Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 19

EXGAP190 – EXGAP199

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Octobre 2017

EXGAP190 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Soit la parabole de sommet $S(0,-2)$ et de foyer $F(0,-1)$.

1) Exprimer l'équation de la parabole.

2) Calculer la valeur de l'angle α entre les deux tangentes à la parabole passant par le point A de coordonnées $(-5,0)$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

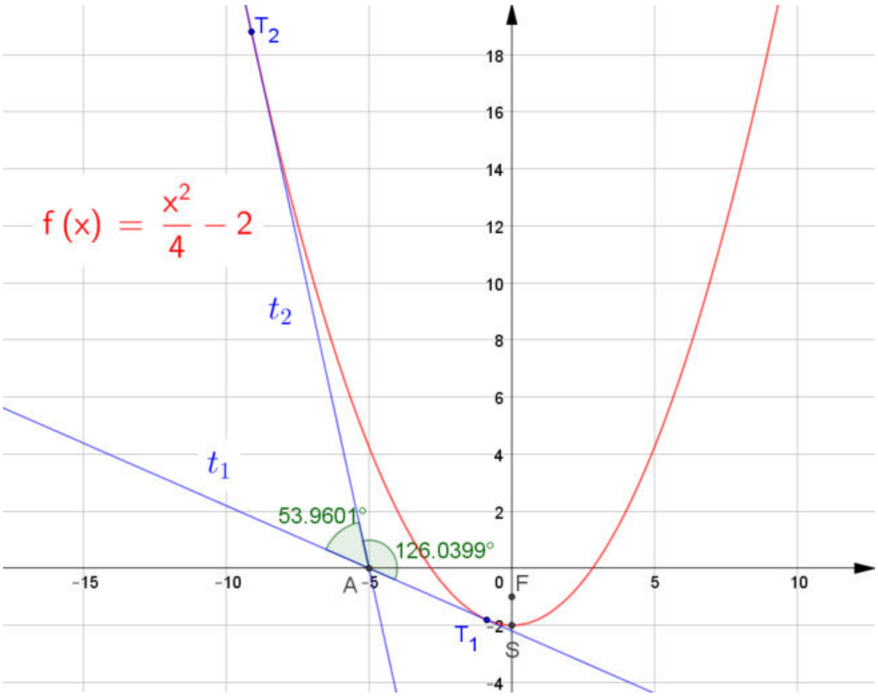


Figure 1

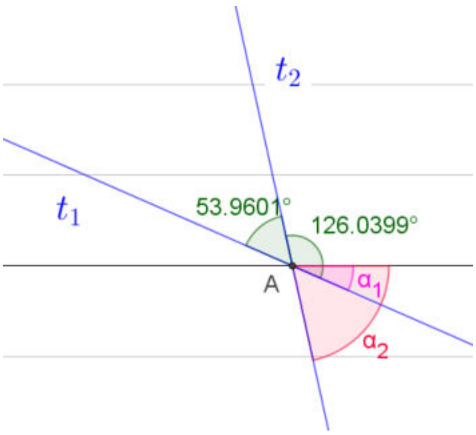


Figure 2

1) L'équation réduite d'une parabole d'axe Oy et de sommet $(0,0)$ est $y=\dfrac{x^2}{2p}$ où p est le double de la distance entre le foyer et le sommet. ici $p=2\Rightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$. Il reste à faire une translation vers le bas de 2, ce qui donne l'équation de la parabole : $\mathscr{P}\equiv y=\dfrac{1}{4}x^2-2.$

2) Si $T(a,b)$ est un point de tangence alors l'équation de la tangente est

$t\equiv y-b=y'(a)(x-a)\Rightarrow y-b=\dfrac{1}{2}a(x-a)$

Pour déterminer a et b, il suffit d'exprimer que $T\in\mathscr{P}$ et que $A\in t$

$$\begin{cases} T\in\mathscr{P}\Rightarrow b=\dfrac{1}{4}a^2-2 \\ A\in t\Rightarrow 0-b=\dfrac{1}{2}a(-5-a)\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{4}a^2-2=\frac{1}{2}a(5+a)\Rightarrow a^2+10a+8=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=-5-\sqrt{17}\simeq-9.1231\Rightarrow b=\dfrac{17+5\sqrt{17}}{2}\simeq 18.8077 \\ a=-5+\sqrt{17}\simeq-0.8769\Rightarrow b=\dfrac{17-5\sqrt{17}}{2}\simeq-1.8078\end{cases}$$

- $\left(-5+\sqrt{17},\dfrac{17-5\sqrt{17}}{2}\right)$ détermine la tangente t_1 de pente $m_1=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\simeq-0.4384$ et d'équation $t_1\equiv-0.4384x-2.1922$
- $\left(-5-\sqrt{17},\dfrac{17+5\sqrt{17}}{2}\right)$ détermine la tangente t_2 de pente $m_2=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}\simeq-4.5616$ et d'équation $t_2\equiv-4.5616x-22.8078$

Pour déterminer l'angle entre les deux tangentes, on peut appliquer trois méthodes.

Méthode 1

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}-\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}}{1+\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\times\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{17}}{3}\Rightarrow\alpha=53.9601^\circ \text{ ou } 126.0399^\circ$$

si on considère l'angle aigu.

Méthode 2

On utilise les pentes ce qui détermine des angles qu'il faut combiner de façon judicieuse (voir figure 2)

$$\begin{cases} m_1=-0.4384\Rightarrow\alpha_1=-23.6749^\circ \\ m_2=-4.5616\Rightarrow\alpha_2=-77.6350^\circ\end{cases}\Rightarrow\alpha=\alpha_1-\alpha_2=-23.6749^\circ+77.6350^\circ=53.9601^\circ$$

Méthode 3

On calcule l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{(1,m_1)}$ et $\overrightarrow{(1,m_2)}$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{(1,m_1)}\bullet\overrightarrow{(1,m_2)}}{\left\|\overrightarrow{(1,m_1)}\right\|\times\left\|\overrightarrow{(1,m_2)}\right\|}=\frac{1+(-0.4384)\times(-4.5616)}{\sqrt{1+0.4384^2}\times\sqrt{1+4.5616}}=0.5883\Rightarrow\alpha=53.9601^\circ$$

EXGAP191 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017

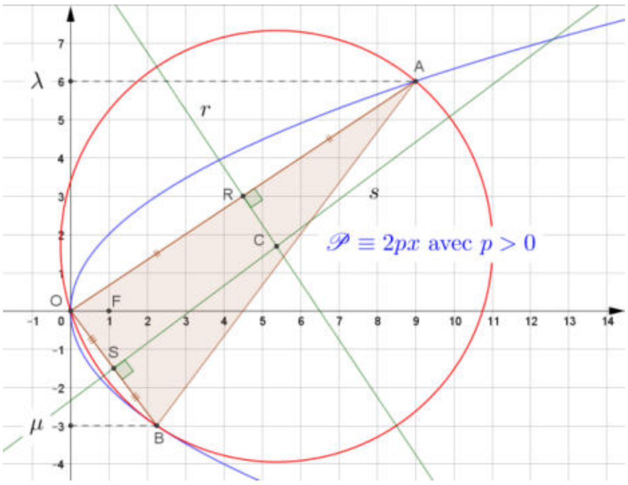
Dans le plan euclidien rapporté au système d'axes orthonormés Oxy, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$, et des points variables A et B de cette parabole, tels que l'ordonnée de A est $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et celle de B est $\mu \in \mathbb{R}^-$.

(a) Déterminez, en fonction des paramètres λ et μ, les coordonnées du centre C du cercle circonscrit au triangle OAB.

(b) Déterminez la relation que doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB passe par le foyer F de $\mathscr{P}$.

(c) En utilisant $\alpha = \lambda + \mu$ comme paramètre, établissez des équations paramétriques du lieu parcouru par C lorsque A et B se déplacent sur $\mathscr{P}$ de sorte que la droite AB passe par F.

(d) Donnez une équation cartésienne de la nature de ce lieu.



(a) En fonction de λ et μ, les coordonnées de A et B ainsi que de $R,$ milieu de $OA,$ et $S,$ milieu de OB sont :

$$A\left(\frac{\lambda^2}{2p},\lambda\right) \quad B\left(\frac{\mu^2}{2p},\mu\right) \quad R\left(\frac{\lambda^2}{4p},\frac{\lambda}{2}\right) \quad S\left(\frac{\mu^2}{4p},\frac{\mu}{2}\right)$$

La pente de OA et de sa médiatrice r sont : $m_{OA}=\dfrac{\lambda}{\frac{\lambda^2}{2p}}=\dfrac{2p}{\lambda}\Rightarrow m_r=-\dfrac{\lambda}{2p}$

L'équation de la médiatrice est alors : $r\equiv y-\dfrac{\lambda}{2}=-\dfrac{\lambda}{2p}\left(x-\dfrac{\lambda^2}{4p}\right)$

$$\Rightarrow r\equiv y=-\frac{\lambda}{2p}x+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{8p^2} \qquad (1)$$

Par analogie, on déduit que la médiatrice s de OB est :

$$\Rightarrow s\equiv y=-\frac{\mu}{2p}x+\frac{\mu}{2}+\frac{\mu^3}{8p^2} \qquad (2)$$

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit est donné par l'intersection de r et s :

$$-\frac{\mu}{2p}x+\frac{\mu}{2}+\frac{\mu^3}{8p^2}=-\frac{\lambda}{2p}x+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{8p^2}\Rightarrow\frac{\lambda-\mu}{2p}x=\frac{\lambda-\mu}{2}+\frac{\lambda^3-\mu^3}{8p^2}$$

Sachant que $\lambda^3-\mu^3=(\lambda-\mu)(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2),$ on peut simplifier en divisant par $\dfrac{\lambda-\mu}{2p}$

$$\Rightarrow x=p+\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p} \qquad (3)$$

On injecte (1) dans l'équation de $\mathscr{P}$ pour obtenir l'ordonnée de C :

$$y=-\frac{\lambda}{2p}\left(p+\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p}\right)+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{8p}=\frac{\lambda}{2}\left(-1-\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p^2}+1+\frac{\lambda^2}{4p^2}\right)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\lambda\mu}{8p^2}(\lambda+\mu) \qquad (4)$$

Conclusion : $\boxed{C=\left(p+\dfrac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p};-\dfrac{\lambda\mu}{8p^2}(\lambda+\mu)\right)}$

(b) Déterminons l'équation de AB : $m_{AB} = \dfrac{\lambda - \mu}{\dfrac{\lambda^2}{2p} - \dfrac{\mu^2}{2p}} = \dfrac{2p}{\lambda + \mu} \Rightarrow AB \equiv y - \lambda = \dfrac{2p}{\lambda + \mu}\left(x - \dfrac{\lambda^2}{2p}\right)$

Le foyer $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ doit satisfaire cette équation :

$$-\lambda = \frac{2p}{\lambda + \mu}\left(\frac{p}{2} - \frac{\lambda^2}{2p}\right) \Rightarrow -\lambda(\lambda + \mu) = p^2 - \lambda^2 \Rightarrow \boxed{-\lambda\mu = p^2}$$

(c) Le lieu de C est déterminé par le système suivant : $\begin{cases} x = p + \dfrac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{4p} \\ y = -\dfrac{\lambda\mu}{8p^2}(\lambda + \mu) \\ -\lambda\mu = p^2 \end{cases}$

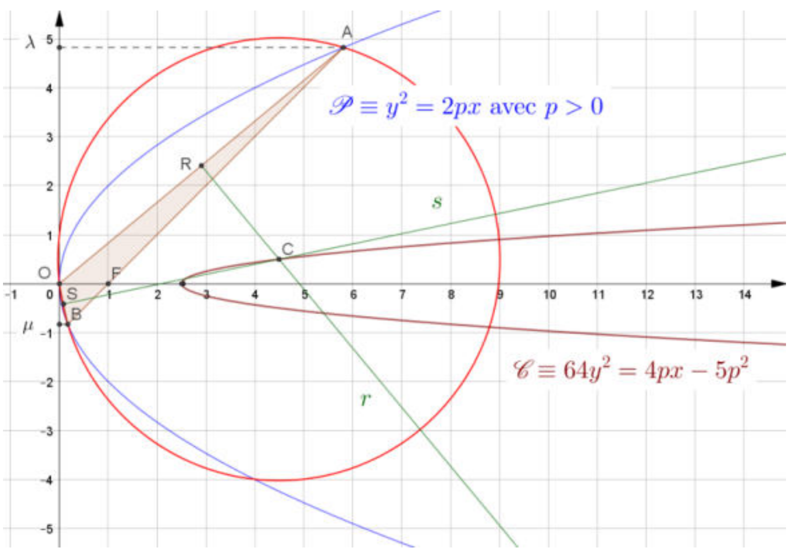
Remarquons que : $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - \lambda\mu = (\lambda + \mu)^2 - \lambda\mu = \alpha^2 + p^2$

Les équations paramètriques du lieu de C sont alors : $\boxed{\begin{cases} x = p + \dfrac{\alpha^2 + p^2}{4p} \\ y = \dfrac{\alpha}{8} \end{cases}}$

(d) Pour obtenir l'équation cartésienne du lieu, il suffit d'éliminer α :

$$x = p + \frac{64y^2 + p^2}{4p} \Rightarrow \boxed{\mathscr{C} \equiv 64y^2 = 4px + 5p^2}$$

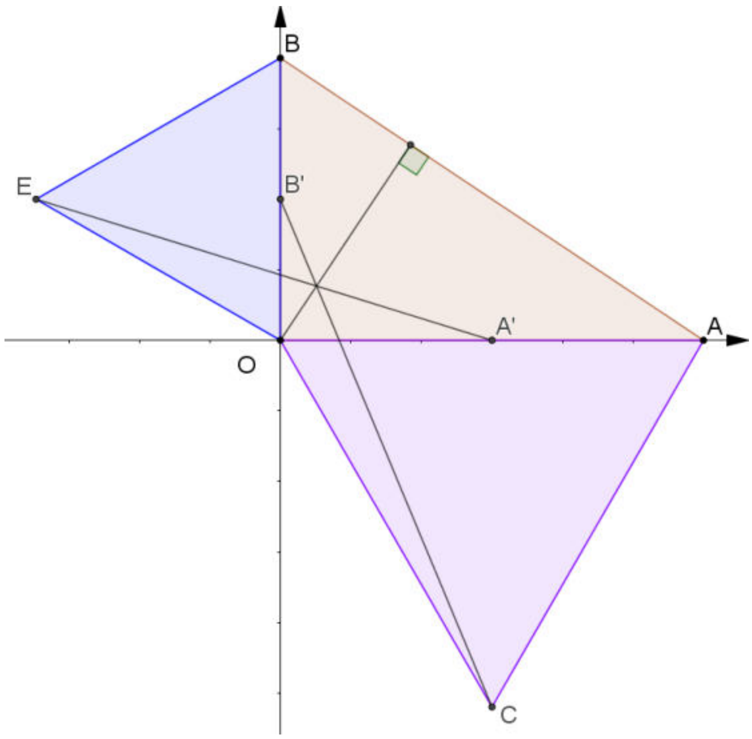
C'est une parabole d'axe horizontal Ox et de sommet $\left(\dfrac{5p}{4}, 0\right)$



EXGAP192 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2017.

Sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$, d'un triangle rectangle en O, à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux OAC et OBE. Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement A' et B'.
Démontrer que la hauteur du triangle OAB issue de O et les droites $A'E$ et $B'C$ sont concourantes.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Choisissons un repère orthonormé de la manière suivante: O en est l'origine, la droite orientée OA est l'axe des abscisses et la droite orientée OB est l'axe des ordonnées. Dans ces conditions, les coordonnées des points A, B, A', B' sont les suivantes

$$A(a,0), \quad B(0,b), \quad A'(a/2,0), \quad B'(0,b/2),$$

avec $a > 0$ et $b > 0$.

Cela étant, recherchons les coordonnées du point C et du point E. Puisque le triangle OAC est équilatéral, l'abscisse de C est égale à $a/2$ et son ordonnée y_C vérifie

$$y_C^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

ce qui implique

$$y_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

puisque le triangle OAC a été construit à l'extérieur. De même, puisque le triangle OBE est équilatéral, l'ordonnée de E est égale à $b/2$ et son abscisse x_E vérifie

$$x_C^2 + \frac{b^2}{4} = b^2$$

ce qui implique

$$x_E = -\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

puisque le triangle OBE a été construit à l'extérieur.

On obtient ainsi directement les équations cartésiennes de la hauteur h du triangle OAB issue de O et des droites $A'E$ et $B'C$:

$$\begin{aligned} h &: \quad ax - by = 0, \\ A'E &: \quad x + \left(\sqrt{3} + \frac{a}{b}\right) y = \frac{a}{2}, \\ B'C &: \quad \left(\sqrt{3} + \frac{b}{a}\right) x + y = \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Ces droites sont concourantes si et seulement si le système suivant est compatible

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ x + \left(\sqrt{3} + \frac{a}{b}\right) y = \frac{a}{2} \\ \left(\sqrt{3} + \frac{b}{a}\right) x + y = \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Et cela a lieu si et seulement si le déterminant

$$D = det\begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -1 & 0 \\ \sqrt{3}+\frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{2} \\ 1 & \sqrt{3}+\frac{a}{b} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

est nul. En calculant celui-ci à partir de la première ligne, on obtient

$$\begin{array}{rcl} D & = & \frac{a}{b}\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\,(\sqrt{3}+\frac{a}{b})\right)+\left(\frac{a}{2}\,(\sqrt{3}+\frac{b}{a})-\frac{b}{2}\right) \\ & = & \frac{a^2}{2b}-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{a^2}{2b}+\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2}-\frac{b}{2} \\ & = & 0. \end{array}$$

(Une autre façon de montrer que ce système est compatible aurait été de calculer l'intersection de deux des droites, et de vérifier ensuite que les coordonnées obtenues satisfont l'équation de la troisième.)

Le 20 juin 2018

EXGAP193 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

Le plan est muni d'un système d'axes orthonormés Oxy.

Soit Γ_1 le cercle de centre $C_1(1,0)$ et de rayon 2, et soit Γ_2 le cercle de centre $C_2(-1,0)$ et de rayon 1. Soit $P(x,y)$ un point variable du pln.

a) Exprimez la distance $d(P,C_1)$ entre les points P et C_1 en fonction de x et y.

b) De là, exprimer la distance $d(P,\Gamma_1)$ entre le point P et le cercle Γ_1 en fonction de x et y pour chacun des cas suivants :

1) le point P intérieur au cercle Γ_1.

2) le point P est extérieur au cercle Γ_1.

Note : la distance entre un point et un cercle est définie comme la distance minimale entre ce point et un point du cercle.

c) Mêmes quastions pour le cercle Γ_2.

d) Déduisez-en une équation cartésienne et la nature du lieu des points équidistants des cercles Γ_1 et Γ_2 (si le lieu est constitué de plusieurs parties, donner l'équation et préciser la nature de chaque partie).

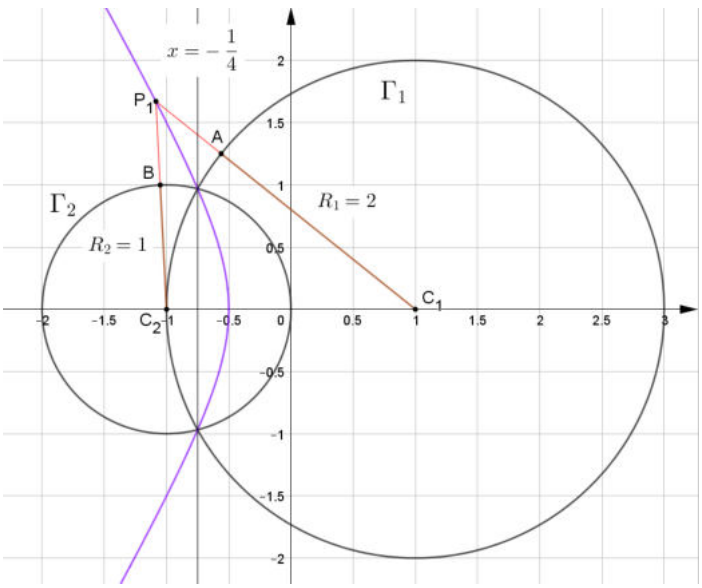


Figure 1

a) Distances du point P aux centres :

$$d(PC_1) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \qquad d(PC_2) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

b) Distances du pont P aux cercles :

Il faut tenir compte de la position du point P selon qu'il est intérieur ou extérieur aux cercles.

	$d(PC_2)$	$d(PC_1)$
P intérieur	$1-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$	$2-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$
P extérieur	$\sqrt{(x+1)^2+y^2}-1$	$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-2$

e) Détermination des lieux

1) P est extérieur aux deux cercles : P_1 (Figure 1)

Ce qui implique $\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+y^2} > 1\\ \sqrt{(x-1)^2+y^2} > 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^2+y^2 > 1\\ (x-1)^2+y^2 > 4\end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^2 - (x-1)^2 > 3 \Rightarrow x < -\frac{3}{4}$$

On doit donc avoir : $d(PC_1) = d(PC_2)$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} - 1 = \sqrt{(x-1)^2+y^2} - 2 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} + 1 = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ (1)

$\Rightarrow (x+1)^2 + \cancel{y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} + 1 = (x-1)^2 + \cancel{y^2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} = (x-1)^2 - (x+1)^2 - 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} = (x-1+x+1)(x-1-x-1) - 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} = -4x - 1$ Comme $x < -\frac{3}{4}$, le second membre est bien positif.

$\Rightarrow 4x^2 \cancel{+8x} + 4 + 4y^2 = 16x^3 \cancel{+8x} + 1 \Rightarrow \boxed{12x^2 - 4y^2 = 3}$.

2) P intérieur à Γ_1 et extérieur à Γ_2 : P_2

On procède de la même façon : $2-\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} - 1$ (2)

Après transformation, on arrive à : $\boxed{20x^2 + 36y^2 = 45}$

3) P extérieur à Γ_1 et intérieur à Γ_2 : P_3

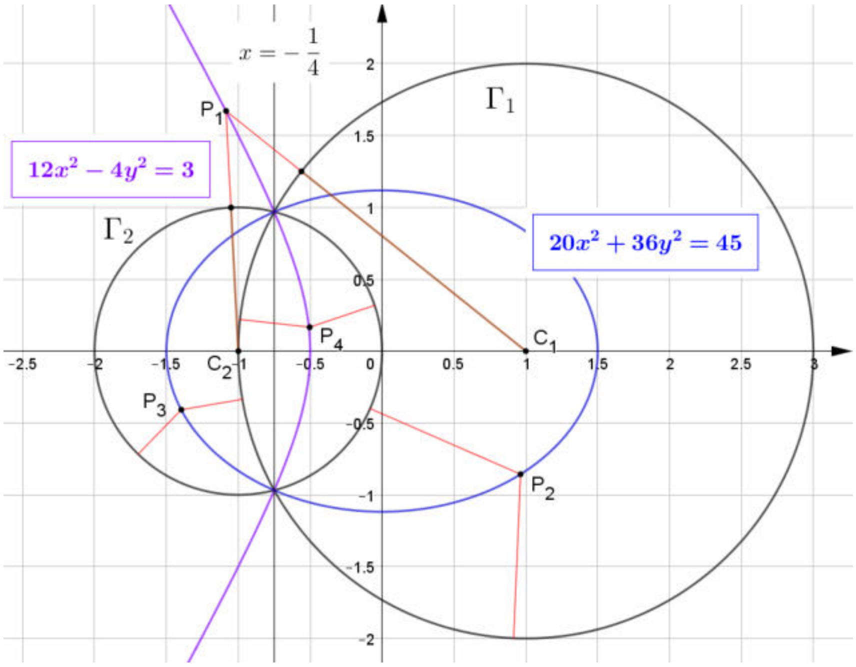
$\sqrt{(x-1)^2+y^2} - 2 = 1 - \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

C'est la même équation que $(2) \Rightarrow \boxed{20x^2 + 36y^2 = 45}$.

4) P intérieur aux deux cercles : P_4

$1-\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 2-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

C'est la même équation que $(1) \Rightarrow \boxed{12x^2 - 4y^2 = 3}$.



Résumé

P intérieur ou extérieur aux deux cercles	$12x^2 - 4y^2 = 3$ ou $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} - \dfrac{y^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ avec $x < 0$	Une branche d'hyperbole centrée en $(0,0)$
P intérieur à un cercle et extérieur à l'autre	$20x^2 + 36y^2 = 45$ ou $\dfrac{x^2}{\frac{3}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$	Une ellipse ccntrée en $(0,0)$

Le 26 septembre 2018

EXGAP194 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

On considère dans le plan le cercle C, de centre $Q=(-1,0)$ et de rayon 4.
On regarde aussi le point P de coordonnées $(1,0)$. On choisit à présent un point quelconque du cercle C, de coordonnées (x_0,y_0).

(1) Décrivez par une équation cartésienne la droite d qui relie Q au point $(x_0 y_0)$.
Décrivez par une équation cartésienne la droite e qui relie le point P au point (x_0,y_0).

$d\equiv$ $e\equiv$

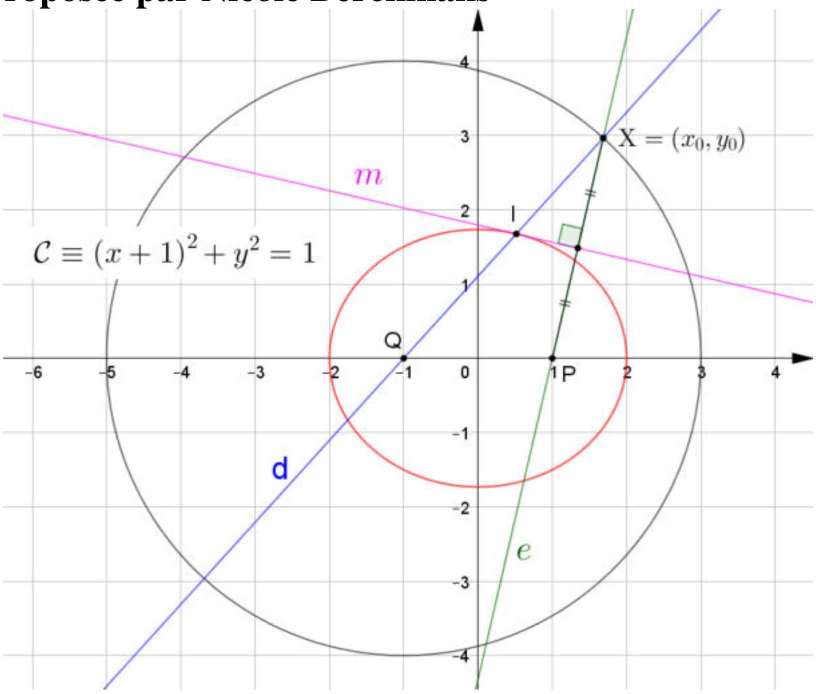
(2) Décrivez par une équation cartésienne la médiatrice m du segment qui relie le point P au point (x_0,y_0).

$m\equiv$

(3) On appelle I le point d'intersection entre m et d. On peut voir que la somme des longueurs $\overline{IP}$ et $\overline{IQ}$ est 4, quel que soit le choix de (x_0,y_0) sur le cercle – ce fait est admis, vous ne devez pas le démontrer. On appelle E le lieu du point I quand (x_0,y_0) parcourt la cercle. De quel type de lieu s'agit-il (cercle, hyperbole, segment, etc.)? Quelle est l'équation cartésienne de E ?

E est $E\equiv$

Solution proposée par Nicole Berckmans



$d \equiv = QX \equiv y = \frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$

$e \equiv PX \equiv y = \frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$

$m \equiv y - \frac{y_0}{2} = \frac{1-x_0}{y_0}\left(x - \frac{x_0+1}{2}\right)$

$\overline{IP} + \overline{IQ} = 4$ En effet, le point I apartenant à la médiatrice du segment PX, on peut affirmer que $\overline{IP} = \overline{IX}$. De plus $\overline{IX} + \overline{IQ} = 4$.

Le point I parcourt une ellipse de foyers P et Q, $a = 2$, centre$(0,0)$, $2c = 2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow E \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

Le 14 10 octobre 18

EXGAP195 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère OXY. Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet, et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances matéhmatiques. Conseil : n'hésitez pas à commencer par le croquis.

Pour toute valeur strictement positive du paramètre réel a, on considère l'ellipse E_a d'équation cartésienne $x^2 + ay^2 = 1$ et l'ellipse F_a d'équation cartésienne $ax^2 + y^2 = 1$

(1) Pour quelles valeurs de $a > 0$ l'intersection $E_a \cap F_a$ est-elle un ensemble fini de points? Pour chacune de ces valeurs, on appelle P_a le point $E_a \cap F_a$ qui est de coordonnées positives (donc, situé dans le premier quadrant positif). Quelles sont les coordonnées de P_a, exprimées en fonction de a?

$a \in$
$P_a =$

(2) On regarde le lieu L de P_a pour toutes les valeurs de $a > 2$. de quelle type de figure s'agit-il (par exemple ellipse, arc de cercle, droite, branche d'hyperbole,...)? Donnez une description cartésienne de L. (C'est-à-dire exprimant des contraintes sur les coordonnées x et y, sans que le paramètre a apparaisse; ces contraintes peuvent prendre la forme d''équations ou d'intervalle de valeurs; par exemple $\{(x, y) \mid y = 1, x \in [-1,1]\}$ est la description cartésienne d'un segment de droites)

L est
$L = \{(x, y) \mid \qquad \}$

(3) Représenter E_2, F_2, P_2 et L sur un croquis.

Solution proposée par Marc Decoux

Il est à remarquer que $x=0,\ y=0,\ y=\pm x$ sont des axes de symétries de la figure dormée par E_a et F_a.

E_a coupe OX en $(\pm 1,0)$ et OY en $\left(0,\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

F_a coupe OX en $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}},0\right)$ et OY en $(0,\pm 1)$

On a $\begin{cases} x^2+ay^2=1 & (1) \\ ax^2+y^2=1 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1)-(2):(1-a)\left(x^2-y^2\right)=0$

Si $a=1$: deux cercles égaux $x^2+y^2=1$. Tous les points sont solutions.

Si $a\neq 1:(x-y)(x+y)=0$

$x+y=0$ est à exclure puisque $x,y\geq 0$

reste $x-y=0\Rightarrow x=y$. On remplace dans $(1)\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$

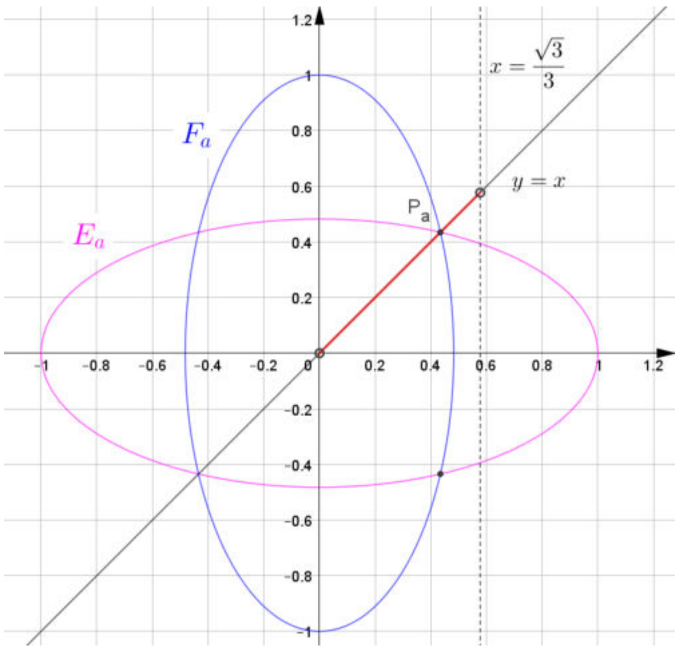
Enfin, si $a>2\Rightarrow a+1>3:\sqrt{a+1}>\sqrt{3}\Rightarrow 0<\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Conclusion

$a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\};\ P_a=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}};\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}\right)$

L est un segment ouvert de la première bissectrice des axes.

$L=\left\{(x,y)\mid x=y, 0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$



Le 21 octobre 2018

EXGAP196 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère OXY . Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

Conseil : n'hésitez pas à commencer par le croquis.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ centré en l'origine, et de rayon 1. Pour tout point P du cercle, de coordonnées $(x_P; y_P)$, on considère la droite d_P qui relie P au point de coordonnées $(1;\ 0)$. Si $P=(1;0)$ alors on prend pour d_P la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en ce point.

(1) Quelle est l'équation cartésienne de d_P ? Soit Q_P la projection orthogonale de l'origine sur la droite d_P (dit autrement, Q_P est le point de d_P le plus proche de l'origine). Exprimez les coordonnées de Q_P en fonction de x_P et y_P.

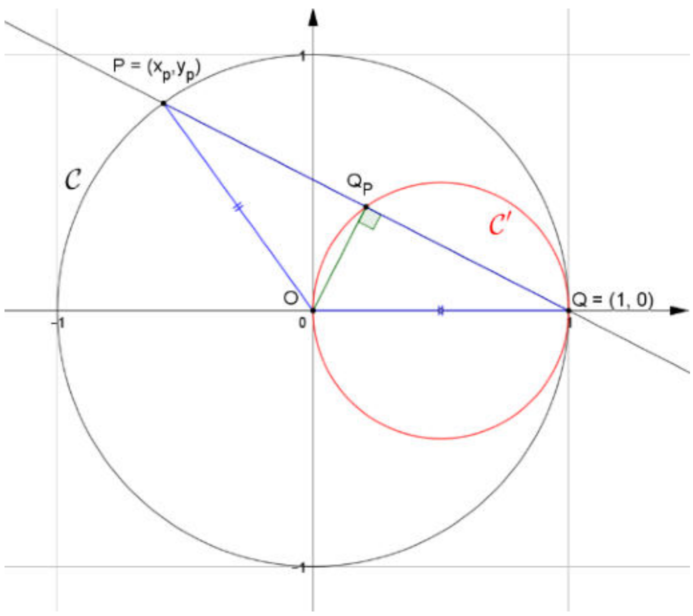
$d_P \equiv$
$QP = (\quad ; \quad)$

(2) On regarde le lieu L du pointQ_P, obtenu en faisant varier P sur tout le cercle $\mathcal{C}$. De quelle type de figure s'agit-il (par exemple segment de droite, cercle, ellipse, . . .) ? Quelle est son équation cartésienne?

L est
$L =$

(3) Faites un croquis où vous représentez $\mathcal{C}$, $P=(0;\ 1)$, QP et L.

Solution proposée par Louis François.



(1) Le triangle isocèle OPQ est isocèle. OQ_P est hauteur, médiatrice et médiane. Q_P est donc

le milieu de $[P,Q] \Rightarrow \boxed{Q_P = \left(\dfrac{x_P+1}{2}, \dfrac{y_P}{2}\right)}$

La pente de $d_P = \dfrac{y_P}{x_P - 1}$

On en déduit que $\boxed{d_P \equiv y = \dfrac{y_P}{x_P - 1}(x-1)}$ ou $\boxed{y_P x - (1 - x_P)\, y = y_P}$

$$(2)\ L \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1+x_P}{2} \\ y = \dfrac{y_P}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \\ y_P = 2y \end{cases} \quad \text{Or } x_P^2 + y_P^2 = 1$$

$$\Rightarrow L \equiv 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{L \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}}$$

<u>Méthode alternative I</u>

O et Q sont fixes et $\widehat{OQ_PP} = 90°$ Le lieu L est donc un cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre OP.

<u>Méthode alternative II</u>

$\overrightarrow{QQ_P} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QP}$. Le lieu L est un cercle $\mathcal{C}'$ homothétique de $\mathcal{C}$ donc de rayon 1/2

et de diamètre OP.

Le 24 octobre 2018

EXGAP197 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 1.

Donnez l'équation et la description du lieu demandé.

1) Dans le plan Oxy, le lieu des points dont la distance à $(-2,0)$ est le double de celle à $(1,0)$.

2) Dans le plan Oxy, le lieu des points dont la distance à la droite $y=-1$ est la moitié de la distance au point $(0,2)$.

3) Dans l'espace muni du repère $Oxyz$, le lieu des points dont la distance au plan $x=0$ est le double de la distance au plan $z=y$

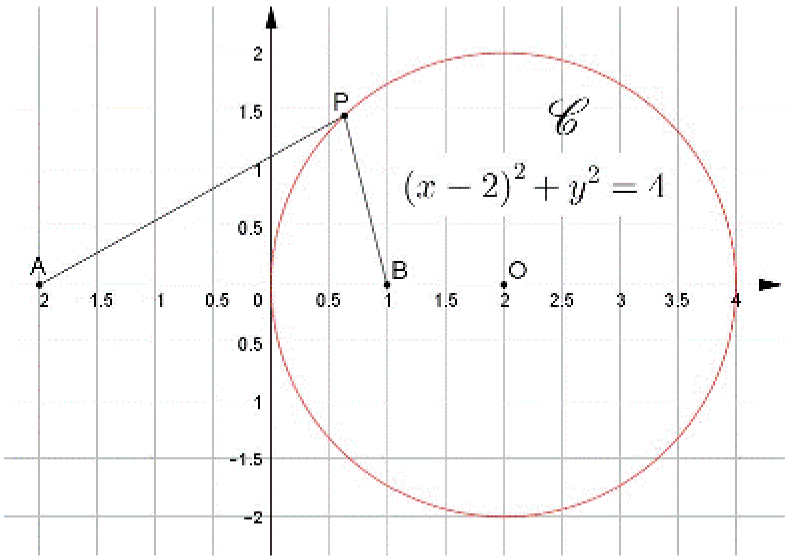
Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow (x+2)^2+y^2=4\left((x-1)^2+y^2\right)$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-4x^2+8x-4-4y^2=0$

$\Rightarrow -3x^2-3y^2+4x=0 \Rightarrow \boxed{(x-2)^2+y^2=4}$

Cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 2.

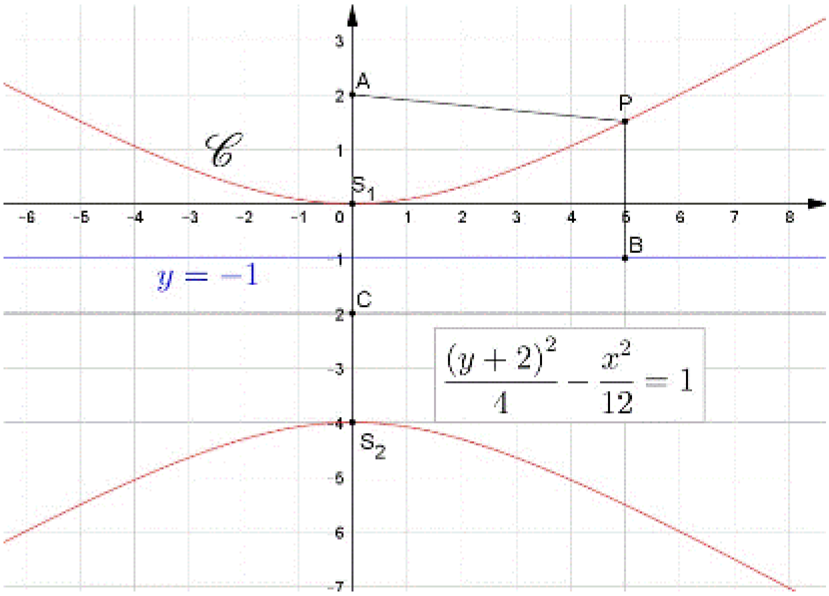


2) $|y+1|=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-2)^2} \Rightarrow 4\left(y^2+2y+1\right)=x^2+y^2-4y+4$

$\Rightarrow 4y^2+8y+4-x^2-y^2+4y-4=0 \Rightarrow x^2-3y^2-12y=0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1}$

Hyperbole centre $(0,-2)$, d'axe de symétrie $y=-2$ et $x=0$,
et de sommets $(0,0)$ et $(0,-4)$.

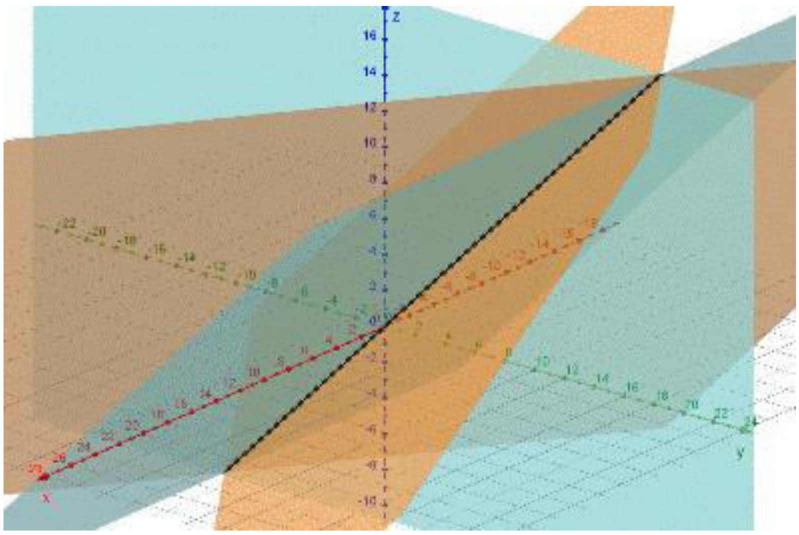


3) Rappel : la distance d'un point $P(\alpha,\beta,\gamma)$ au plan $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$

est donné par $d\,(P,\pi)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. On a donc ici :

$$|x| = 2\frac{|y-z|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}1)\ x+\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\\ 2)\ x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}}$$

Deux plans passant par l'intersection des plans $x=0$ et $z=y$.



EXGAP198 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 2.

Foot – bal (l) istique.

Ce problème se passe dans un plan euclidien de repère OXY. un footballeur est situé au point $(0,0)$ et envoie des balles à une vitesse v selon un angle positif de $\pi/6$ par rapport à l'orizontale (représentée par l'axe X).

On considère une balle envoyée en $t = 0$ et on suppose qu'elle s'arrête lorsque elle retouche le sol.

La physique nous enseigne que sa position $(x(t), y(t))$ en fonction du temps $t \geq 0$ est dans ce cas.

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y(t) = \frac{1}{2}vt - 5t^2.$$

1) En éliminant t, donnez l'équation cartésienne du lieu des points par lesquels passera la balle en fonction de v.

Equation cartésienne :

2) Quelle est la position x_c du point de chute de la balle, et la position (x_s, y_s) du sommet de sa trajectoire?

$x_c =$
$(x_s, y_s) =$

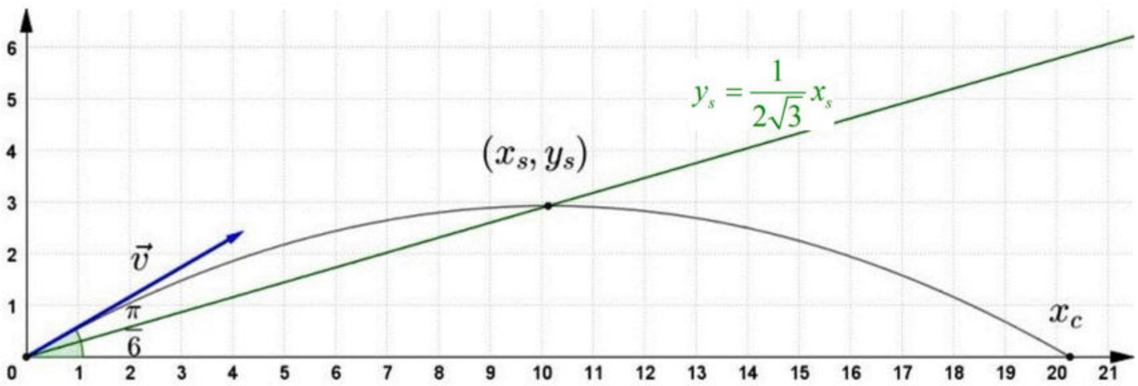
3) Le footballeur tire avec différentes vitesses v (en gardant le même angle initial). Quel est le lieu des sommets des trajectoires des balles qu'il peut envoyer de cette façon?

Réprésentation cartésienne :

Description :

Par description on entendra par exemple "*cercle de rayon* 2 *centré en* $(-3,3)$", ou "*segment de droite reliant le point* $(0,0)$ *au point* $(4,8)$".

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



1) $\left.\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v.t \\ y(t)=\dfrac{1}{2}v.t-5t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t=\dfrac{2x}{\sqrt{3}v} \\ y=\dfrac{1}{2}.v.\dfrac{2x}{\sqrt{3}v}-5\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}v}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=-\dfrac{20x^2}{3v^2}+\dfrac{x}{\sqrt{3}} \text{ avec } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0}$

2) Point de chute lorque $y=0$ et $x \neq 0$

$$-\frac{20x^2}{3v^2}+\frac{x}{\sqrt{3}}=0 \Rightarrow x\left(-\frac{20x}{3v^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0 \Rightarrow \boxed{x_c=\frac{\sqrt{3}v^2}{20}}$$

Sommet lorque $y'=0$

$$y'(x)=-\frac{40x}{3v^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}=0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_s \dfrac{\sqrt{3}v^2}{40} \\ y_s=\dfrac{v^2}{80} \end{cases}}$$

3) Le lieu des sommets s'obtient en éliminant v^2 entre x_s et y_s :

$$\frac{x_s}{y_s}=\frac{\sqrt{3}\times 80}{40}=2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \boxed{y_s=\frac{x_s}{2\sqrt{3}} \text{ pour } x>0}$$

C'est une demi-droite issue de l'origine $(0,0)$ et de pente $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Le 24 septembre 2019

EXGAP199 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Une drôle de technologie.

Pour rappel si les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ *ont des composantes* (a_x, a_y) et (b_x, b_y) *dans un repère orthonormé, alors* $\vec{a}.\vec{b} = (a_x, a_y).(b_x, b_y) = a_x b_x + a_y b_y$.

Une nouvelle technologie radio utilise deux antennes A et B situées dans le plan muni d'un repère orthonormé. La qualité de la réception au point P du plan est mesuré par la *perte de signal*, qui doit être la plus petite possible. Pour cette technologie spécifique, celle-ci vaut :

$$\left| \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} \right|,$$

où $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ sont les vecteurs reliant les antennes A et B au point P (*attention à la valeur absolue*).

1) les antennes A et B sont situées en $(-1,0)$ et $(1,0)$. Quel est le lieu des points $P = (x, y)$ auxquels la perte de signal est nulle? Donnez l'équation cartésienne et une description (par exemple : un segment de droite entre $(0,4)$ et $(6,3)$.

Equation cartésienne :

Description :

2) Quel est le lieu des points P pour lesquels la perte de signal vaut 1/2? Donnez l'équation cartésienne et une description.

Equation cartésienne :

Description :

3) On suppose maintenant qu'on dispose de deux paires d'antennes A_-, B_- et A_+, B_+. Les premières antennes A_- et B_- sont respectivement situés en $(-1,-1)$ et en $(1,-1)$. Les suivantes A_+ et B_+ sont respectivement situées en $(-1,1)$ et $(1,1)$. Quel est le lieu des points auxquels la perte par rapport aux antennes A_-, B_- est exactement le double de la perte de signal par rapport aux antennes A_+, B_+. Donnez l'équation cartésienne et une description.

Equation cartésienne :

Description :

4) Représentez votre solution à la question précédente.

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $\overrightarrow{AP}=(x+1,y) \qquad \overrightarrow{BP}=(x-1,y)$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right|=(x+1)(x-1)+y^2=0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

Cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1

2) a) $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=(x+1)(x-1)+y^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=\dfrac{3}{2}}$

Cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=(x+1)(x-1)+y^2=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=\dfrac{1}{2}}$

Cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\overrightarrow{A_-P}=(x+1,y+1) \qquad \overrightarrow{A_+P}=(x+1,y+1)$

$\overrightarrow{B_-P}=(x-1,y+1) \qquad \overrightarrow{B_+P}=(x-1,y-1)$

a) $\overrightarrow{A_-P}.\overrightarrow{B_-P}=2\overrightarrow{A_+P}.\overrightarrow{B_+P} \Rightarrow (x+1)(x-1)+(y+1)^2=2\left((x+1)(x-1)+(y-1)^2\right)$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow \boxed{x^2+(y-3)^2=9}$$

Cercle de centre $(0,3)$ et de rayon 3

b) $\overrightarrow{A_-P}.\overrightarrow{B_-P}=-2\overrightarrow{A_+P}.\overrightarrow{B_+P} \Rightarrow (x+1)(x-1)+(y+1)^2=-2\left((x+1)(x-1)+(y-1)^2\right)$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+3y^2-2y=0 \Rightarrow \boxed{x^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}}$$

Cercle de centre $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{3}$