

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 4

EXGAP040 – EXGAP049

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

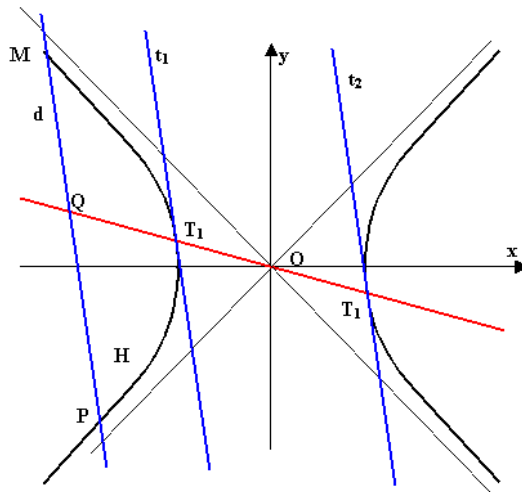
1 avril 03

EXGAP040 – Exemple.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy .
Soit une hyperbole et une droite d qui coupe l'hyperbole en deux points distincts M et P .

Soit les droites t et t' tangentes à l'hyperbole en T_1 et T_2 et parallèle à la droite d .

- La droite d' qui joint les points de tangence est un diamètre (c'est-à-dire passe par le centre de l'ellipse).
- Le diamètre coupe la droite d en son milieu



Equation du diamètre T_1T_2

$$d \equiv y = mx + p$$

$$H \equiv b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\begin{cases} f_x' = 2b^2x \\ f_y' = -2a^2y \end{cases} \rightarrow f_x' + mf_y' = 0 \rightarrow y = \frac{b^2}{ma^2}x$$

qui est l'équation d'une droite passant par l'origine.

Coordonnée x de Q

$$\begin{cases} y = \frac{b^2}{ma^2}x \\ y = mx + p \end{cases} \rightarrow \frac{b^2}{ma^2}x = mx + p \rightarrow x_Q = \frac{ma^2p}{b^2 - m^2a^2}$$

Coordonnées de M et P

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + p \end{cases} \rightarrow b^2x^2 - a^2(mx + p)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(b^2 - m^2a^2)x^2 - 2a^2mpx - a^2b^2 = 0$$

x_M et x_P sont solutions de cette équation. De plus,

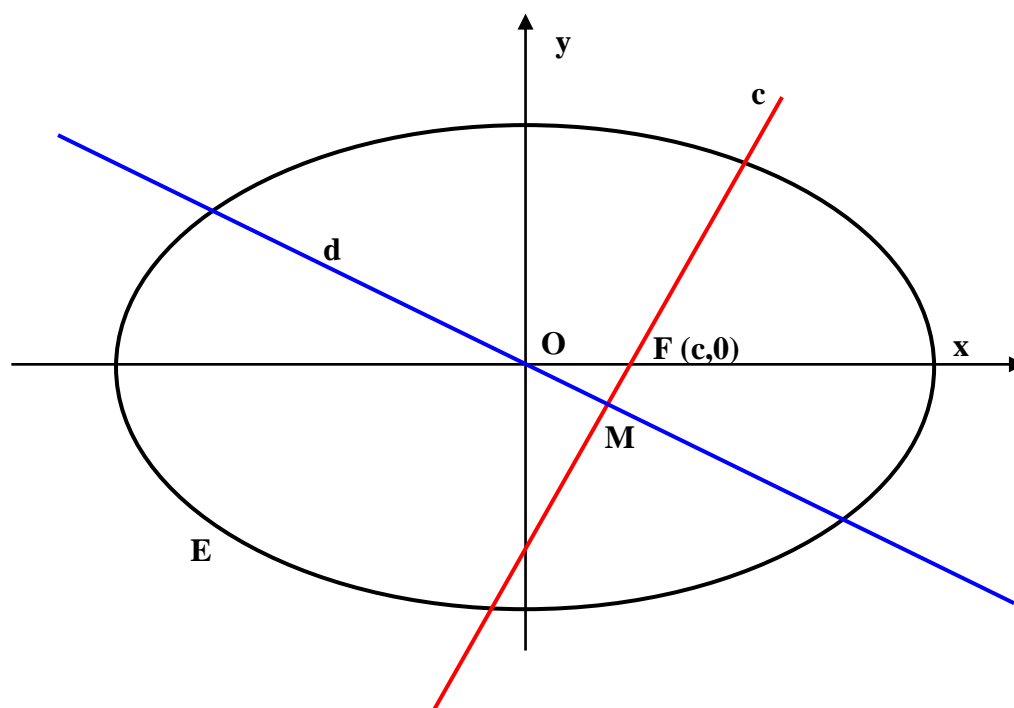
$$x_M + x_P = \frac{2a^2mpx}{b^2 - m^2a^2} = 2x_Q$$

Le diamètre coupe donc la corde en son milieu.

EXGAP041 – Exemple.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy .
Trouver le lieu du milieu d'une corde focale d'une ellipse .

NOTE : Une corde focale passe par un foyer.



$$E \equiv a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$c \equiv y - m(x - c) = 0$$

$$d \equiv \frac{1}{2} (f_x' + m f_y') = b^2 x + a^2 m y = 0$$

Eliminons m :

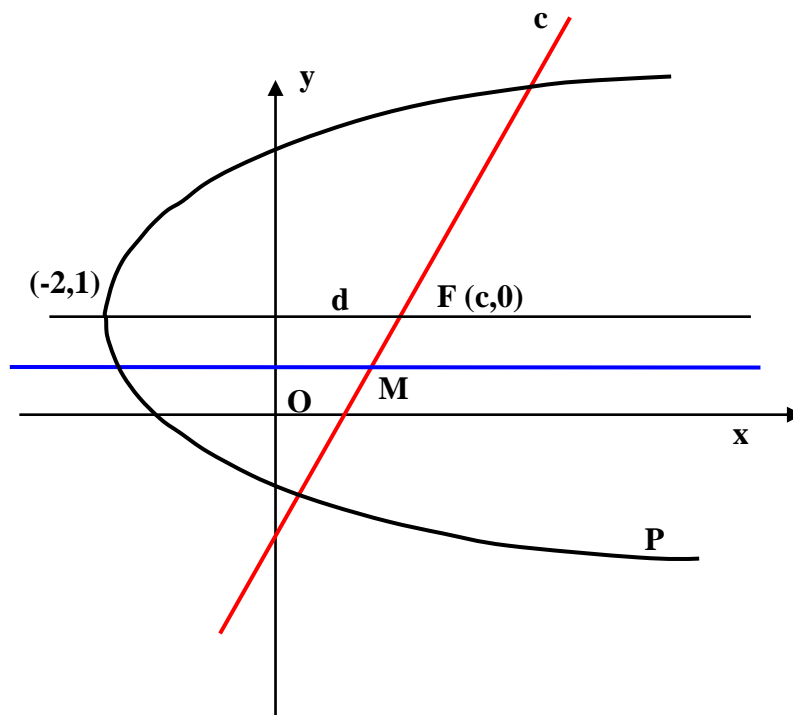
$$L \equiv a^2 y^2 + b^2 x^2 - b^2 c x = 0$$

C'est une ellipse passant par le foyer F et le centre de l'ellipse donnée.

Il existe une solution symétrique pour le foyer F' .

EXGAP042 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy . Déterminer le lieu des milieux des cordes focales d'une parabole P de sommet $(-2,1)$ et d'axe de symétrie parallèle à Ox .



Une parabole étant une ellipse dont un des foyers est rejeté à l'infini, utilisons la propriété que le diamètre conjugué à une corde focale coupe la corde focale en son milieu, ici le point M .

$$P \equiv (y-1)^2 - 2p(x+2) = 0$$

$$c \equiv y-1 = m\left(x+2 - \frac{p}{2}\right) = 0$$

$$d \equiv \frac{1}{2}(f_x' + mf_y') = -p + m(y-1) = 0$$

Éliminons m :

$$L \equiv (y-1)^2 = p(x+2) - \frac{p^2}{2}$$

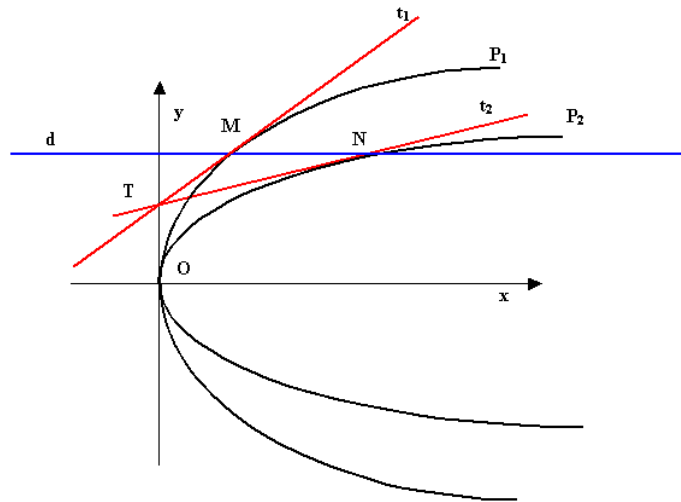
C'est une parabole de même axe que la parabole donnée.

EXGAP043 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy . Une droite mobile parallèle à Ox coupe en M et N deux paraboles d'axes de symétrie Ox , dont les sommets sont confondus à l'origine des axes et dont les foyers ont une abscisse positive.

Déterminer le lieu du point d'intersection T des tangentes menées en M et N à ces paraboles.

Démontrer que la position du point T reste indépendante du choix des abscisses des foyers des paraboles.



$$d \equiv y = \lambda$$

$$P_1 \equiv y^2 = 2p_1x$$

$$P_2 \equiv y^2 = 2p_2x$$

$$M : \left(\frac{\lambda^2}{2p_1}, \lambda \right)$$

$$\begin{cases} f_x' = -2p_1 \\ f_y' = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_{x_M}' = -2p_1 \\ f_{y_M}' = 2\lambda \end{cases} \rightarrow t_1 \equiv y - \lambda = \frac{p_1}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda^2}{2p_1} \right)$$

$$\text{De même : } t_2 \equiv y - \lambda = \frac{p_2}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda^2}{2p_2} \right)$$

$$\text{Le lieu de } T \text{ est donné par : } \frac{p_1}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda^2}{2p_1} \right) = \frac{p_2}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda^2}{2p_2} \right)$$

$$\rightarrow p_1x - \frac{\lambda^2}{2} = p_2x - \frac{\lambda^2}{2} \rightarrow x = 0 \quad \text{Axe } Oy$$

Coordonnées de T :

$$x_T = 0 \quad y_T - \lambda = -\frac{p_1}{\lambda} \frac{\lambda^2}{2p_1} = -\frac{\lambda}{2} \rightarrow y = \frac{\lambda}{2}$$

Le point T est donc indépendant des foyers.

EXGAP044 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy .
Former l'équation du lieu géométrique des points dont les distances aux points $(-3, 0)$ et $(3, 0)$ ont une différence constante en valeur absolue égale à 5.
Écrivez les équations des tangentes et des normales au lieu en ses points d'abscisse -7 .

C'est une hyperbole de centre $(0, 0)$.

$$\text{La différence aux foyers} = 5 \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a^2 = \frac{25}{4}$$

$$\text{La distance du centre à un foyer} = 3 \rightarrow 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow b^2 = \frac{11}{4}$$

$$\rightarrow H \equiv \frac{x^2}{\frac{25}{4}} - \frac{y^2}{\frac{11}{4}} = 1 \rightarrow 44x^2 - 100y^2 - 275 = 0$$

$$\begin{cases} f'_x = 88x \\ f'_y = -200y \end{cases} \rightarrow \frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{88x}{200y}$$

$$\text{D'autre part si } x = 7 \rightarrow 44 \cdot 49 - 100y^2 - 275 = 0 \rightarrow y = \pm 4,337$$

L'équation d'une tangente en un point P est :

$$y - y_p = \frac{f'_{x_p}}{f'_{y_p}}(x - x_p) \rightarrow$$

$$t_1 \equiv y - 4,337 = -\frac{88 \cdot 7}{200 \cdot 4,337}(x + 7) \rightarrow y - 4,337 = -0,71(x + 7)$$

$$t_2 \equiv y + 4,337 = -\frac{88 \cdot 7}{200 \cdot (-4,337)}(x + 7) \rightarrow y + 4,337 = +0,71(x + 7)$$

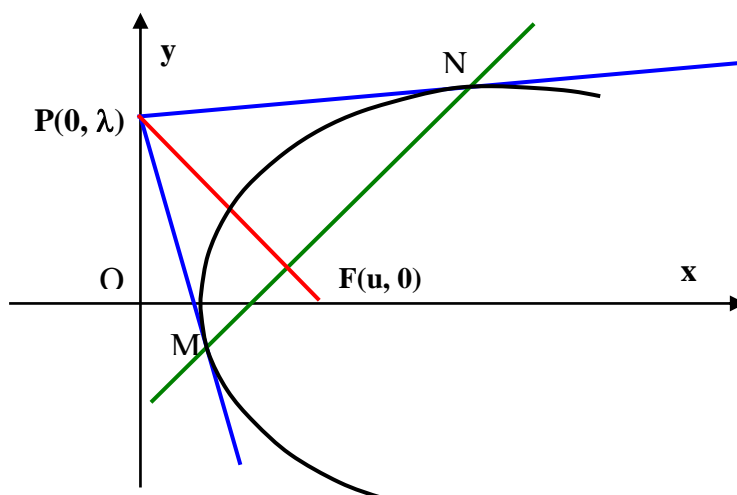
Et les normales :

$$n_1 = y - 4,337 = 1,408(x + 7)$$

$$n_2 = y + 4,337 = -1,408(x + 7)$$

EXGAP045 – Lupsin et Graas.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy .
Démontrer que la corde de contact des tangentes issues d'un point P situé sur une directrice d'une conique est perpendiculaire à la droite qui joint P au foyer.



Si la directrice est l'axe Oy , alors les coniques sont de la forme :

$$(x-u)^2 + y^2 = \mu x^2 \quad (\text{Voir note})$$

$$\text{ou } (1-\mu)x^2 + y^2 - 2ux + u^2 = 0$$

$P : (0, \lambda,)$ en coordonnées homogènes.

$$\rightarrow MN \equiv 0.f_x' + \lambda.f_y' + 1.f_z' = 2\lambda y - 2ux + 2u^2 = 0$$

$$\rightarrow m_{MN} = \frac{u}{\lambda}$$

Or la droite $PF \equiv uy + \lambda x - u\lambda = 0$

$$\rightarrow m_{PF} = -\frac{\lambda}{u}$$

$$\rightarrow MN \perp PF$$

NOTE

L'équation focale d'une parabole est : $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

L'équation focale d'une ellipse ou d'une parabole est :

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

Si la directrice est confondue avec l'axe des x , alors $p = 0$ (pour la parabole)

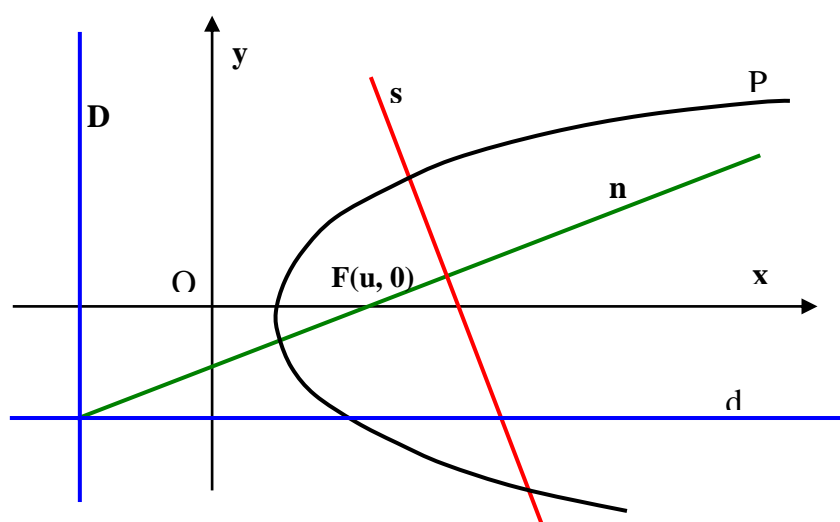
et $a = 0$ pour l'ellipse et l'hyperbole.

Dans tous les cas, l'équation focale est de la forme :

$$(x - u)^2 + y^2 = \mu x^2$$

EXGAP046 – Lupsin et Graas.

Soit l'espace euclidien E^2 , muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy .
Démontrer que la perpendiculaire abaissée du foyer sur une corde d'une parabole rencontre le diamètre conjugué à la corde sur la directrice



$$P \equiv y^2 - 2px = 0$$

$$D \equiv 2x + p = 0$$

$$s \equiv y - \lambda x - \beta = 0$$

$$d \equiv \lambda y - p = 0 \quad (\text{Voir note})$$

$$n \equiv 2\lambda y + 2x - p = 0$$

D , n et s sont concourantes car :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & p \\ \lambda & 0 & -p \\ 2\lambda & 2 & -p \end{vmatrix} = 2\lambda p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

NOTE

Le diamètre conjugué à une corde de pente λ est donné par : $f'_x + \lambda f'_y = 0$

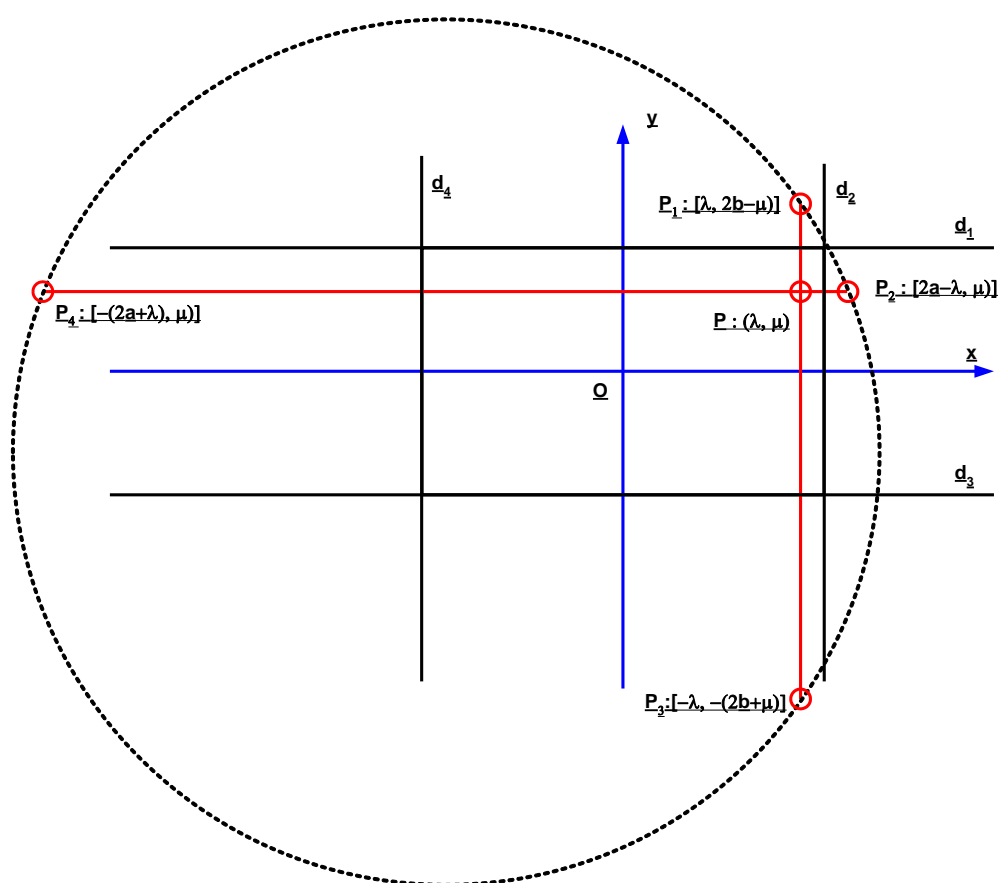
$$\text{ici: } \begin{cases} f'_x = -2p \\ f'_y = 2y \end{cases} \rightarrow -2p + 2\lambda y = 0 \rightarrow \lambda y - p = 0$$

EXGAP047 – Liège, juillet 2001.

On donne quatre droites distinctes d_1 , d_2 , d_3 et d_4 « formant rectangle », c'est-à-dire telles que $d_1 \parallel d_3$, $d_2 \parallel d_4$ et $d_1 \perp d_2$.

Quelle est le lieu des points P dont les symétriques orthogonaux P_1 , P_2 , P_3 et P_4 par rapport aux droites respectives d_1 , d_2 , d_3 et d_4 sont sur un même cercle ?

On précisera notamment la nature géométrique du lieu.



Considérons que le rectangle est de dimensions $2a \times 2b$.

Mettons un repère orthonormé d'axes x et y au centre du rectangle.

Soit (λ, μ) , les coordonnées du point P .

Les coordonnées des symétriques sont :

$$P_1 [\lambda, 2b - \mu] \quad P_2 [2a - \lambda, \mu] \quad P_3 [-\lambda, -(2b + \mu)] \quad P_4 [-(2a + \lambda), \mu]$$

Ces points satisfont à l'équation d'un cercle de rayon R et d'équation :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (\lambda - p)^2 + (2b - \mu - q)^2 = R^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a - \lambda - p)^2 + (\mu - q)^2 = R^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda - p)^2 + (-2b - \mu - q)^2 = R^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2a - \lambda - p)^2 + (\mu - q)^2 = R^2 & (4) \end{cases}$$

Faisons (1) - (3) :

$$(2b - \mu - q + 2b + \mu + q)(2b - \mu - q - 2b - \mu - q) = 0$$

$$\rightarrow 8b(\mu + q) = 0 \rightarrow \mu = -q$$

Faisons (2) - (4) :

$$(2a - \lambda - p + 2a + \lambda + p)(2a - \lambda - p - 2a - \lambda - p) = 0$$

$$\rightarrow 8a(\lambda + p) = 0 \rightarrow \lambda = -p$$

Remplaçons dans les équations (1) et (2)

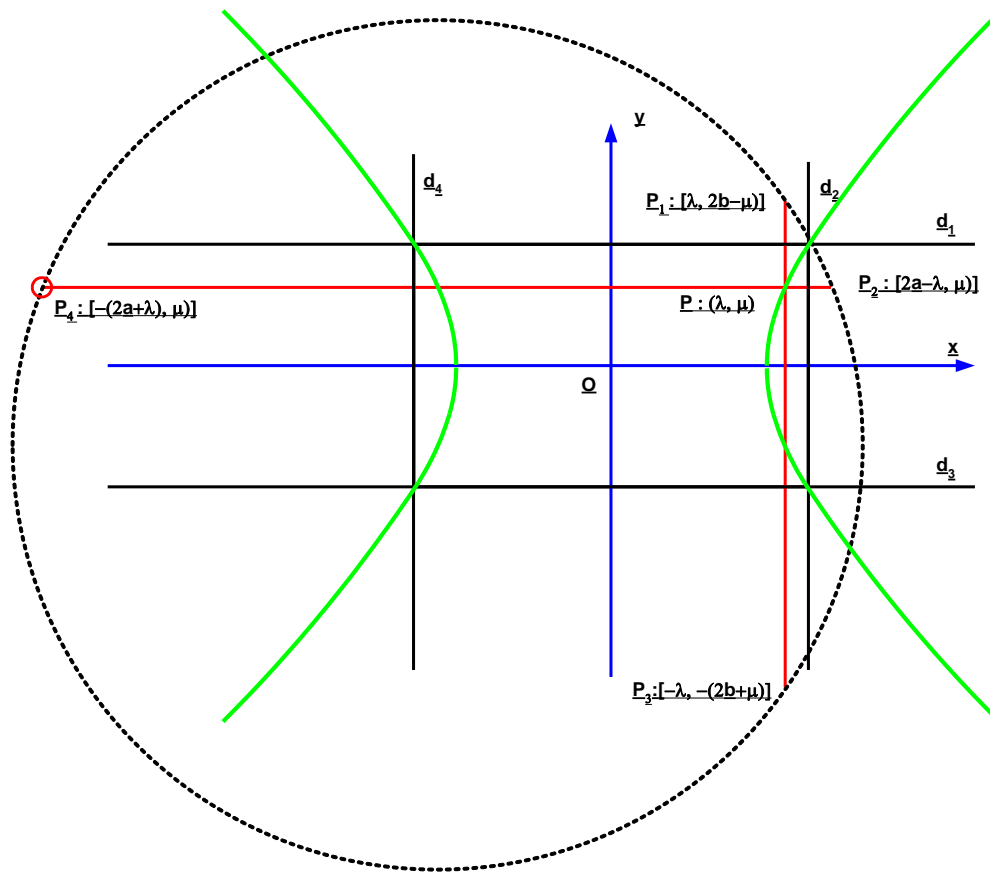
$$\begin{cases} 4\lambda^2 + 4b^2 = R^2 \\ 4a^2 + 4\mu^2 = R^2 \end{cases} \rightarrow \lambda^2 - \mu^2 = a^2 - b^2$$

L'équation du lieu cherché est donc : $\boxed{x^2 - y^2 = a^2 - b^2}$

a) si $a^2 > b^2$: hyperbole équilatère. Les deux foyers sont sur l'axe des x .

b) si $a^2 < b^2$: hyperbole équilatère. Les deux foyers sont sur l'axe des y .

c) si $a^2 = b^2$: le rectangle devient un carré et l'hyperbole dégénère en deux droites qui sont les diagonales du carré.

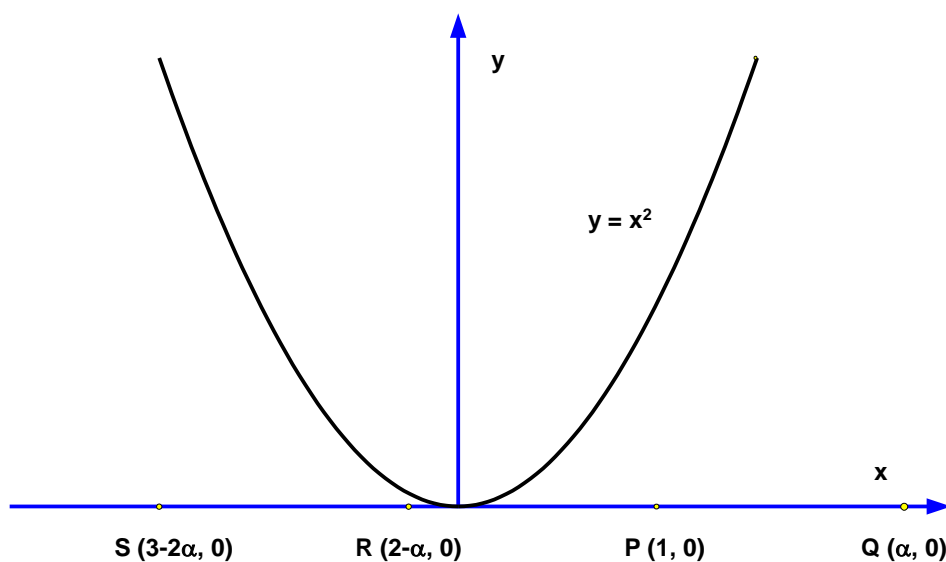


EXGAP048 – Liège, septembre 2001.

Dans un repère orthonormé, on considère une parabole d'équation $y = x^2$ et le point $P(1, 0)$.

Si Q est un point de l'axe Ox , on note R le symétrique de Q par rapport à P et S le symétrique de P par rapport à R .

- Si Q est de coordonnées $(\alpha, 0)$ quelles sont les coordonnées de R ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de α les points Q et S coïncident-ils ?
- Quelles sont les équations des tangentes à la parabole issues de Q ?
- Quelles sont les équations des tangentes à la parabole issues de S ?
- Quel est le lieu des points communs aux tangentes à P menées par Q et S et ne passant pas par le sommet de la parabole ?



$$a) |PQ| = |RP| = \alpha - 1$$

$$\text{Or } RP = RO + OP = RO + 1 \rightarrow \boxed{OR = 2 - \alpha}$$

$$b) OS = OR + RS = 2 - \alpha - \alpha + 1 = 3 - 2\alpha$$

$$Q \text{ et } S \text{ coïncideront quant : } \alpha = 3 - 2\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

c) Tangentes issues de Q :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = m(x - \alpha) \end{cases} \rightarrow x^2 - mx + m\alpha = 0$$

$$\text{Il faut que : } \Delta = m^2 - 4m\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4\alpha \end{cases}$$

$$\text{Les tangentes sont donc : } \boxed{y = 0} \text{ et } \boxed{y = 4\alpha(x - \alpha)}$$

d) Tangentes issues de S :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + m(2\alpha - 3) \end{cases} \rightarrow x^2 - mx + m(2\alpha - 3) = 0$$

$$\text{Il faut que : } \Delta = m^2 + 4m(2\alpha - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4(3 - 2\alpha) \end{cases}$$

$$\text{Les tangentes sont donc : } \boxed{y = 0} \text{ et } \boxed{y = 4(3 - 2\alpha)(x + 2\alpha - 3)}$$

e) Le lieu est donné par :

$$\begin{cases} y = 4\alpha(x - \alpha) \\ y = 4(3 - 2\alpha)(x + 2\alpha - 3) \end{cases} \rightarrow 4\alpha(x - \alpha) = 4(3 - 2\alpha)(x + 2\alpha - 3)$$

$$\rightarrow x(1 - \alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 3)$$

En vertu du point b), on peut simplifier par $1 - \alpha$

$$\rightarrow x = 3 - \alpha$$

Le lieu est donc une parabole d'équation:

$$y = 4\alpha(x - \alpha) \rightarrow \boxed{y = 4(3 - x)(2x - 3)}$$

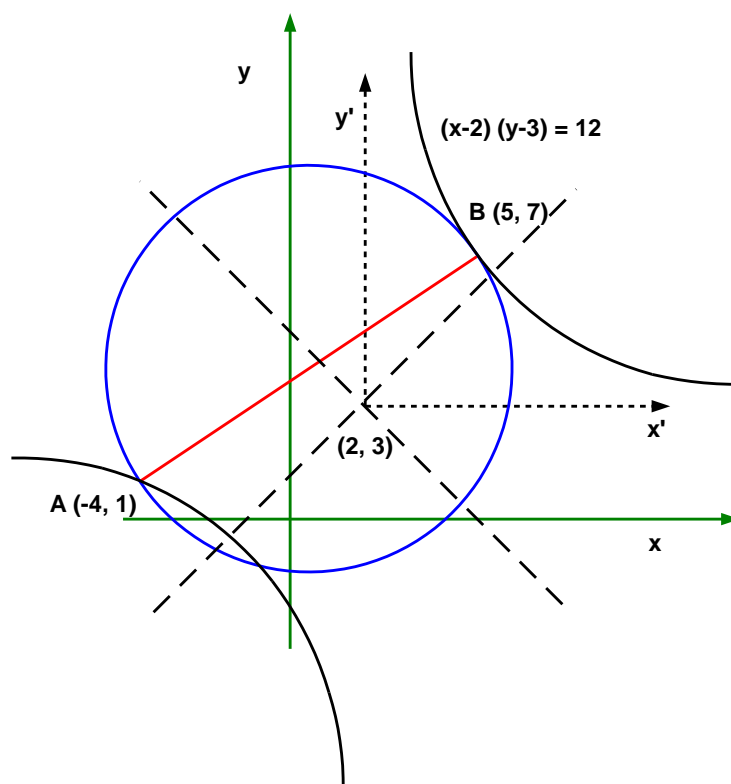
EXGAP049 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

On donne une conique d'équation :

$$(x-2)(y-3)=12$$

On demande :

- D'en préciser la nature
 - D'en donner les coordonnées du centre
 - De donner l'équation de son ou de ses axe(s) de symétrie.
- d) On coupe cette conique par la droite d d'équation $3y = 2x + 11$. Calculer les coordonnées des points d'intersections (A et B) de d avec la conique.
- e) D'écrire l'équation du lieu des points d'où l'on voit le segment AB sous un angle droit.



a) Il s'agit d'une hyperbole équilatère.

b) Son centre est le point $(2, 3)$. Par rapport à un repère (x', y') centré en $(2, 3)$, son équation est : $x'.y' = 12$

c) Les axes de symétrie sont $y' = x'$ et $y' = -x'$ dans le repère (x', y') .

→ Dans le repère (x, y) , $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

d) Intersection avec $d \equiv 3y = 2x + 11$

$$\begin{cases} xy - 2y - 3x - 6 = 0 \\ 3y = 2x + 11 \end{cases} \rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow y = 7 \\ x = -4 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

e) C'est un cercle de centre O et de rayon égal à $AB/2$

Coordonnées du centre $O[(5-4)/2, (7+1)/2]$ soit $[1/2, 4]$

$$R^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{(5 - (-4))^2 + (7 - 1)^2}{4} = \frac{117}{4}$$

$$\text{Equation du cercle : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{117}{4}$$