Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 5

EXGAP050 – EXGAP059

http://www.matheux.be.tf

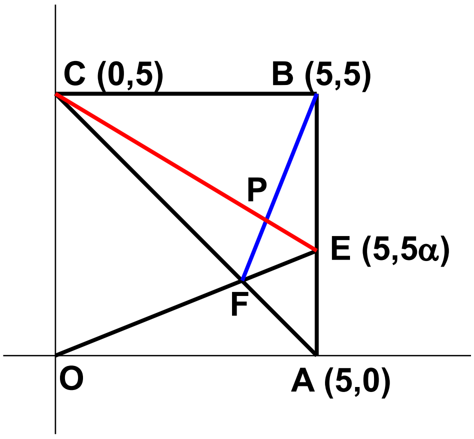
Jacques Collot

décembre 03

EXGAP050 – Bruxelles, juillet 2000.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne les points fixes A (5, 0), B (5, 5) et C (0, 5).
Une droite mobile, passant par O, coupe la droite AB en E et la droite AC en F. Les droites BF et CE se coupent en P.

a) Etablissez une équation cartésienne du lieu géométrique du point P.
b) Quelle est la nature de ce lieu ? Déterminer la position de son centre de symétrie s'il existe.
c) Construisez et représentez ce lieu en prenant comme unité le centimètre.



$$a)\ E\left(\ 5, 5\alpha\right) \rightarrow OE \equiv y = \alpha x$$

$$CA \equiv \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \rightarrow y = 5 - x$$

$$CE \equiv y = (\alpha - 1)x + 5$$

$$F \equiv \begin{cases} y = \alpha x \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{\alpha + 1} \\ y = \dfrac{5\alpha}{\alpha + 1} \end{cases}$$

$$BF \equiv \frac{y - 5}{\dfrac{5\alpha}{\alpha + 1} - 5} = \frac{x - 5}{\dfrac{5}{\alpha + 1} - 5} \rightarrow y = \frac{x - 5}{\alpha} + 5$$

Lieu de P est obtenu en éliminant α :

$$\begin{cases} y = (\alpha - 1)x + 5 \\ y = \dfrac{x - 5}{\alpha} + 5 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{x - 5}{y - 5} \rightarrow (y - 5)^2 = x(x - y)$$

$$\rightarrow \boxed{x^2 - xy - y^2 + 10y - 25 = 0}$$

b) C'est une hyperbole.

Les coordonnées du centre de symétrie s'obtiennent en prenant les dérivées partielles par rapport à x et y (On obtient deux diamètres)

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x - 2y + 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow O'(2, 4)$$

On notera que les deux diamètres sont perpendiculaires.

On pouvait obtenir aussi les coordonnées du centre en faisant la réduction de l'équation. Pour cela il faut d'abord faire disparaître le terme en xy par rotation des axes.

Cependant, comme on connait déjà les coordonnées de O', il est plus simple de d'abord faire une translation des axes au point O'.

Soit : $x' = x + 2$ et $y' = y + 4$

$$\rightarrow (x'+2)^2 - (x'+2)(y'+4) - (y'+4)^2 + 10(y'+4) - 25 = 0$$

$$x'^2 - x'y' - y'^2 = 5$$

Le terme en y a disparu.

Faisons maintenant une rotation des axes pour faire disparaître le terme en xy.

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} \quad (\text{pour l'équation } ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0)$$

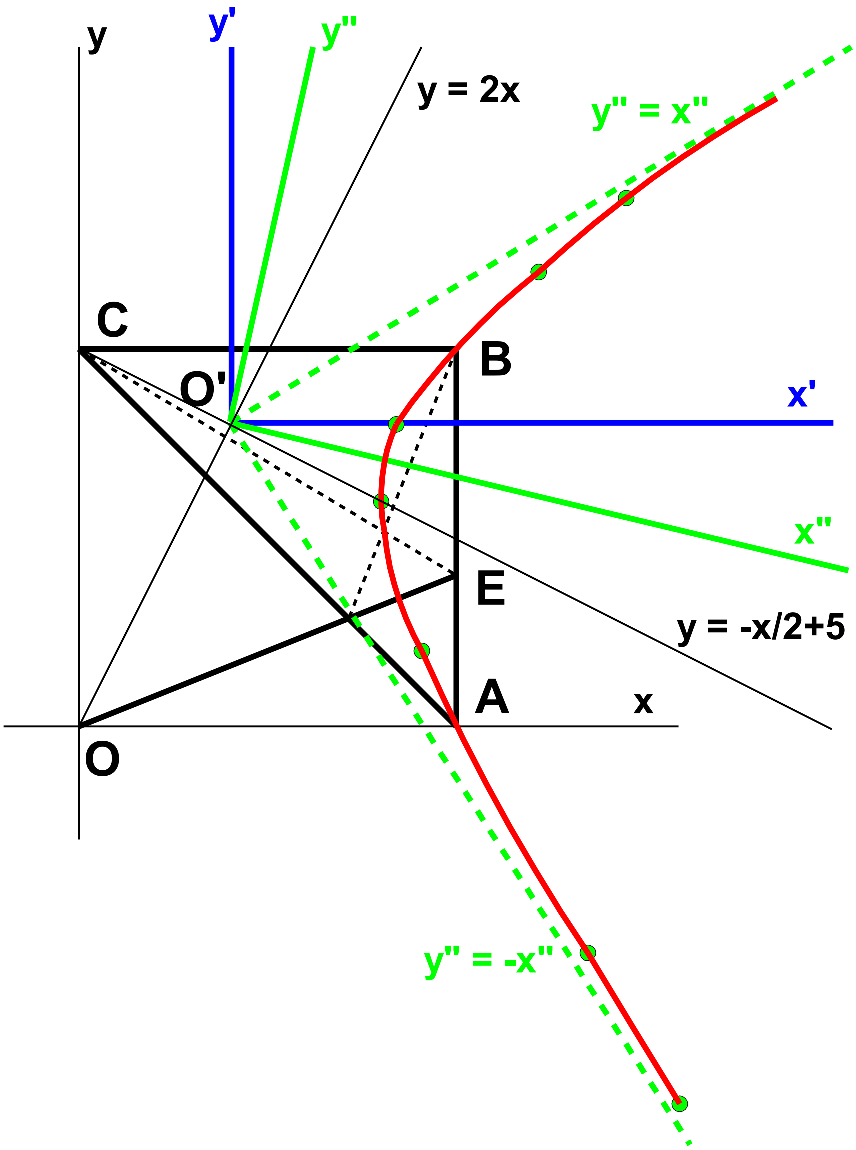
$$\rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -13.28° \rightarrow \cos\alpha = 0.97 \quad \sin\alpha = -0.23$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = 0.97\,x'' - 0.23\,y'' \\ y' = -0.23\,x'' + 0.97\,y'' \end{cases}$$

$$\rightarrow (0.97x'' + 0.23y'')^2 - (0.97x'' + 0.23y'')(-0.23x'' + 0.97y'') - (-0.23x'' + 0.97y'')^2 = 5$$

$$\rightarrow 1.118x''^2 - 1.118y''^2 \rightarrow \boxed{\frac{x''^2}{2.115^2} - \frac{y''^2}{2.115^2} = 1}$$

C'est bien une hyperbole équilatère.


y
y'
y"
y = 2x
y" = x"
C
B
O'
x'
x"
E
y = -x/2+5
A
x
O
y" = -x"

Compléments

Réduction de l'équation de la conique par la méthode des vecteurs propres.

Soit la conique : $x^2 - xy - y^2 = 5$

La matrice de cette équation est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Calculons les valeurs propres : $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda) + \frac{1}{4} = 0$

$\rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Ce qui nous permet de déterminer le premier vecteur propre $\overrightarrow{v_1}$ puisque

$$A.\overrightarrow{v_1} = \lambda.\overrightarrow{v_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}x_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}x_2 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_1} : \begin{pmatrix} 1 \\ +2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

L'angle α fait entre $\overrightarrow{v_1}$ et l'axe des x est $\tan\alpha = \frac{+2-\sqrt{5}}{1}$

$\rightarrow \alpha = -13.28°$ qui est bien le même angle que celui trouvé précédement.

De même, on détermine $\overrightarrow{v_2}$: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}x_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}x_2 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_2} : \begin{pmatrix} -2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = 0$ donc qu'ils sont orthogonaux.

On peut maintenant écrire les matrices P et D

$$P = \left(\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A.P = P.D$

$$A.P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{5}{2}+\sqrt{5} \\ -\frac{5}{2}+\sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P.D = \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{5}{2}+\sqrt{5} \\ -\frac{5}{2}+\sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

On peut maintenant calculer les vecteurs propres unitaires :

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\| \overrightarrow{v_1} \right\|} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\left\| \overrightarrow{v_1} \right\|} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}$$

La matrice de rotation des axes est dés lors :

$$R = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}. \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$$

La réduction de la conique sera donc obtenue par le changement d'axes suivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(x' + \left(-2+\sqrt{5}\right)y'\right) \\ y = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(\left(2-\sqrt{5}\right)x' + y'\right) \end{cases}$$

On remplace dans la conique, et après simplifications, on a :

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x'^2 + y'^2\right) = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x'^2}{2\sqrt{5}} - \frac{y'^2}{2\sqrt{5}} = 1}$$

qui est bien une hyperbole équilatère

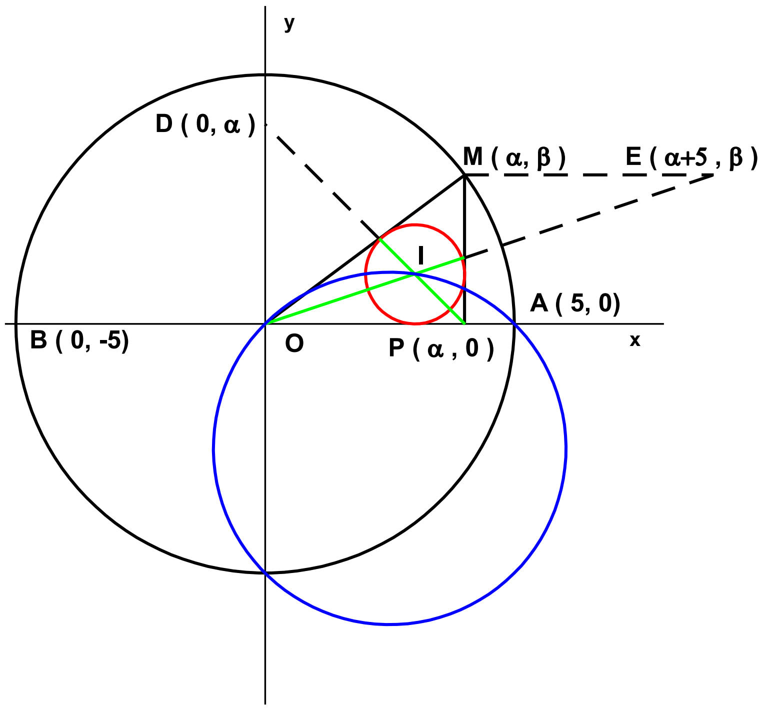
EXGAP051 – Bruxelles, septembre 2000.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne les points fixes A (5, 0), B (-5 , 0).

Un point M parcourt le cercle γ de diamètre BA.

Par M , on abaisse sur BA la perpendiculaire MP (P est situé sur BA).

Déterminer le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle OMP.



Soient α et β, les coordonnées de M

I centre du cercle inscrit est situé à l'intersection des bissectrices PD et OE.

L'équation de PD est : $y = \alpha - x$

L'équation de EO peut s'obtenir en considérant que la pente de OE répond à l'équation : $m_{OM} = \dfrac{2m_{OE}}{1-m_{OE}^{\ 2}}$ $\left(\text{C'est la formule : } \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$

Il est plus simple de remarquer que OE est la diagonale du losange OMEP

$\rightarrow\ OE \equiv y = \dfrac{\beta}{\alpha+5}x$

Le lieu s'obtient en élimant α et β dans le système :

$$\begin{cases} y = \alpha - x \\ y = \dfrac{\beta}{\alpha+5}x \\ \alpha^2+\beta^2 = 5^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (x+y)^2 + (x+y+5)^2\frac{y^2}{x^2} = 5^2$$

$$\rightarrow x^2(x+y)^2 + (x+y+5)^2 y^2 = (5x)^2$$

$$(x+y+5)^2 y^2 = (5x)^2 - x^2(x+y)^2 = x^2\left[5^2-(x+y)^2\right]$$

$$= x^2(5-x-y)(x+y+5)$$

$$\rightarrow (x+y+5)y^2 = x^2(5-x-y)$$

$$xy^2+y^3+5y^2 = 5x^2-x^3-x^2y$$

$$x^3+y^3+x^2y+xy^2+5y^2-5x^2 = 0$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y)+5(x+y)(y-x) = 0$$

$$x^2-xy+y^2+xy+5y-5x = 0$$

$$x^2+y^2+5y-5x = 0$$

C'est l'équation d'un cercle qui passe par l'origine et le point A.

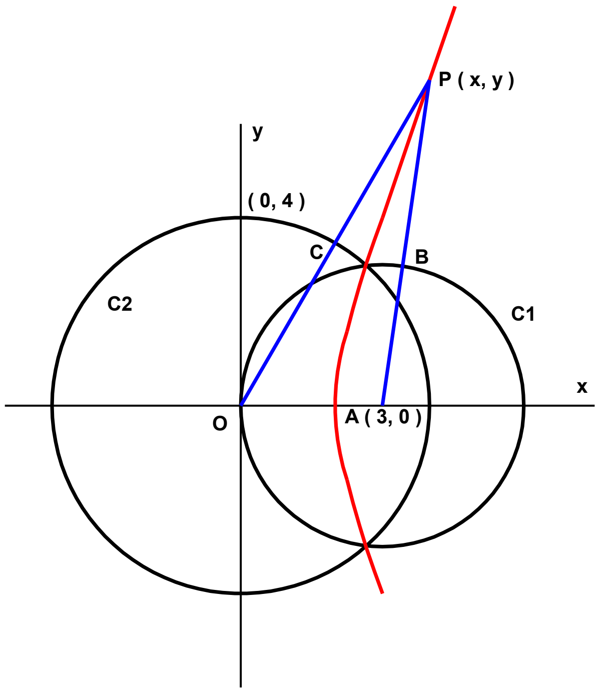
Réduisons le : $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5^2}{2} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Son centre $\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ son rayon : $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Note : Il existe quatre cercles correspondant à chacun des quatre quadrants.

EXGAP052 – Bruxelles, juillet 2000.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on considère deux cercles C1 et C2.
C1 passe par l'origine et est centré au point de coordonnées (3, 0).
C2 est centré à l'origine et contient le point de coordonnées (0, 4).
Déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique des points situés à égale distance des deux cercles.
Quelle est la nature de ce lieu ?
Représentez-en une partie en prenant le cm pour unité.



$$|PB| = |PA| - 3 = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 3$$

$$|PC| = |PO| - 4 = \sqrt{x^2 + y^2} - 4$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 3 = \sqrt{x^2 + y^2} - 4$$

$$(x-3)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 6x - 8$$

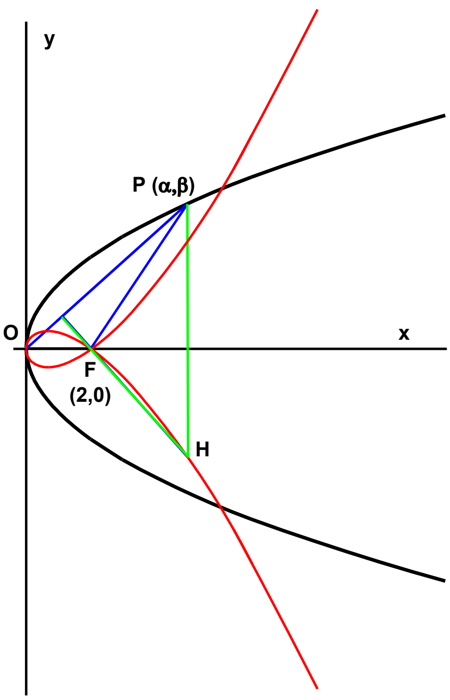
$$x^2 + y^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$\boxed{8x^2 - y^2 - 24x + 16 = 0}$$

C'est une hyperbole de centre $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

EXGAP053 – Bruxelles, septembre 2000.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on considère un point courant P de la parabole $Y^2 = 4X$.
Déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique de l'orthocentre du triangle POF, ou F est le foyer de la parabole.
Représenter une partie de ce lieu en prenant le cm pour unité.



Foyer $F:(0,2)$

$PH \equiv x = \beta$

$OP \equiv y = \frac{\beta}{\alpha}x \rightarrow m_{FH} = -\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow FH \equiv y = -\frac{\alpha}{\beta}(x-2)$

Il suffit d'éliminer α et β entre :

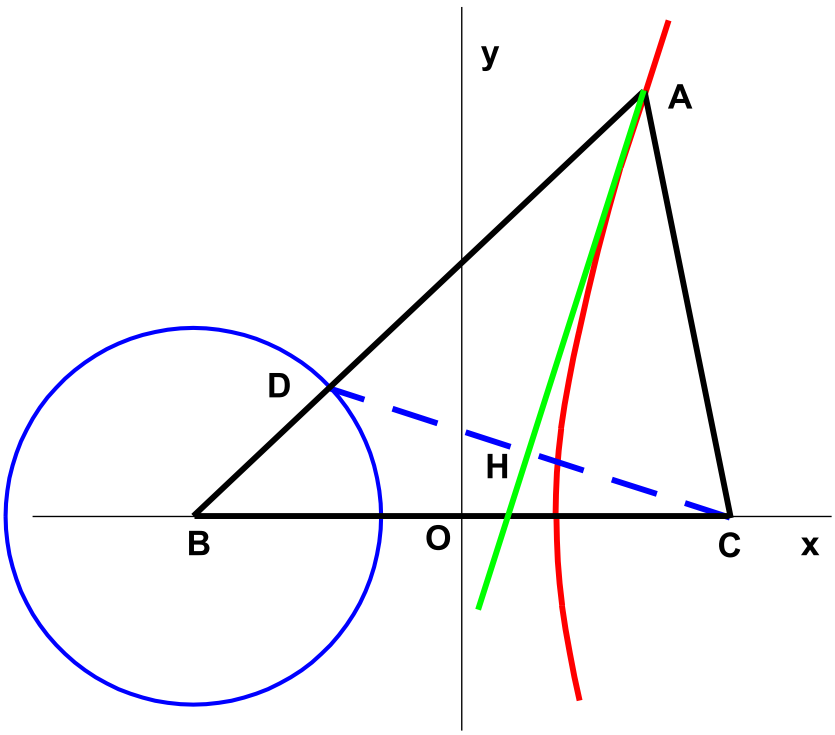
$$\begin{cases} x = \beta \\ y = -\frac{\alpha}{\beta}(x-2) \rightarrow \boxed{y^2 = \frac{x}{4}(x-2)^2} \\ \beta^2 = 4\alpha \end{cases}$$

Le lieu passe par le foyer et l'origine.

EXGAP054 – Bruxelles, juillet 2002.

Soit un triangle quelconque ABC. Déterminer le lieu géométrique du pied H de la perpendiculaire abaissée de C sur la bissectrice de l'angle BAC, si BC est fixe et si la différence BA – CA vaut d (constante >0)

NB : On appelle D le point de rencontre de CH et AB.
Représenter le lieu en prenant BC = 12 cm et d = 5 cm.



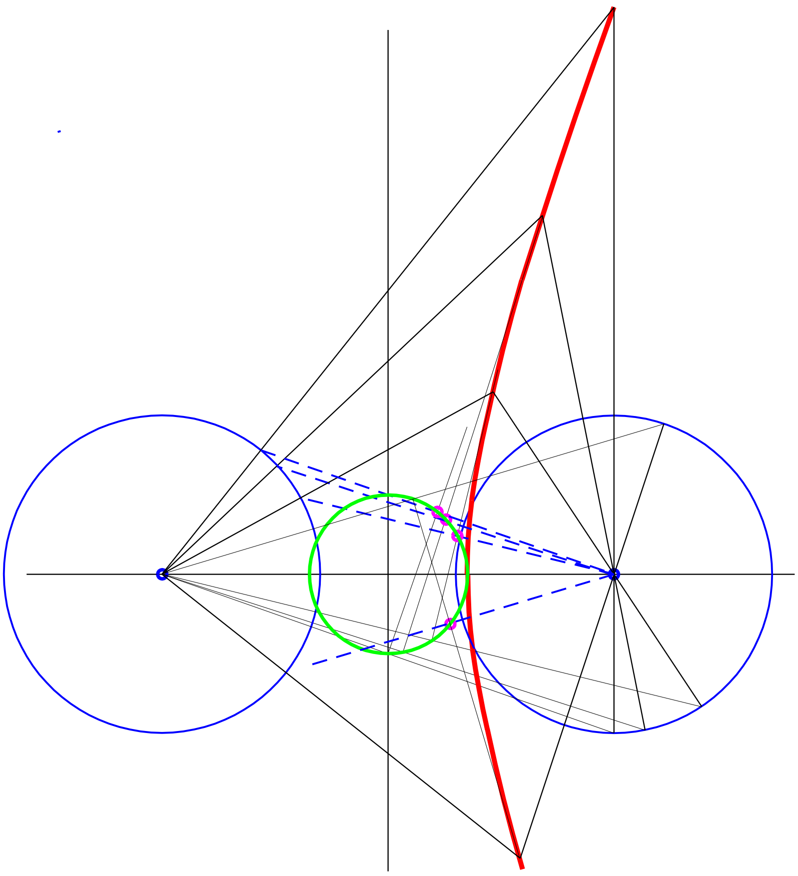
Puisque $BA - CA = d = cte,$ le point A parcourt une branche d'hyperbole.
(C'est la définition d'une hyperbole).
De plus, autre propriété de l'hyperbole, la bissectrice de l'angle BAC est la tangente à l'hyperbole au point A.

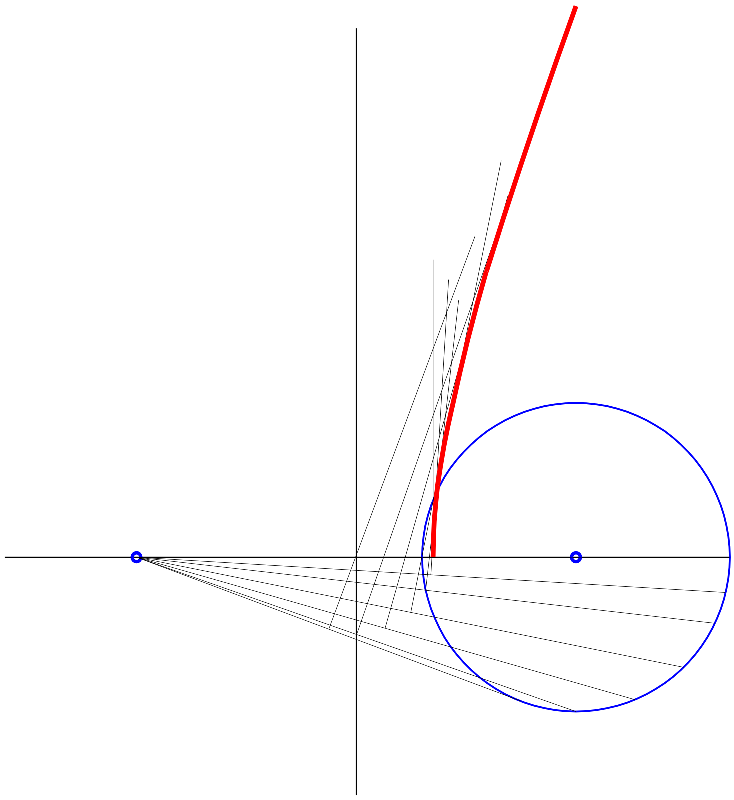
Partant de là, il est tentant de rechercher d'écrire l'équation de l'hyperbole, de sa dérivée au point A (la bissectrice) ainsi que l'équation de la perpendiculaire.
En mélangeant ces équations, on devrait trouver le lieu cherché. Malheureusement cette méthode conduit à des calculs épouvantables.

Il convient donc de s'interroger pourquoi l'énoncé met l'accent sur le point D.
On s'aperçoit que le point D est toujours situé à une distance d du point B, car le triangle ACD est isocèle et que $AC = AD$.
De plus, le point H est le milieu du segment DC. Si les coordonnées de H sont (α, β), les coordonnées de D sont $(2\alpha - c, 2\beta),$ avec $2c = BC$.
Comme le lieu de D est : $(x+c)^2 + y^2 = d^2$
Le lieu de H est donc : $(2\alpha - c + c)^2 + (2\beta)^2 = d^2$
Soit : $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$
C'est un cercle de centre O et de rayon $\dfrac{d}{2}$

Note 1 : Le lieu est le cercle homothétique du cercle de centre $B,$ par l'homothétie de centre C et de puissance $\dfrac{1}{2}$. On aurait pu donc écrire l'équation directement sans faire de calcul.

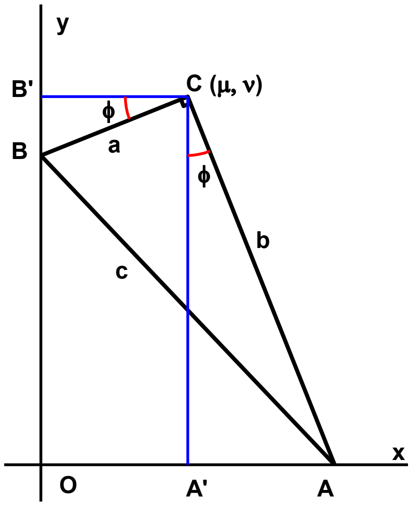
Note 2 : Voir *Espace Math* édition 2000, exercice 531 page 320.
Cette propriété permet la construction de l'hyperbole en construisant de nombreuses tangentes, comme montrer à la dernière figure.





EXGAP055 – Bruxelles, septembre 2002.

Les extrémités de l'hypoténuse d'un triangle rectangle glissent sur les côtés d'un angle fixe.
Déterminer le lieu géométrique du sommet de l'angle droit du triangle.
Représenter le lieu dans le cas d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure 10 cm.



Les angles BB'C et AA'C sont égaux car leurs côtés sont perpendiculaires.

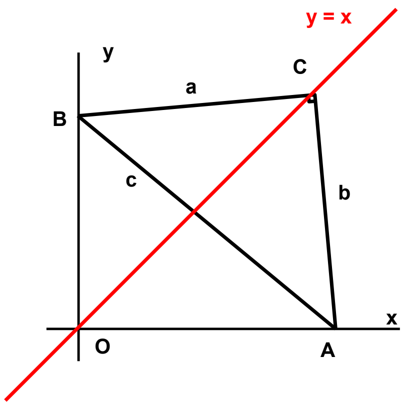
$\rightarrow$ Les triangles B'CB et A'CA sont semblables

$$\rightarrow \frac{B'C}{A'C} = \frac{CB}{CA} \rightarrow \frac{\mu}{\nu} = \frac{a}{b} \rightarrow \nu = \frac{a}{b}\mu$$

Le lieu est donc une droite d'équation : $\boxed{y = \frac{a}{b}x}$

Il existe une droite équivalente pour les deuxième et quatrième quadrants.

Dans le cas d'un triangle isocèle rectangle, le lieu est $y = x$

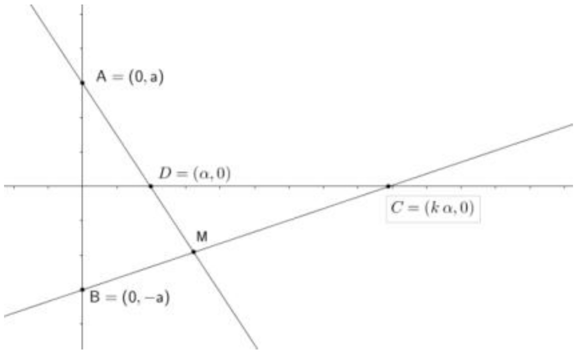


EXGAP056 – EPL, UCL, LLN, série 1.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé OXY, on considère un segment de droite AB de longueur $2a$, aligné sur OY et centré à l'origine.

Sur l'axe OX se déplacent deux points mobiles C et D, tels que $x_C = k \cdot x_D$ (k constant).

- Déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points M d'intersection des droites AD et BC.
- Dessiner les différents éléments et le lieu, avec $a = 6$ cm et $k = 0.5$



$$AD \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{a} = 1 \qquad (1)$$

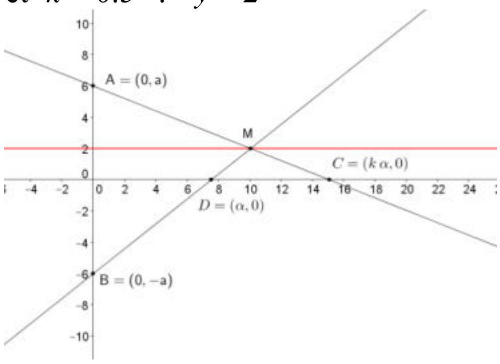
$$BC \equiv \frac{x}{k\alpha} - \frac{y}{a} = 1 \qquad (2)$$

Pour obtenir le lieu de $M = AD \cap BC$, il suffit d'éliminer α.

$(1) \Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \left(1 - \frac{y}{a}\right)$. On injecte dans $(2) \Rightarrow \frac{1}{k}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \frac{y}{a} = 1$

$\rightarrow \boxed{y = a\,\frac{1-k}{k+1}}$ Equation d'une droite parallèle à l'axe des x.

Pour $a = 6$ et $k = 0.5$: $y = 2$



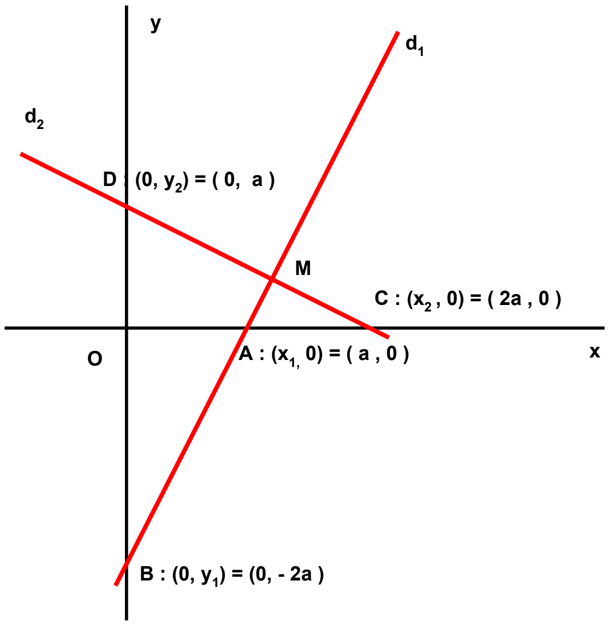
EXGAP057 – Louvain, juillet 1999, série 2.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé OXY, on considère un point M par lequel on fait passer deux droites perpendiculaires d_1 et d_2.

d_1 est de pente $= 2$ et ses intersections avec les axes de coordonnées sont $(x_1, 0)$ et $(0, y_1)$.

Les intersections de d_2 avec ces mêmes axes sont $(x_2, 0)$ et $(0, y_2)$.

- Déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points M tels que $x_1 . y_1 + x_2 . y_2 = 0$
- Interpréter ce lieu.
- Dessiner les différents éléments de ce lieu.



Eliminons le cas trivial où M est à l'origine.

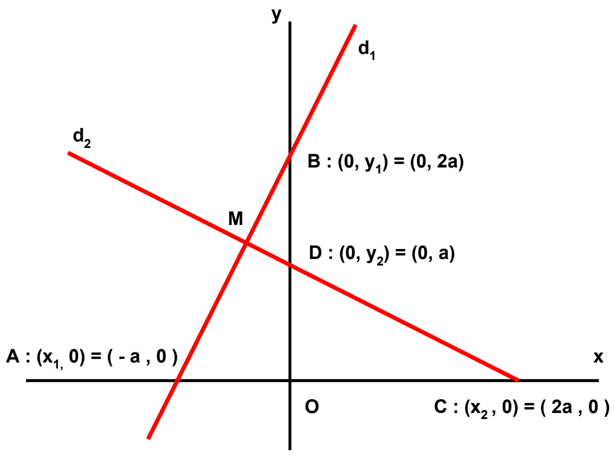
Soit M dans le premier cadran. La pente de d_1 étant de 2, si $x_1 = a$

$$\rightarrow y_1 = -2a \rightarrow x_2 y_2 = 2a^2 \quad \text{et comme } \frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{2} \rightarrow x_2 = 2a \text{ et } y_2 = a$$

$\big($On ne fait que traduire que les triangles OAB et ODC sont égaux$\big)$

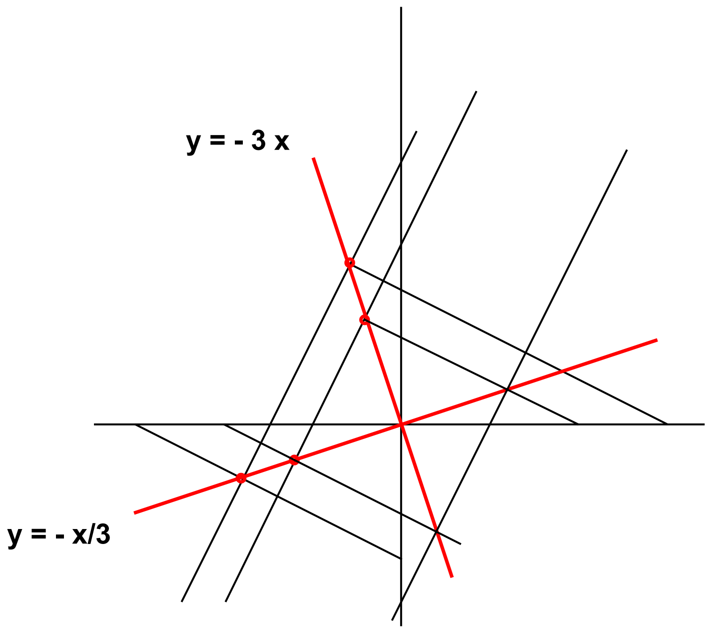
Dés lors : $\begin{cases} d_1 \equiv \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{2a} = 1 \\ d_2 \equiv \dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{a} = 1 \end{cases}$ On élimine a $\rightarrow$ $\boxed{y = \dfrac{x}{3}}$

Même résultat si M est dans le troisième cadran.



Si M est dans le deuxième où le quatrième quadrant, en faisant les calculs mutatis mutandis, on obtient : $\boxed{y=-3x}$

Le lieu est dessiné ci-dessous. On remarque que les deux droites qui décrivent le lieu sont les diagonales des carrés déterminés par les droites d_1 et d_2

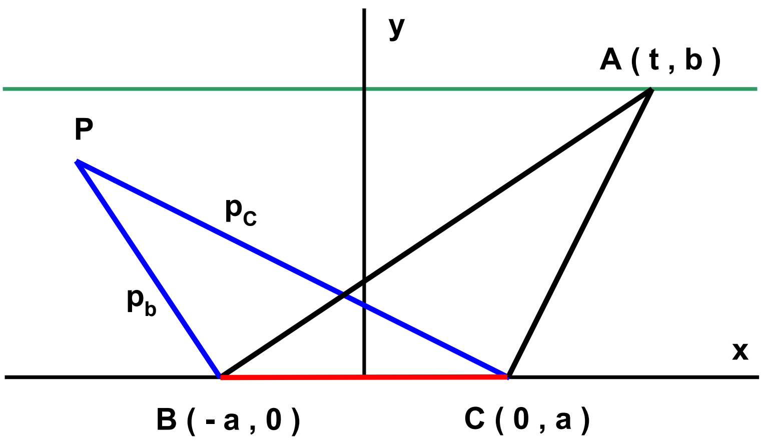


EXGAP058 – Louvain, septembre 1999.

Soit un triangle ABC dont la base BC, de longueur $2a$, est fixe, et le sommet A se déplace sur une parallèle à BC, tracée à distance b de BC.
En B, on mène p_B perpendiculaire à AB ; en C, on p_C perpendiculaire à AC.

- Déterminer l'équation cartésienne du lieu de l'intersection des perpendiculaires p_B et p_C
- Quelle est la nature de ce lieu et quels en sont les éléments particuliers (axes, sommets) ?

Conseil : Placer BC sur l'axe des abscisses, symétriquement autour de l'origine.



$$AB \equiv y = \frac{b}{t+a}(x+a) \quad \to \quad p_B \equiv y = -\frac{t+a}{b}(x+a) \qquad (1)$$

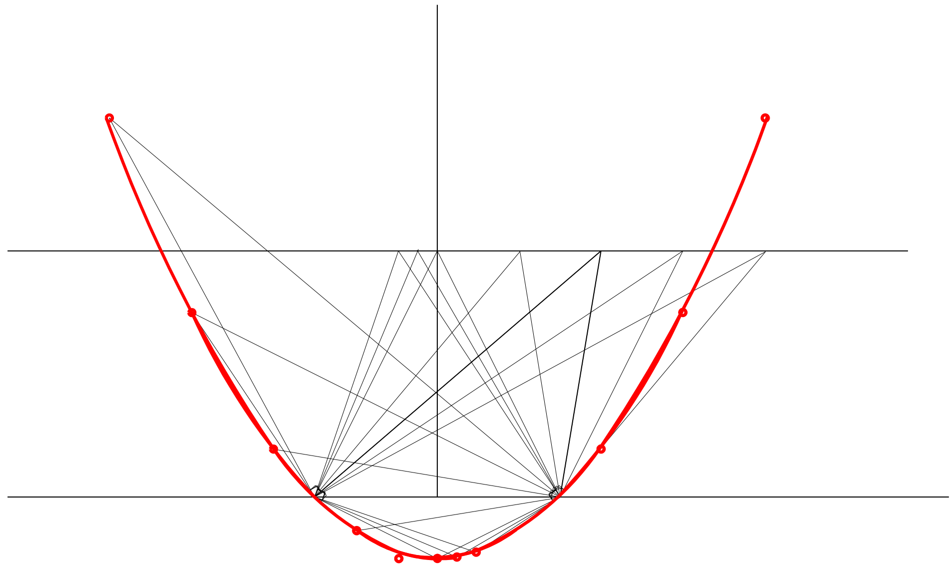
$$CA \equiv y = \frac{b}{t-a}(x-a) \quad \to \quad p_C \equiv y = -\frac{t-a}{b}(x-a) \qquad (2)$$

Eliminons t entre (1) et (2), on obtient :

$$y = \frac{1}{b}(x-a)(x+a)$$

C'est une parabole d'axe OY et de sommet : $\left(0,\ -\frac{a^2}{b}\right)$

Le lieu est représenté ci-dessous.

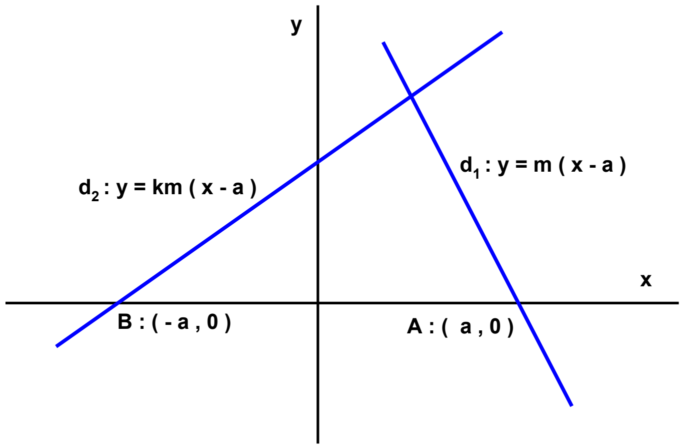


EXGAP059 – Louvain, juillet 2000, série 1.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé OXY, on considère deux droites mobiles d_1 et d_2.

d_1 passe par le point fixe (a, 0) et a un coefficient angulaire variable m.
d_2 passe par le point fixe ($-a$, 0) et a un coefficient angulaire variable km (k constant).

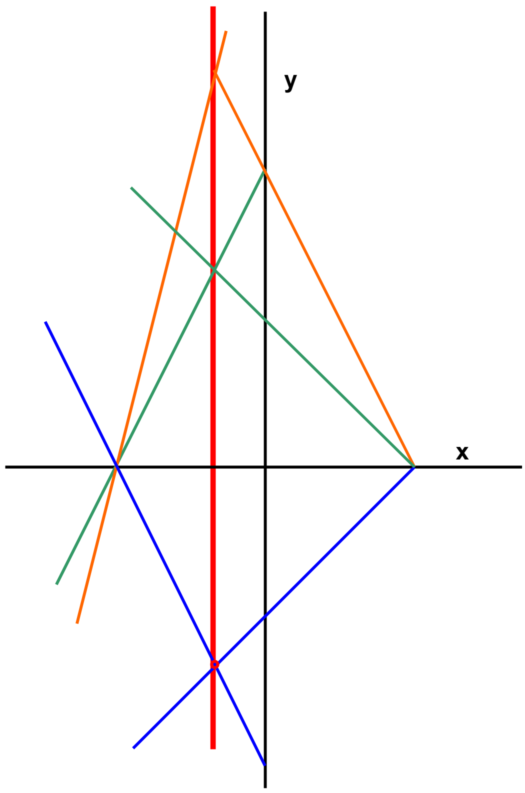
- Déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points M d'intersection des droites d_1 et d_2.
- Analyser et commenter ce lieu
- Dessiner les différents éléments et le lieu avec $a = 4$ cm ; $k = -2$



$$\begin{cases} d_1 \equiv y = m(x-a) \\ d_2 \equiv y = km(x+a) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = a\dfrac{1+k}{1-k} \\ y = \dfrac{2amk}{1-k} \end{cases}$$

x est indépendant de m. Le lieu géométrique est une droite d'équation : $x = a\dfrac{1+k}{1-k}$

Si $a = 4$; et $k = -2 \quad \rightarrow \quad x = -\dfrac{4}{3}$


y
x