Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 2

EXGAP020 – EXGAP029

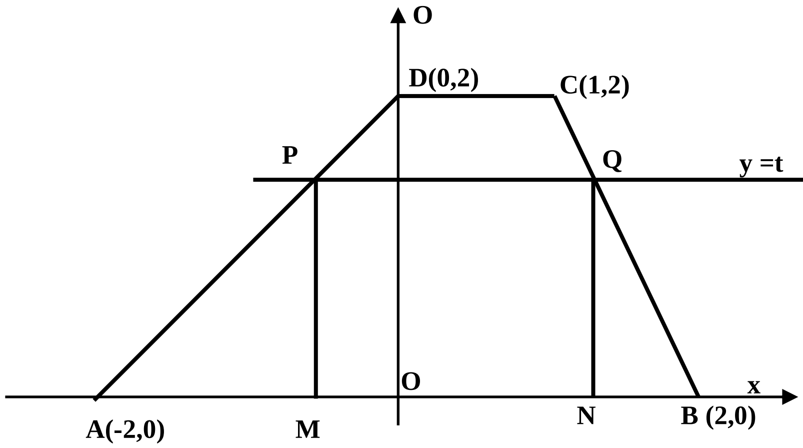
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAP020 – Liège, septembre 1999.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le trapèze ABCD où A(-2,0), B(2,0), C(1,2) et D(0,2).
Si MNPQ est un carré tel que M et N sont sur le segment AB tandis que P et Q sont sr les autres côtés du trapèze, quelles sont les coordonnées du milieu de MN ?



Il faut déterminer la position de la droite PQ de telle façon que la distance PQ soit égale à PM. Autrement dit si $PQ \equiv y = t$, $|PQ| = t = |PM|$

$$AD \equiv \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1 \quad \to \quad y = x + 2$$

$$CB \equiv \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2} \quad \to \quad y = -2x + 4$$

$$P \equiv \begin{cases} y = x + 2 \\ y = t \end{cases} \quad \to \quad P(t-2, t)$$

$$Q \equiv \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = t \end{cases} \quad \to \quad Q(-\frac{t}{2} + 2, t)$$

$$|PQ|^2 = (t - 2 + \frac{t}{2} - 2)^2 = t^2$$

1) $\frac{3t}{2} - 4 = t \quad \to \quad t = 8$ à rejeter.

2) $\frac{3t}{2} - 4 = -t \quad \to \quad t = \frac{8}{5} = 1.6$

$\to \quad M(-0.4, 0) \quad et \quad N(1.2, 0)$

$\to \quad$ Milieu de MN : $(0.4, 0)$

EXGAP021 – Liège, septembre 1999.

Quelles sont les équations de toutes les tangentes à l'hyperbole x ² -y ² = 1 passant par le point (2,2) ?

Remarque : Peut-être n'y en a-t-il qu'une.

Nous allons écrire l'équation en coordonnées homogènes.

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

$$P(2,2) \rightarrow f(2,2,1) = 4 - 4 - 1 - = -1$$

$$\begin{cases} f_x' = 2x \\ f_y' = -2y \\ f_z' = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_a' = 4 \\ f_b' = -4 \\ f_c' = 2 \end{cases}$$

L'équation générale qui donne les coefficients angulaire m des tangentes est :

$$\left[f_b'^2 - 4Cf(abc) \right] m^2 + 2 f_a' f_b' m + f_a' - 4Af(abc) = 0$$

$$Ici \quad A = 1 \quad B = 0 \quad C = -1 \quad D = E = 0 \quad F = -1$$

$$\left[(-4)^2 - 4'-1)(-1) \right] m^2 - 2.4.4\, m + 4^2 - 4.1.(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3m^2 - 8m + 5 = 0$$

$$m = \frac{+4 \pm \sqrt{16-15}}{3} \quad \rightarrow \quad m_1 = 1 \quad et \quad m_2 = \frac{5}{3}$$

1) $m = 1$ correspond à une assymptote

2) Il n'y a donc qu'une seule asymptote correspondant à $m_2 = \frac{5}{3}$

$$y = mx + p \quad \rightarrow \quad P(2,2) \Rightarrow p = 2 - \frac{5}{3}.2 = -\frac{4}{3}$$

et donc : $y = \frac{1}{3}(5x - 4)$

EXGAP022 – Liège, septembre 1999.

On donne un cercle C et une droite d tangente à C.
Quel est le lieu des points dont la distance à C est égale à la distance à d ?

Remarque : la distance d'un point à un cercle s'exprime facilement en fonction de son rayon et de la distance du point à son centre.

On prend le cercle centre en O.
Soit R le rayon du cercle et soit $x = R$ l'équation de la tangente au cercle au point (R,0).
Soit enfin le point $P\ (x,\ y)$ appartenant au lieu recherché.
Exprimons que la distance de P au cercle est égale à la distance de P à la droite :

$$\sqrt{x^2+y^2}-R=R-x \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=(2R-x)^2=4R^2-4Rx+x^2$$

$$y^2=4r^2-4rx=-4R(x-R)$$

C'est une parabole de foyer O et de directrice $x = 2R$.

EXGAP023 – Liège, septembre 1999.

Les tangentes à l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

issues du point P (0,5), coupent l'axe Ox en les points A et B.
Quelle est l'aire du triangle PAB ?

L'ellipse en équation homogène s'écrit :

$$9x^2+16y^2+144z^2=0 \quad P(0,\ 5,\ 1)\Rightarrow f(abc)=9.0+16.25\text{-}144=256$$

$$\begin{cases} f_x'=18x \\ f_y'=32y \\ f_z'=-288z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_a'=0 \\ f_b'=160 \\ f_c'=-288 \end{cases}$$

$$\left[f_b'^2-4Cf(abc)\right]m^2+2f_a'f_b'm-4Af(abc)=0$$

$$\left[160^2-4.16.256\right]m^2+2.0.160.m+0-4.9.256=0$$

$$9216m^2=9216 \quad \rightarrow \quad m=\pm 1$$

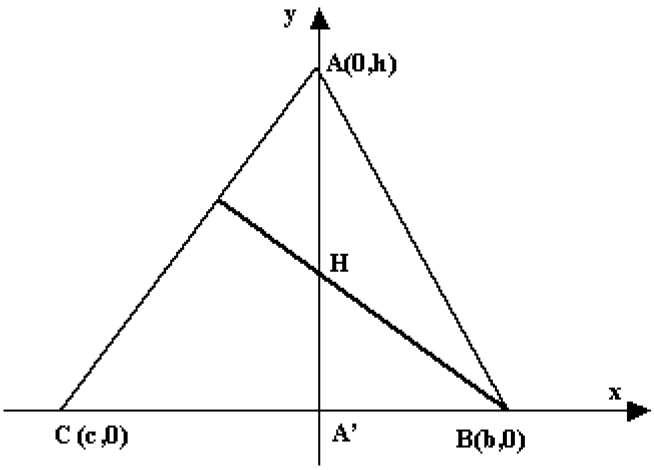
Les coordonnées de A et B sont donc : $A(5,0)$ et $B(\text{-}5,0)$.

L'aire du triangle PAB est : $5.10/2=25$

EXGAP024 – Liège, juillet 1999.

Dans un triangle ABC, le pied A’ de la hauteur est situé entre B et C. On donne | AA’ | = h, | BA’ | = b, | CA’ | = c et on note H l’orthocentre (point de rencontre des hauteurs) du triangle ABC.

a) Calculer | AH | en fonction de h, b et c.
b) Si H’ est le symétrique de H par rapport à BC, montrer que H’ est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC (c’est-à-dire passant par ses sommets).



a) Coefficient angulaire de $AC = \frac{h}{c}$, donc coefficient angulaire de $HB = -\frac{c}{h}$, car AC et HB sont perpendiculaires.

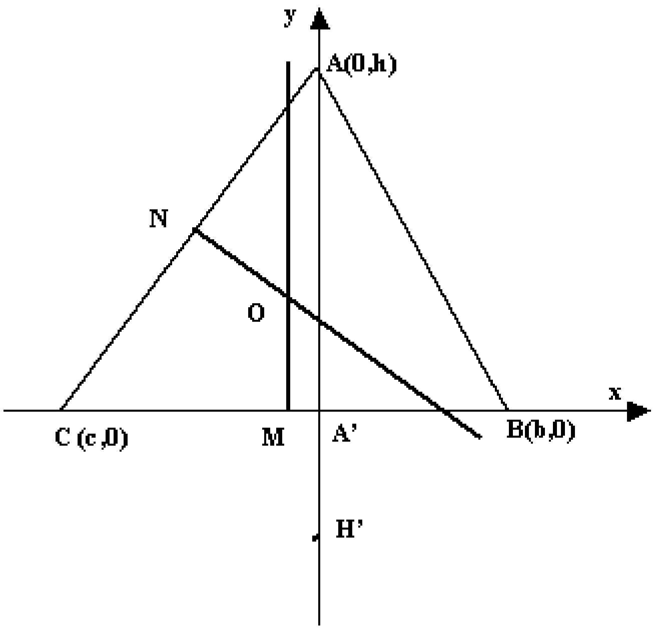
$HB \equiv y = -\frac{c}{h}x + p$ qui passe par $B\ (b,0)$ donc $p = \frac{cb}{h}$.

Les coordonnées de H sont donc $\left(o,\ \frac{cb}{h}\right)$ et $|\ AH\ | = h - \frac{cb}{h}$.

b) Coordonnées de H' : $\left(0\ ;\ -\frac{cb}{h}\right)$.

Pour vérifier que H' est sur le cercle circonscrit au triangle.

- on calcule la position de *O*, point de rencontre des médiatrices *NO* et *MO*.
- on calcule la distance *OA*.
- on vérifie que $|\ OA\ | = |\ OH'\ |$.



$$M:\left(\frac{b-c}{2},0\right)\quad N\left(-\frac{c}{2},\frac{h}{2}\right)$$

$$NO\equiv y=-\frac{c}{h}x+\frac{h}{2}-\frac{c^2}{2h}$$

$$MO\equiv x=\frac{b-c}{2}$$

$$O\equiv\begin{cases} y=-\dfrac{c}{h}x+\dfrac{h}{2}-\dfrac{c^2}{2h} \\ x=\dfrac{b-c}{2}\end{cases}\quad\rightarrow\quad O\left(\frac{b-c}{2},\frac{h}{2}-\frac{cb}{2h}\right)$$

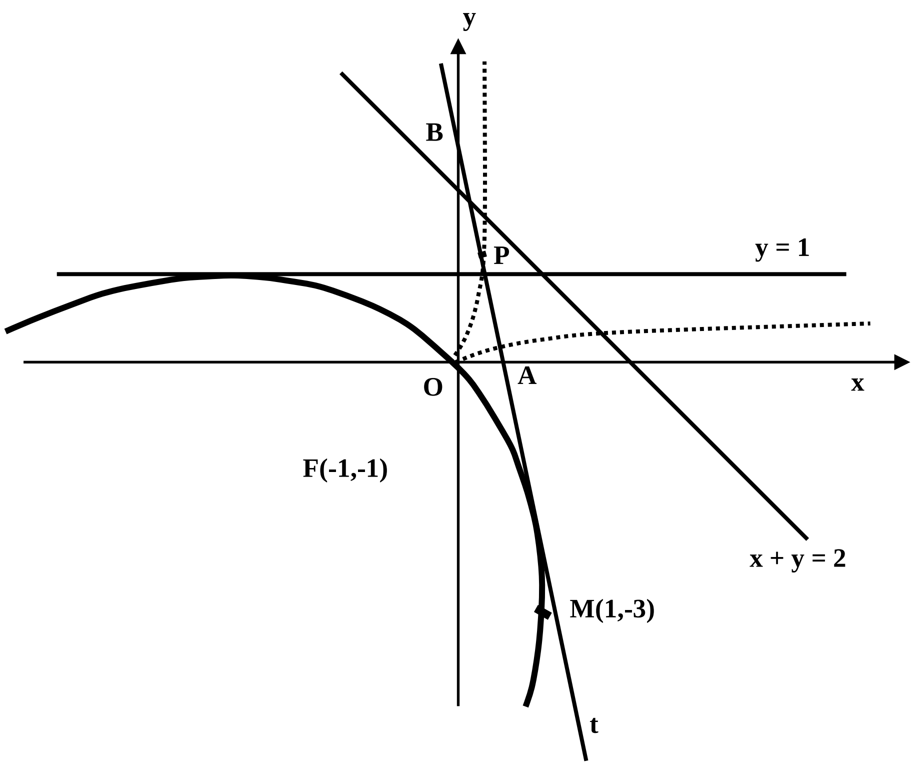
$$|OA|^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(h-\frac{h}{2}+\frac{cb}{2h}\right)^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}+\frac{cb}{2h}\right)^2$$

$$|OH'|^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}-\frac{cb}{2h}+\frac{cb}{h}\right)^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}+\frac{cb}{2h}\right)^2=|OA|^2$$

EXGAP025 – Liège, juillet 1999.

a) Donner l'équation de la parabole dont la directrice est la droite d'équation $x + y = 2$ et le foyer $F(-1,-1)$ (Pour rappel , la parabole de directrice d et de foyer P est le lieu des points équidistants de d et de F).
b) Montrer que la parabole passe par le point $M(1, -3)$ et qu'elle est tangente à la droite d'équation $y = 1$.
c) Si $P(x,y)$ est un point du plan n'appartenant pas aux axes et si t est une droite non parallèle aux axes passant par P, le point d'intersections de t avec Ox est noté A et celui de t avec Oy est noté B.
Montrer que $| PA | = | PB |$ si et seulement si $A = B$ ou si $A(2x, 0)$ et $B(0, 2y)$.
d) Quelle est l'équation du lieu des points P tels qu'une tangente à la parabole passant par P coupe les axes Ox et Oy en des points respectifs A et B tels que $| PA | = | PB |$?

Remarque : on ne demande pas la nature géométrique du lieu et on pourra se contenter de donner une équation implicite du lieu.



a) Soit $N(x,\ y)$ un point de la parabole cherchée.

Distance de N au foyer F : $d^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

Distance de N à la directrice $x+y=2$: $d^2 = \dfrac{(1.x+1.y-2)^2}{1+1} = \dfrac{(x+y-2)^2}{2}$

En effet, la distance d'un point $A(x_A, y_A)$ à une droite $ax+by+c=0$

est donné par : $d = \dfrac{ax_A + by_A + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Donc : $d^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 = \dfrac{(x+y-2)^2}{2}$

$x^2+2x+1+y^2+2y+1 = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+4+2xy-4x-4y)$

$2x^2+4x+2y^2+4y+4 = x^2+y^2+4+2xy-4x-4y$

Equation de la parabole : $x^2-2xy+y^2+8x+8y=0$

b) La parabole passe par l'origine (immédiat).

Elle passe par $M(1,\text{-}3)$ car $1+6+9+8-24=0$

Elle est tangente à la droite $y\ =\ 1$, car :

$$\begin{cases} y\ = 1 \\ x^2-2xy+y^2+8x+8y=0 \end{cases} \rightarrow\quad x2-2x+1+8x+8=0 \quad\rightarrow\quad (x+3)^2=0$$

Le réalisant de cette équation étant nul, il a un point de tangence en $(-3,1)$.

c) si $|PA| = |PB|$, le point $P\ (x,\ y)$ est le milieu de $A(a,0)$ *et* $B(0,b)$.

On a donc : $\begin{cases} x = \dfrac{0+a}{2} \\ y = \dfrac{0+b}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2x \\ b = 2y \end{cases}$

Si $A = B$, le point P est confondu avec l'origine.

d)Soit $P(\alpha,\beta)$ et $t \equiv y = mx + p$

$$\begin{cases} \text{si } y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2\alpha = -\dfrac{p}{m} \\ \text{si } x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2\beta = p \end{cases} \rightarrow \quad m = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \rightarrow \quad t \equiv y = -\frac{\beta}{\alpha}x + 2\beta$$

L'intersection avec la parabole est :

$$x^2 - 2x\left(-\frac{\beta}{\alpha}x + 2\beta\right) + \left(-\frac{\beta}{\alpha}x + 2\beta\right)^2 + 8x + 8\left(-\frac{\beta}{\alpha}x + 2\beta\right) = 0$$

$$x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x^2 - 4\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2 - 4\frac{\beta^2}{\alpha}x + 4\beta^2 + 8x - 8\frac{\beta}{\alpha}x + 16\beta = 0$$

$$\left(1 + 2\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)x^2 + 4\left(2 - \beta - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)x + 4\beta\left(\beta - \frac{2}{\alpha} + 4\right) = 0$$

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 x^2 + 4\left(2 - \beta - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)x + 4\beta\left(\beta - \frac{2}{\alpha} + 4\right) = 0$$

Le lieu s'obtient en exprimant que le réalisant de cette équation est nulle.

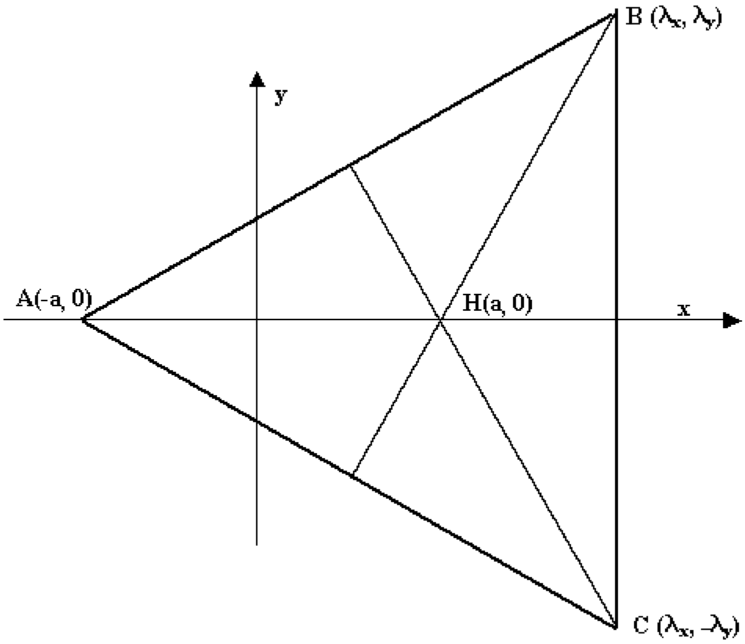
On a donc en changeant $\alpha \rightarrow x$ et $\beta \rightarrow y$:

$$4\left(2 - y - \frac{y^2}{x}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 y\left(y - \frac{2}{x} + 4\right) = 0$$

$$x(2x - xy - y^2)^2 - y(x + y)^2\,(xy - 2 + 4x) = 0$$

EXGAP026 – Liège, septembre 2000.

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-a, 0) et H (a,0).
Donner l'équation du lieu des sommets B et C des triangles ABC isocèles en A (c'est-à-dire tels que | AB | = | AC |) et dont l'orthocentre est H.
Préciser la nature du lieu.



Si H est orthocentre, AH est une hauteur.

Donc BC et parallèle à Oy et si ABC est un triangle isocèle B et C sont symétriques par rapport à Ox.

Soit B $(\lambda_x\ ,\ \lambda_y)$ et C $(\lambda_x,\ -\lambda_y)$.

Nous allons rechercher les équations de AB et MC et exprimer que les deux droites doivent être perpendiculaires. (c'est-à-dire que $m_1\ .\ m_2\ =\ -1$)

$$AB \equiv \frac{x+a}{\lambda_x+a} = \frac{y}{\lambda_y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\lambda_y}{\lambda_x+a}(x+a)$$

$$MC \equiv \frac{x-a}{\lambda_x-a} = \frac{y}{-\lambda_y} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{\lambda_y}{\lambda_x-a}(x-a)$$

$$\rightarrow \quad -\frac{\lambda_y}{\lambda_x-a}\,\frac{\lambda_y}{\lambda_x+a} = -1$$

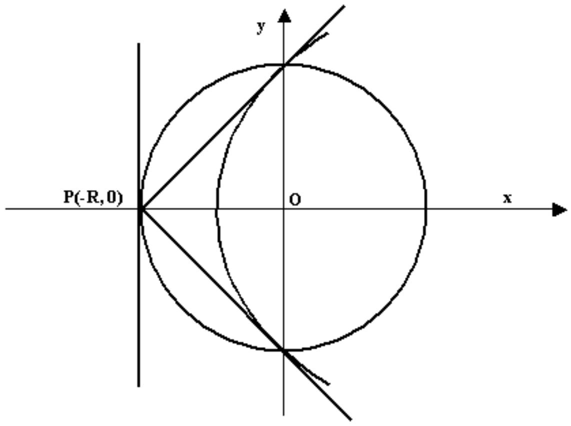
Changeons $\lambda_x \rightarrow x$ et $\lambda_y \rightarrow y,$ on obtient le lieu : $y^2 = x^2 - a^2$

C'est une hyperbole de centre (0,0), de sommet H, et de foyer $(a\sqrt{2}, 0)$

EXGAP027 – Liège, juillet 2000.

Soit C un cercle de centre O et P un point de C. On considère la parabole ϕ dont la directrice est la tangente à C en P; et dont le foyer est O. Par P on mène les tangentes d_1 et d_2 à ϕ.

Quel est le lieu des points d'intersection de d_1 et de d_2 avec ϕ lorsque P parcourt C ?



Quand le point tourne sur le cercle, la tangente et la parabole tournent en même temps.
Vu la symétrie du cercle, étudions le cas où le point P se trouve
en $(-R,0)$. L'équation focale de la parabole est : $2p(x-x_0)=(y-y_0)^2$

avec $x_0=-\frac{R}{2}$, $y_0=0$ et $\frac{p}{2}=\frac{R}{2}\to p=R,$

donc $\phi\equiv y^2=2R(x+\frac{R}{2}) \quad\to\quad y^2-2Rx-R^2=0$

Calculons les coefficients angulaires des tangentes issues de P:

$f(abc) \;=\; 0+2R^2-R^2=R^2$

$$\begin{cases} f_x'=-2R \\ f_y'=-2y \\ f_z'=-2Rx-2R^2z \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} f_a'=-2R \\ f_b'=0 \\ f_c'=0 \end{cases}$$

$A=B=E=0 \quad C=1 \quad D=-2R \quad F=-R^2$

$\left[f_b'^2-4C\,f(abc)\right]m^2+2f_a'f_b'm+f_a'^2-4A\,f(abc)=0$

$(0-4.1.R^2)m^2+0+4R^2=0 \quad\to\quad -4R^2m^2+4R^2=0 \quad\to\quad m=\pm1$

les tangentes ont donc pour équations $y\equiv\pm x$ et elles vont donc couper le cercle en $(0,R)$ et $(0,-R)$. Le lieu est donc le cercle lui-même.

Si on calcule la corde de contact des points de tangence :

$af_x'+bf_y'+cf_z'=0 \quad\to\quad -R(-2R)+0(-2y)+1(-2Rx-2R^2)=0$

$\to\quad x=0$ soit l'axe Oy

EXGAP028 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit un espace euclidien E^2, muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une courbe C d'équation implicite : $x^2 + y^2 -6x +8y = 0$

a) Déterminer de quelle courbe il s'agit.
b) Calculer les coordonnées des points de contact C1 et C2 des tangentes à cette courbe issues du point (0,5).
c) Calculer la norme de C1C2 et l'angle formé par les vecteurs C1C2 et Oy.

a) C'est un cercle puisque A = C. Réduisons le :

$(x-3)^2+(y+4)^2-9-16=0 \quad \to \quad (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$

Cercle de centre (3,-4) et de rayon 5.

b) Calculons la corde qui joint les points de contact des tangentes

le point (0,5) $\Rightarrow$ (0,5,1) en coordonnées homogènes.

$$\begin{cases} f_x' = 2x-6 \\ f_y' = 2y+8 \\ f_z' = -6x+8y \end{cases}$$

l'équation de la corde de contact est :

$a\,f_x' + b\,f_y' + c\,f_z' = 0 \quad \to \quad 0(2x-6)+5(2y+8)+1(-6x+8y)=0$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{9}$

On obtient les points C_1 et C_2 en résolvant le sytème :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{9} \\ (x-3)^2+(y+4)^2 = 5^2 \end{cases}$$

Après avoir éliminé *y*, on obtient :

$9x^2-39x-104=0$ qui a pour solutions $x_1 = 6.198$ et $x_2 = -1.864$

On remplace dans l'équation de la corde pour obtenir les *y*.

$\to \quad C_1 : (-1.865, -2.844)$ et $C_2 : (6.198, -0.156)$

c) La norme de $\overline{C_1C_2}$ est :

$\overline{C_1C_2}^2 = (-1.862 - 6.198)^2 + (-2.844+0.156)^2$

$\overline{C_1C_2} = 8.499$

L'angle formé entre *oy* et $\overline{C_1C_2}$:

Angle avec *ox*: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2.844+0.156}{-1.865-6.198} = 0.333$

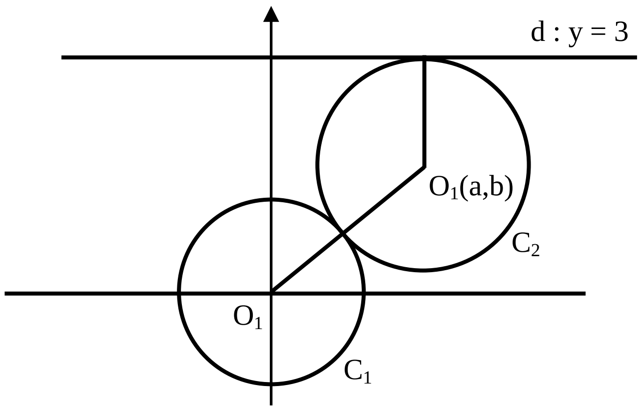
$\to \quad \alpha = arc\ \tan\ 0.333 = 18.417$

et l'angle avec *oy* : $90-18.417 = 71.565°$

EXGAP029 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2, muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une circonférence C1 de centre (0,0) et de rayon = 1
Soit une droite d d'équation y = 3.

a) Déterminer le lieu des centres des circonférences simultanément tangentes à C1 et à d
b) Démontrer que ce lieu est également le lieu des centres des circonférences passant par un point fixe et tangentes à une droite fixe.



$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$

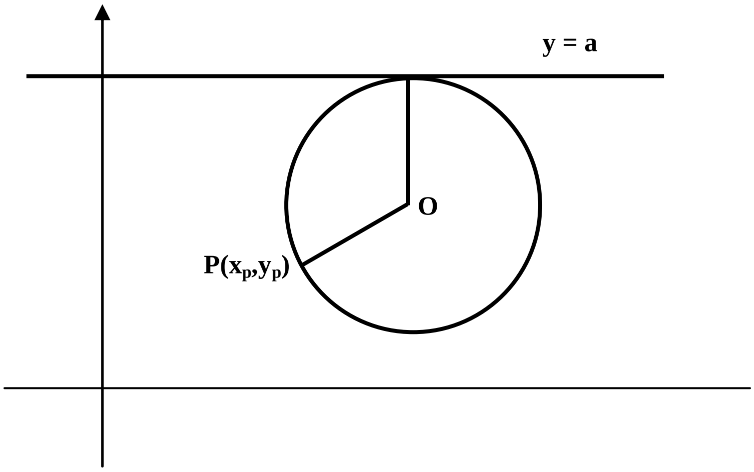
$C_2 \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Distance entre O_2 et la droite d : $3-b$

Distance entre O_1 et O_2 : $r+1$

Donc $\overrightarrow{O_1O_2} = a^2 + b^2 = (r+1)^2$

En changeant $a \to x$ et $b \to y$: $x^2 = 8(2-y)$. C'est une parabole.



Soit une droite fixe. On peut choisir le axes de façon que son équation soit $y = a$

Soit un cercle de centre O qui passe par $P(x_p, y_p)$.

Le centre O est à égale distance de P et de la droite (rayon du cercle).

Par conséquent le lieu est une parabole d'équation:

$(x - x_p)^2 = -4(a - y_p)(y - y_p)$

Il existe une solution symétrique par rapport à la droite :

$(x - x_p)^2 = 4(a - y_p)(y - y_p)$