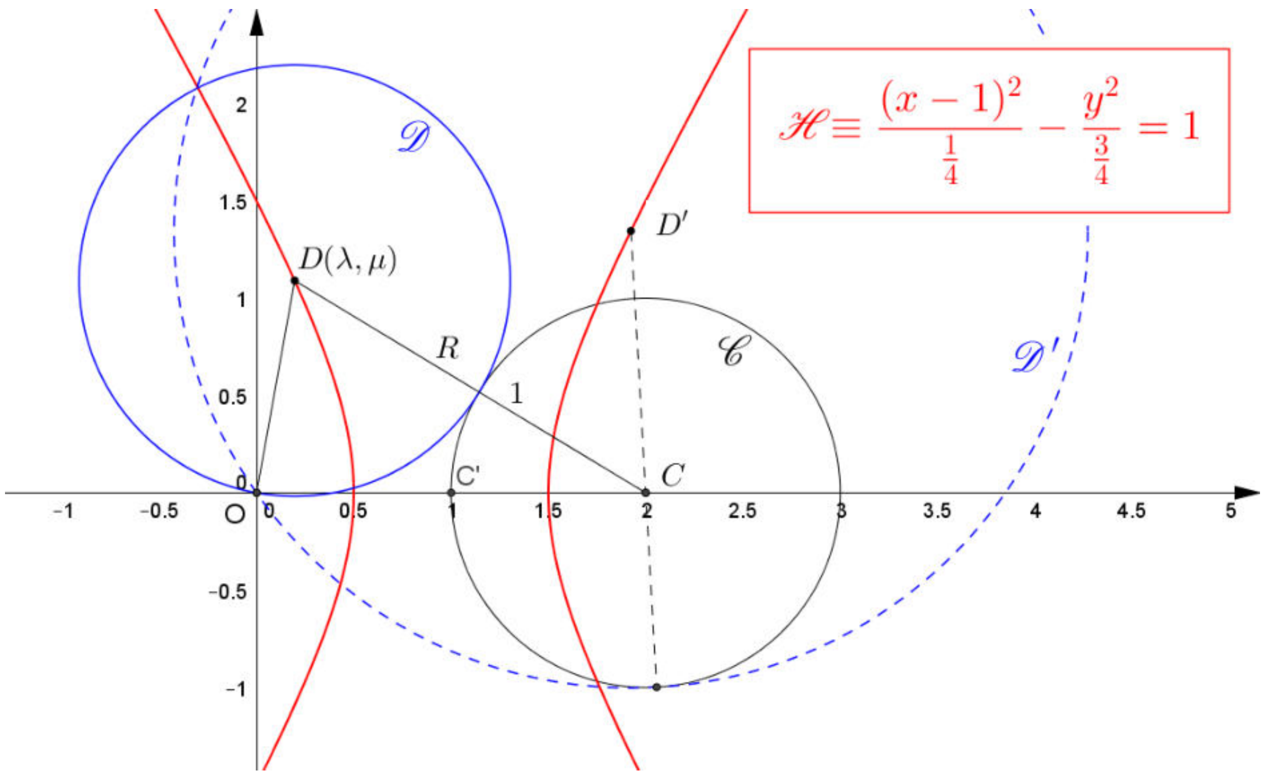
Le 27 mars 2017

EXGAP185 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Le plan est rapporté au système d'axes Oxy.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $C(2,0)$ et de rayon 1. Soit $\mathscr{D}$ un cercle variable tangent extérieurement à $\mathscr{C}$ et passant par O.

Déteminez la nature et une équation du lieu parcouru par le centre D de $\mathscr{D}$.



Soit $D(\lambda;\mu)$ un point du lieu cherché. Soit $\mathscr{D}$ le cercle de centre D. On a :

$$\begin{cases} \mathscr{C} \equiv (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ \overline{DO} = R \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = R^2 \ (2) \text{ car } \mathscr{D} \text{ passe par } (0,0) \\ \overline{DC} = R+1 \Rightarrow (\lambda-2)^2 + \mu^2 = (R+1)^2 \ (3) \text{ car } \mathscr{D} \text{ est tangent extérieurement à } \mathscr{C} \end{cases}$$

On développe la dernière relation (3) :

$$\cancel{\lambda^2} - 4\lambda + 4 + \cancel{\mu^2} = \cancel{R^2} + 2R + 1 \Rightarrow R = \frac{-4\lambda+3}{2}$$

On remplace dans $(2) \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = \left(\frac{-4\lambda+3}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 + 4\mu^2 = 16\lambda^2 - 24\lambda + 9 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{(\lambda-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{\mu^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

Le lieu cherché $\mathscr{H}$ est donc une hyperbole :

$$\boxed{\mathscr{H} \equiv \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1} \quad \text{Centre } C'(1,0), \text{ foyers } O(0,0) \text{ et } C(2,0)$$

La branche de gauche correspond à la condition $(3): \overline{DC} = R+1$ (cercles tangents extérieurement) et la branche de droite à la condition $(3): \overline{DC} = R-1$ (cercles tangents intérieurement).

EXGAP186 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère OXY. Veuillez inscrire votre réponse dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

On considère l'ellipse $\mathscr{E}_s$ d'équation cartésienne $x^2+4y^2=s^2$ (s est un paramètre) et le lieu $\mathscr{H}=\{(x,y)$ tel que $xy=1, x\geq 0, y\geq 0\}$ (c'est une branche d'hyperbole).

(1) Pour quelle valeur de s $\mathscr{E}_s\cap\mathscr{H}$ est-elle un singleton? Quelles sont les coordonnées de cette intersection? Quelle est l'équation cartésienne de la droite tangente à l'ellipse en ce point?

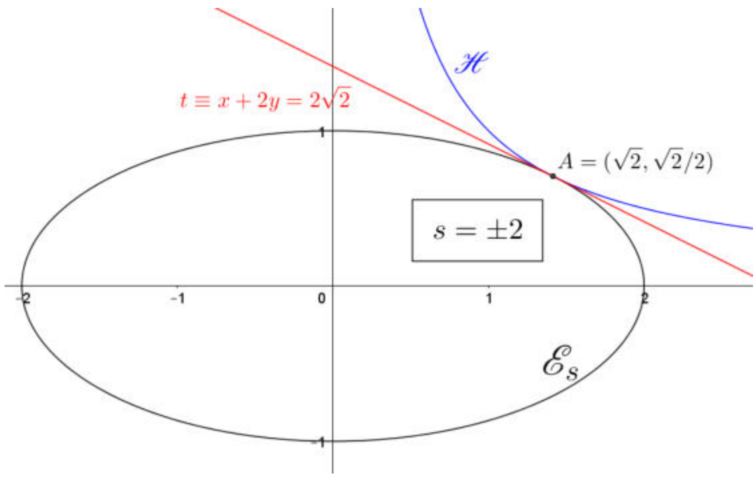
$s=$
$\mathscr{E}_s\cap\mathscr{H}=\{\quad\}$
Droite $\equiv$

(2) Faites un schéma de la situation (1)

(3) Pour quelles valeurs de s plus grande que celle trouvée en (1), l'intersection $\mathscr{E}_s\cap\mathscr{H}$ est une paire. Quelles sont les coordonnées de ces deux points d'intersection (en fonction de s)?

$\mathscr{E}_s\cap\mathscr{H}=\{(\quad,\quad),(\quad,\quad)\}$

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux



$\mathscr{E}_s \equiv x^2 + 4y^2 = s^2 \qquad (E_1)$

$\mathscr{H} \equiv xy = 1, x \geq 0, y \geq 0 \qquad (E_2)$

$(1)\ E_2 : x = \dfrac{1}{y}$ ou $x^2 = \dfrac{1}{y^2}$

$E_1 : \dfrac{1}{y^2} + 4y^2 = s^2 \Rightarrow 4y^4 - s^2y^2 + 1 = 0 \qquad (E_3)$

Il faut un seul point dans $\mathscr{E}_s \cap \mathscr{H} :\Leftrightarrow \rho = 0 \Rightarrow s^4 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{s = \pm 2}$

$E_3 : 4y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(2y^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}$

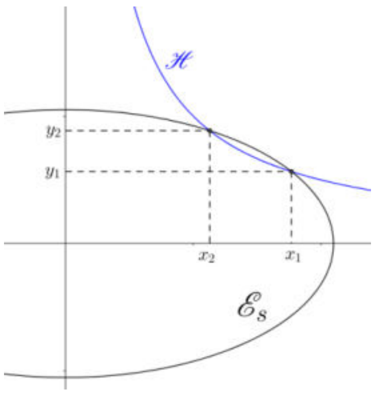
$$\left.\begin{array}{l} y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\mathscr{E}_s \cap \mathscr{H} = \left\{\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$$

$t \equiv \sqrt{2}x + 4\dfrac{\sqrt{2}}{2}y = 4$ (Régle du dédoublement)

$t \equiv 2x + 4y = 4\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{t \equiv x + 2y = 2\sqrt{2}}$

Ou $\mathscr{H} \equiv f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'\left(\sqrt{2}\right) == -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow t \equiv y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(x - \sqrt{2}\right) \Rightarrow t \equiv x + 2y = 2\sqrt{2}$



$(3)\ E_3 : 2$ solutions $\Leftrightarrow \pi=0 \Rightarrow s^4-16>0 \Rightarrow \left(s^2-2\right)\left(s^2+2\right)>0$

$$\begin{array}{c|ccccc} s & & -2 & & 2 & \\ \hline \rho & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow s>2$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2=\dfrac{s^2\pm\sqrt{s^4-16}}{8} \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{s^2\pm\sqrt{s^4-16}}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1=\dfrac{\sqrt{s^2-\sqrt{s^4-16}}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_1=\dfrac{1}{y_1} \\ y_2=\dfrac{\sqrt{s^2+\sqrt{s^4-16}}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_2=\dfrac{1}{y_2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\mathscr{E}_s \cap \mathscr{H} = \left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s^2-\sqrt{s^4-16}}},\frac{\sqrt{s^2-\sqrt{s^4-16}}}{2\sqrt{2}}\right);\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s^2+\sqrt{s^4-16}}},\frac{\sqrt{s^2+\sqrt{s^4-16}}}{2\sqrt{2}}\right)\right\}}$$

Le 10 aout 2017

EXGAP187 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère OXY. Veuillez inscrire votre réponse dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

On considère un hall de sport dont le toit décrit un demi- cercle de rayon 1, depuis l'origine jusqu'au point $(2,0)$ (dans le sens des ordonnées positives bien sûr).

Justine, située à l'origine, lance une balle à sa partenaire Kim, située en $(2,0)$.

La trajectoire de la balle est un arc de parabole reliant ces deux points, culminant à une hauteur h. Cette hauteur est déterminée par la direction vers laquelle Justine envoie sa balle, autrement dit le coefficient angulaire a de la tangente de la trajectoire à l'origine.

(1) Pour quelles valeurs de a la balle parvient-elle à Kim sans avoir touché le plafond ni le sol ? Que vaut h en fonction de a ?

$a \in$
$h =$

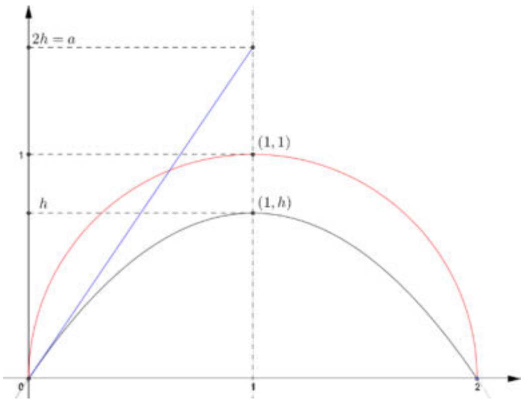
(2) Faites un schéma clair de la situation (1)

(3) On considère maintenant que a peut prendre n'importe quelle valeur.

Si la balle touche le plafond, quel est le point d'impact (en fonction de a) ?

Point d'impact = (,)

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux

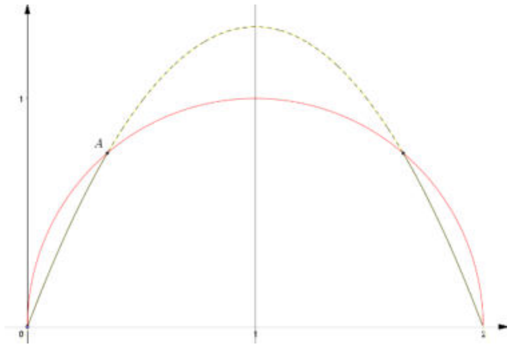


1) La paralole $\mathscr{P}$ a pour équation $y = Kx(x-2)$ et la dérivée est $y' = 2K(x-1)$.

Le sommet est donc en $(1,-K)$ $\Rightarrow -K = h$ or $a = y'(0) = -2K$.

Donc : $a = 2h \Rightarrow \mathscr{P} \equiv y = -\dfrac{a}{2}x(x-2)$.

Pour ne pas toucher le plafond, il faut : $0 < h = \dfrac{a}{2} < 1 \Rightarrow \boxed{a \in]0,2[}$



2) $A\left[\begin{array}{l}\mathscr{P} \equiv y=-\dfrac{a}{2}x(x-2)\\ \mathscr{C} \equiv (x-1)^2+y^2=1\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ On doit résoudre $(x-1)^2+\dfrac{a^2}{4}x^2(x-2)^2=1$

$\Rightarrow .... \Rightarrow x(x-2)\left[4+a^2x(x-2)\right]=0$

Or $x \neq 0$ et $\neq 2 \Rightarrow a^2x^2-2a^2x+4=0 \Rightarrow x=1\pm\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$

$x_A=1-\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$; $\quad (x_A-1)^2+y_A^2=1 \Rightarrow \dfrac{a^2-4}{a^2}+y_A^2=1 \Rightarrow y_A^2=\dfrac{4}{a^2}$

Finalement : $\boxed{A=\left(1-\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a},\dfrac{2}{a}\right)}$

EXGAP188 – EPB, ULB, Bruxelles juillet 2017.

Dans le plan euclidien rapporté au système d'axes orthonormés Oxy, on considère un point variable P sur le cercle de centre C(2,0) et de rayon unité. Déterminez la nature et une équation cartésienne du lieu parcouru par le point Q si le triangle OPQ est isocèle et rectangle en O.

Justifiez votre réponse.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Les coordonnées du point P vérifient l'équation cartésienne :

$$(x_P - 2)^2 + y_P{}^2 = 1$$

A chaque point $P(x_P, y_P)$ correspondent deux points Q_1 et Q_2, selon que l'angle en O est de +90° ou de -90°. Leurs coordonnées sont :

$$Q_1 \begin{cases} x_{Q_1} = -y_P \\ y_{Q_1} = +x_P \end{cases} \qquad Q_2 \begin{cases} x_{Q_2} = +y_P \\ y_{Q_2} = -x_P \end{cases}$$

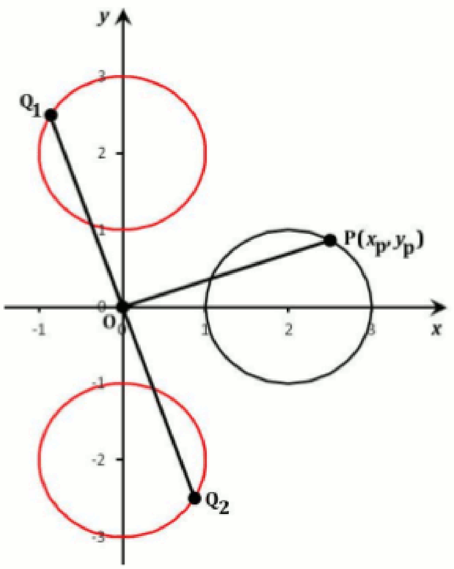
On a donc que :

$$\left(x_{Q_1}\right)^2 + \left(y_{Q_1} - 2\right)^2 = y_P{}^2 + (x_P - 2)^2 = 1$$

$$\left(x_{Q_2}\right)^2 + \left(y_{Q_2} + 2\right)^2 = y_P{}^2 + (x_P - 2)^2 = 1$$

Q_1 décrit donc le cercle de centre (0,2) et de rayon unité, tandis que Q_2 décrit le cercle de centre $(0, -2)$ et de rayon unité.

Le lieu recherché est l'union des deux cercles de rayon unité et de centres respectifs (0,2) et $(0, -2)$.



Le 7 septembre 2016.

EXGAP189 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

On se place dans le plan de l'écliptique, qui contient le Soleil et ses planètes. Une comète décrit dans ce plan une ellipse dont un foyer est le Soleil, qui est identifié au point de coordonnées $(0,0)$. Le demi-grand axe, parallèle à l'axe des abscisses Ox est 13, le demi-petit axe est 5.

(1) Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire de la comète?

Trajectoire de la comète $=$

(2) Quelles sont les coordonnées du périhélie (point de l'orbite le plus proche du Soleil)? De l'aphèlie (point le plus éloigné)?

Périhélie $=$
Aphèlie $=$

(3) La Terre décrit une trajectoire circulaire de rayon 13 centrée sur le Soleil. L'orbite de la comète intersecte celle de la planète en deux points. Quelles sont les coordonnées de ces points d'intersection?

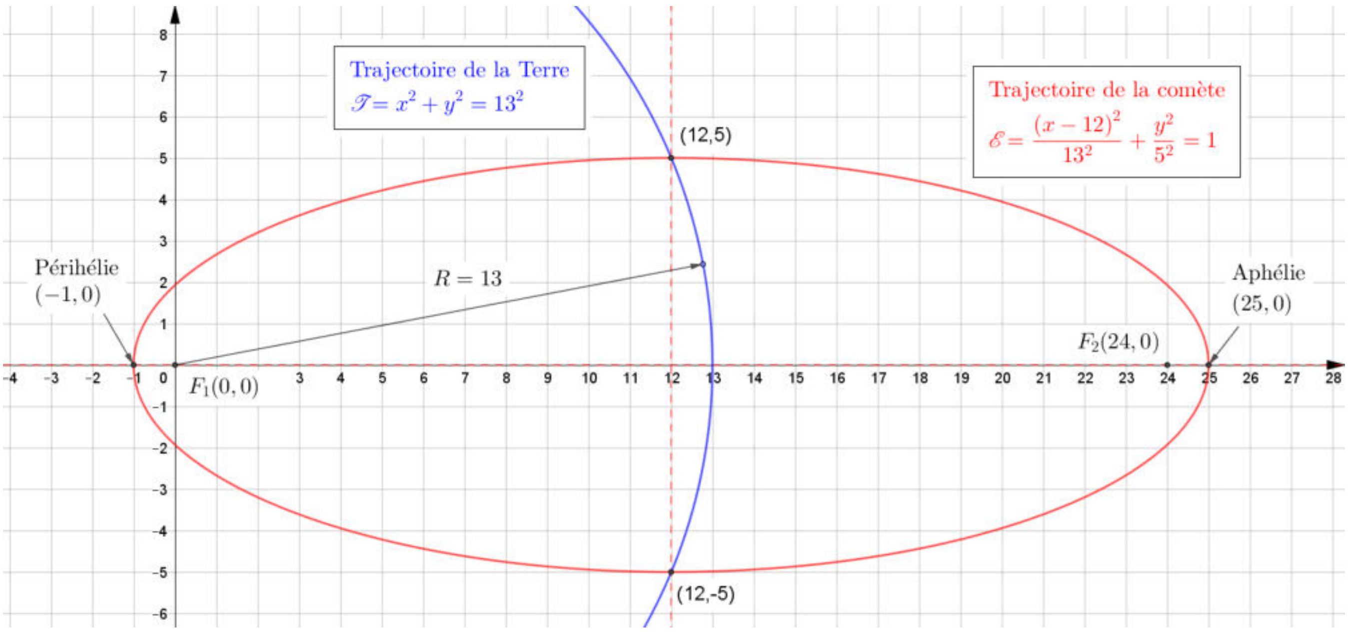
Intersection $=$

(4) faites un schéma de la situation avec le Soleil, l'orbite de la comète , celle de la Terre.

A toutes fins utiles on rappelle que $12^2 = 144$ et $13^2 = 169 = 144 + 25$.

Veuillez inscrire cotre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/ calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

Solution proposée par Louis François



La distance focale est donnée par : $c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Soleil $F_1(0,0)$, Centre de l'ellipse $(12,0)$, Deuxième foyer : $F_2(24,0)$

L'équation de l'ellipse est alors : $\mathscr{E} = \dfrac{(x-12)^2}{13^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

La trajectoire de la Terre est un cercle de centre $(0,0)$: $\mathscr{T} = x^2 + y^2 = 13^2$

On constate aussi que le rayon de la Terre est $13^2 = 12^2 + 5^2$.

Les trajectoires de la comète et de la Terre se coupent donc aux sommets situés sur le petit axe.

La figure permet alors de répondre facilement et sans calcul aux questions posées.

Périhélie $= (-1,0)$

Aphélie $= (25,0)$

Intersections $\mathscr{E} \cap \mathscr{T} : \{(12,5),(12,-5)\}$

Le 20 octobre 2016.