Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 6

EXGAP060 – EXGAP069

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

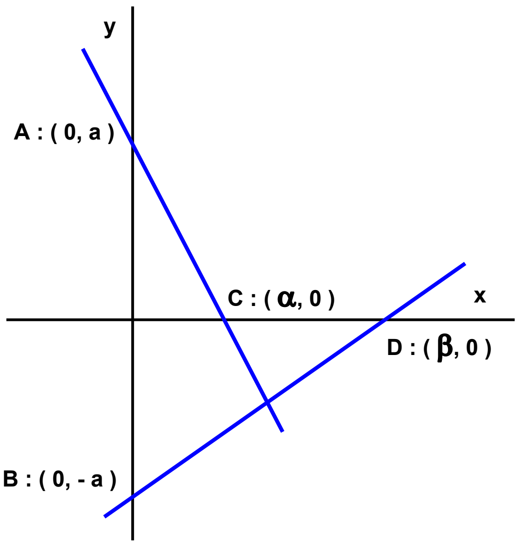
Avril 04

EXGAP060 – Louvain, juillet 2000, série 2.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *OXY*, on considère deux droites mobiles *AC* et *BD*.

AC passe par le point fixe *A* (0, *a*) et le point mobile *C* sur *OX*.
BD passe par le point fixe *B* (0, -*a*) et le point mobile *D* sur *OX*.
C et *D* sont liés par le fait que *CD* = *k OD* où *k* est une constante.
(*CD* et *OD* sont des vecteurs ou des segments orientés).

- Déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points *M* d'intersection des droites *AC* et *BD*.
- Analyser et commenter ce lieu
- Dessiner les différents éléments et le lieu avec *a* = 4 cm ; *k* = 1.2

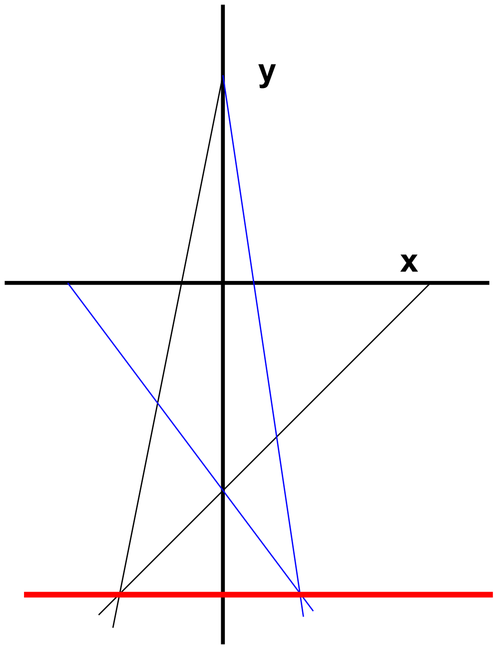


$$\beta - \alpha = k\beta \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{1-k}$$

$$\begin{cases} AC \equiv \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{a} = 1 \\ BD \equiv \dfrac{1-k}{\alpha} x - \dfrac{y}{a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} = 1 - \dfrac{y}{a} \\ \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{1}{1-k}\left(1 + \dfrac{y}{a}\right) \end{cases} \rightarrow \; y = \frac{ak}{k-2}$$

C'est une droite parallèle à l'axe des *x*

Si $a = 4$ et $k = 1.2 \quad \rightarrow \quad y = -6$

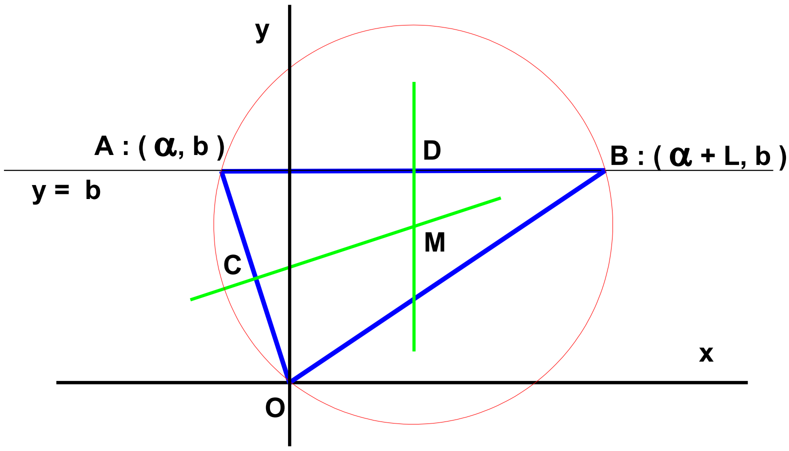

y
x

EXGAP061 – Louvain, septembre 2000.

Soit un triangle variable *OAB* dont le sommet *O* est à l'origine et le côté *AB* (de longueur constante *L*) sur la droite $y = b$.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle, ainsi que sa nature.

- Si $L = 2\,b$, écrire l'équation explicite $y = f(x)$ du lieu.
- Dessiner le lieu dans le cas 2, avec $b = 4$ cm.



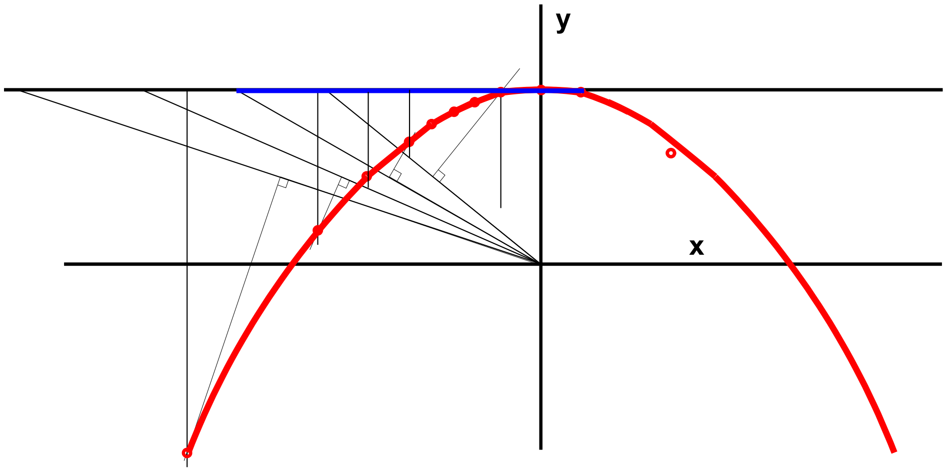
Le point M, centre du cercle cironscrit au triangle ABO, est déterminé par l'intersection des médiatrices CM et DM

$$\begin{cases} CM \equiv y - \dfrac{b}{2} = -\dfrac{\alpha}{b}\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right) \\ DM \equiv x = \alpha + \dfrac{L}{2} \end{cases} \rightarrow y - \frac{b}{2} = -\frac{x - \frac{L}{2}}{b}\left(x - \frac{x - \frac{L}{2}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{x^2}{2b} + \frac{L^2}{8b} + \frac{b}{2}}$$ C'est l'équation d'une parabole d'axe Oy

Si $L = 2b \rightarrow \boxed{y = -\dfrac{x^2}{2b} + b}$ Le sommet est $(0, b)$

Si $b = 4 \rightarrow y = -\dfrac{x^2}{8} + 4$


y
x

EXGAP062 – Louvain, juillet 2001, série 1.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les éléments suivants :

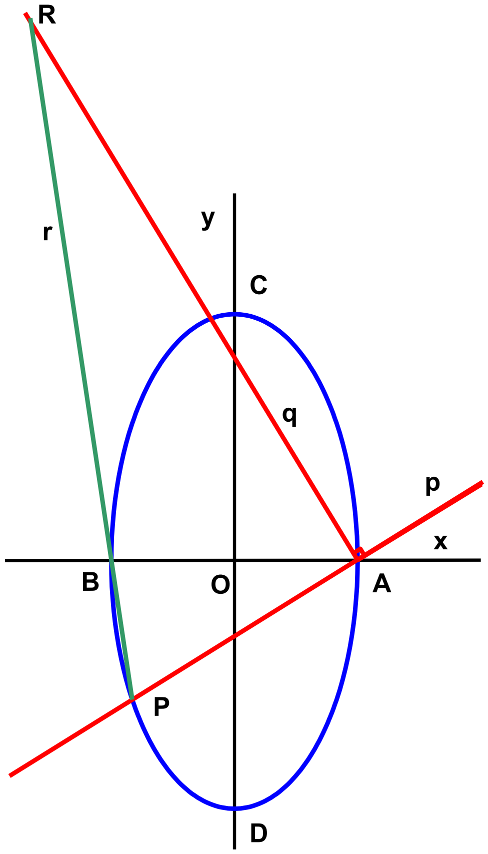
- Quatre points dont les coordonnées sont :

$$A: \quad (a,0) \qquad B: \quad (-a,0)$$
$$C: \quad (0,2a) \qquad D: \quad (0,-2a)$$

- Une ellipse e qui passe par ces quatre points,
- Deux droites mobiles p et q qui forment un angle droit mobile qui pivote autour de A
- Le point P qui est la seconde intersection de la droite p avec l'ellipse e
- Un troisième droite r qui passe par B et P.

On vous demande

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème.
2. D'écrire l'équation de l'ellipse e,
3. De déterminer les coordonnées du point P,
4. De déterminer le lieu des intersections des droites q et r.



a) Equation de l'ellipse : $e \equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4a^2}=1 \rightarrow 4x^2+y^2=4a^2 \quad (1)$

b) $p \equiv y = m(x-a) \qquad (2)$

On remplace dans (1) pour obtenir les coordonnées de P

$\rightarrow 4x^2+\left(m(x-a)\right)^2=4a^2 \rightarrow \left(4+m^2\right)x-2am^2x+a^2\left(m^2-4\right)=0$

On sait que $x=a$ est une solution de cette équation

Horner :

	x^2	x	x^0
	$4+m^2$	$-2am^2$	$a^2\left(m^2-4\right)$
a		$4a+am^2$	$4a^2-a^2m^2$
	$4+m^2$	$4a-am^2$	0

$\rightarrow (x-a)\left[\left(4+m^2\right)x^2+a\left(4-m^2\right)\right]=0 \quad \rightarrow x_P=a\dfrac{m^2-4}{m^2+4}$

On remplace dans (2) pour obtenir $y_P \quad \rightarrow \quad y_p=-\dfrac{8am}{m^2+4}$

c) $q \equiv y=-\dfrac{1}{m}(x-a) \qquad (3)$

L'équation de r s'obtient en exprimant que la droite passe par B et P.

$r \equiv \dfrac{y-0}{-\dfrac{8am}{m^2+4}-0}=\dfrac{x+a}{a\dfrac{m^2-4}{m^2+a}+a} \quad \rightarrow \quad y=-\dfrac{4}{m}(x+a) \quad (4)$

On élimine m entre (3) et (4) $\rightarrow$ le lieu recherché : $\boxed{x=-\dfrac{5}{3}a}$

C'est une droite parallèle à l'axe des y.

Modifié le 29 août 2004

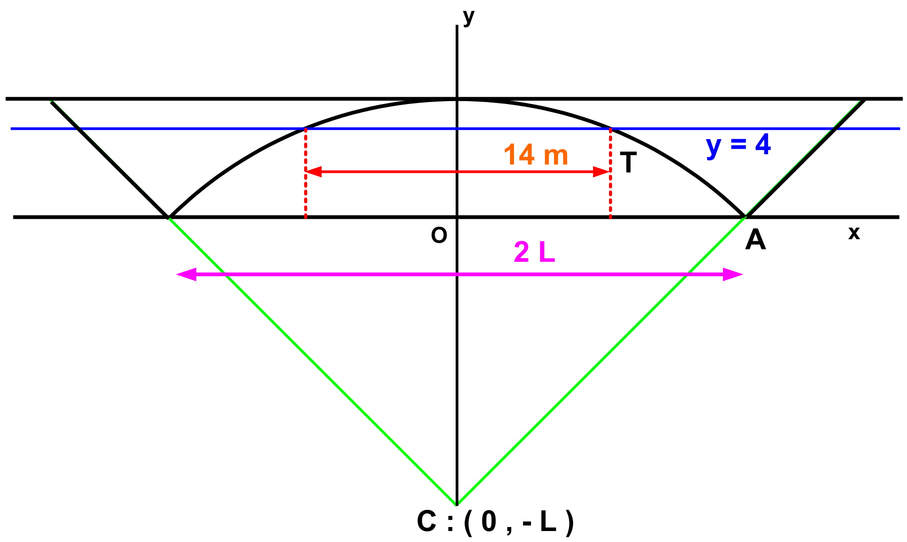
EXGAP063 – Louvain, juillet 2001, série 2.

On souhaite effectuer le dimensionnement d'un pont. Les contraintes architecturales et techniques sont les suivantes :

- Le pont se compose d'un arc de cercle dont les extrémités sont au niveau du sol et le sommet au milieu du pont,
- Un tablier horizontal repose sur l'arc de cercle.
- L'ouvrage d'art est coincé entre deux remblais dont la pente est 45° et qui sont le prolongement des rayons extrêmes de l'arc de cercle,
- La largeur à la base du pont vaut $2L$

On vous demande :

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. De déterminer la valeur L afin que quatre véhicules d'une hauteur de 4 m et d'une largeur de 3.5 m (soit une largeur totale de 14 m donc !) puissent être placés sous l'ouvrage d'art.



Le triangle COA est rectangle isocèle, car la pente des remblais est de 45°

$\rightarrow\ OA = \sqrt{2}\ L$. C'est le rayon du cercle de centre $C:(0,-L)$

Le schéma définit le système de coordonnées.

Les quatres véhicules pourront se placer sous le pont si le point T, tel que définit sur le schéma, a pour coordonnées (7, 4)

Ce point T est l'intersection du cercle et de la droite $y = 4$

$$\rightarrow\ x^2 + (y+L)^2 = 2L^2 \ \rightarrow\ 7^2 + (4+L)^2 = 2L^2 \ \rightarrow\ L^2 - 8L - 65 = 0$$

$$\rightarrow (L-13)(L+5) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{L = 13\ m}$$

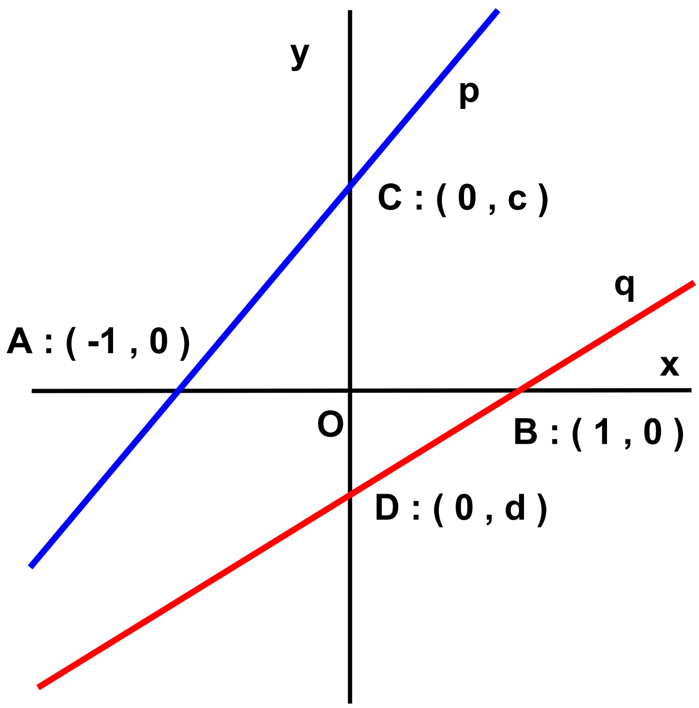
EXGAP064 – Louvain, septembre 2001.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé OXY, on considère les éléments suivants :

- Quatre points dont les coordonnées sont :
$$A:(-1,0) \quad B=(1,0) \quad C:(0,c) \quad D:(0,d)$$
- La droite p passant par A et C
- La droite q passant par B et D

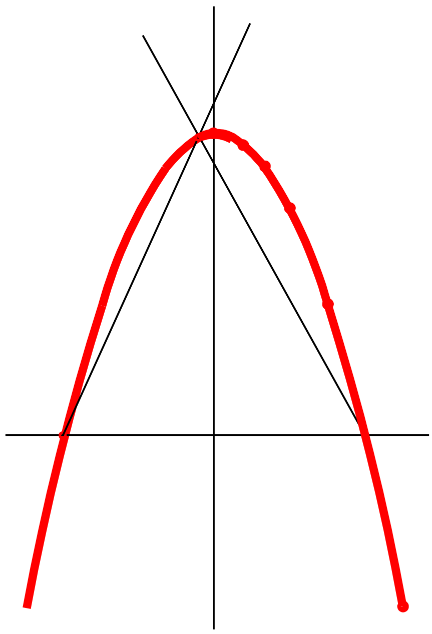
On vous demande :

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. D'écrire les équations des droites p et q en fonction des paramètres c et d
3. De déterminer le lieu de l'intersection des droites p et q si la somme de c et d vaut 4
4. De dessiner soigneusement ce lieu et de décrire la nature de la courbe obtenue.



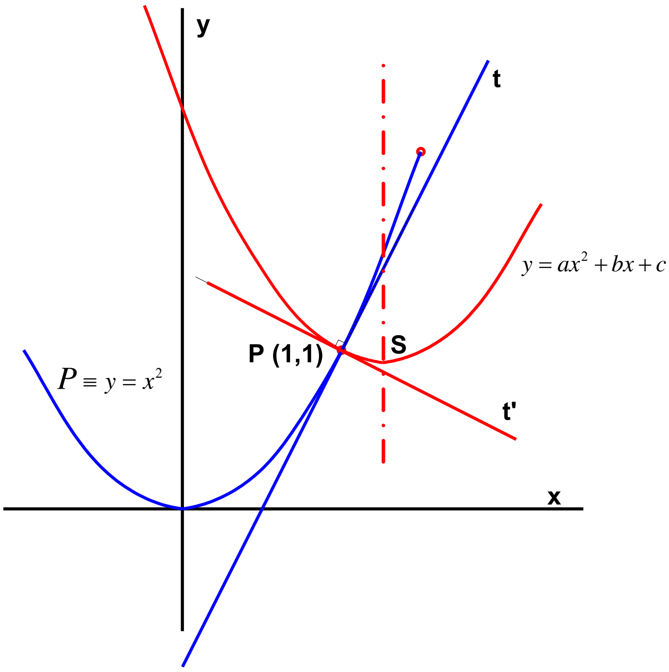
$$\begin{cases} p \equiv \dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{c} = 1 \\ q \equiv \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{d} = 1 \\ c + d = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{On élimine } c \text{ et } d \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 2 - 2x^2}$$

C'est une parabole d'axe Oy et de sommet : $(0, 2)$



EXGAP065 – Liège, juillet 2002.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy, on note $\boldsymbol{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et P le point de $\boldsymbol{P}$ d'abscisse 1. Quel est le lieu des sommets des paraboles d'axe parallèle à Oy et orthogonales à $\boldsymbol{P}$ en P (dire que deux paraboles sont orthogonales en P signifie qu'elles passent par P et que leurs tangentes en P sont perpendiculaires) ?



Soit $y = ax^2 + bx + c \quad (1)$ l'équation d'un parabole orthogonale à P.

Elle passe par $P(1,1) \rightarrow a + b + c = 1 \quad (2)$

Equation de $t \equiv y - 1 = 2(x-1)$

Equation de $t' \equiv y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-1)$

Equation de t' dérivée de $(1) \equiv y - 1 = (2a+b)(x-1)$

Par conséquent : $2a + b = -\dfrac{1}{2} \qquad (3)$

Coordonnées du sommet de la parabole (1) : $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} & (4) \\ y = -\dfrac{b^2}{4a} + c & (5) \end{cases}$

Il reste à éliminer a, b et c entre (2), $(3),(4)$ et (5)

$$\left.\begin{array}{l}(2) \rightarrow b=-\dfrac{1+4a}{2} \\ (4) \rightarrow b=-2ax\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4(x-1)} & (6) \\ b=-\dfrac{x}{2(x-1)} & (7)\end{cases}$$

$$\text{De } (5),(6),(7) \rightarrow y=-\frac{\left(\dfrac{x}{2(x-1)}\right)^2}{4\dfrac{1}{4(x-1)}} \rightarrow c=y+\frac{x^2}{4(x-1)} \quad (8)$$

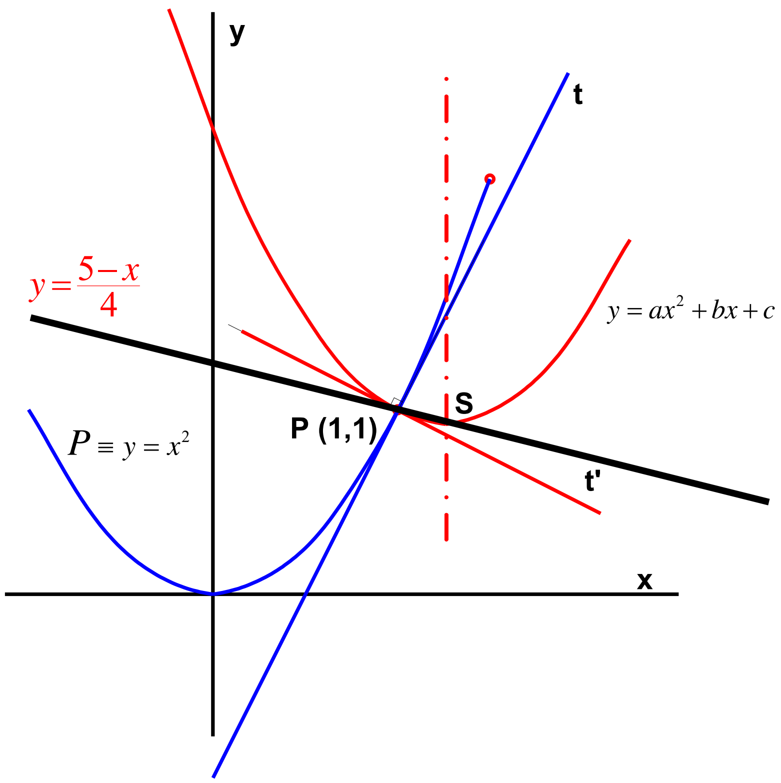
On remplace a, b, c dans (2) en utilisant $(6),(7),(8)$

$$\frac{1}{4(x-1)}-\frac{x}{2(x-1)}+y+\frac{x^2}{4(x-1)}=1$$

$$\rightarrow x^2+4xy-6x-4y+5=0$$

$$\rightarrow y=\frac{x^2-6x+5}{4(1-x)}=\frac{(x-1)(x-5)}{4(1-x)}=\frac{1}{4}(5-x)$$

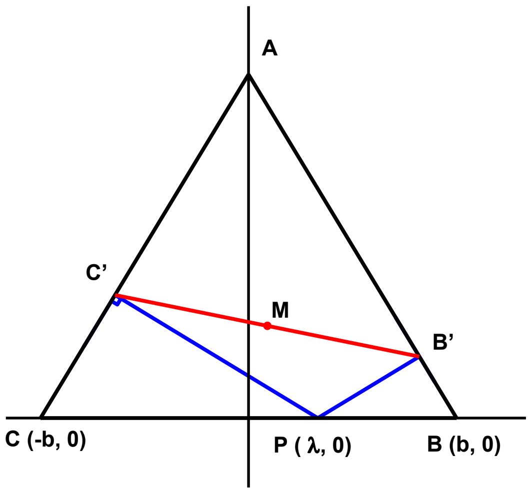
C'est une droite qui passe par P



EXGAP066 – Liège, septembre 2002.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy, on considère les points $A\ (0,\ a)$, $B\ (b,\ 0)$ et $C\ (-b,\ 0)$ formant un triangle isocèle ($a,b > 0$). On considère un point $P\ (\lambda,\ 0)$ variable sur Ox.

1. Quelles sont les coordonnées des pieds B' et C' des perpendiculaires abaissées de P sur AB et AC respectivement.
2. Quel est le lieu du milieu de [B', C'] lorsque P parcourt le *segment* [B, C]
3. Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à $B'C'$ menée par P ? Montrer qu'elle passe par un point fixe quand P parcourt l'axe Ox.



$$1)\ \begin{cases} AB \equiv y = -\dfrac{a}{b}(x-b) \\ PB' \equiv y = \dfrac{b}{a}(x-\lambda) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{B'} = \dfrac{b\left(a^2+\lambda b\right)}{a^2+b^2} \\ y_{B'} = \dfrac{ab(b-\lambda)}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC \equiv y = \dfrac{a}{b}(x+b) \\ PC' \equiv y = -\dfrac{b}{a}(x-\lambda) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{C'} = \dfrac{b\left(b\lambda-a^2\right)}{a^2+b^2} \\ y_{C'} = \dfrac{ab(\lambda+b)}{a^2+b^2} \end{cases}$$

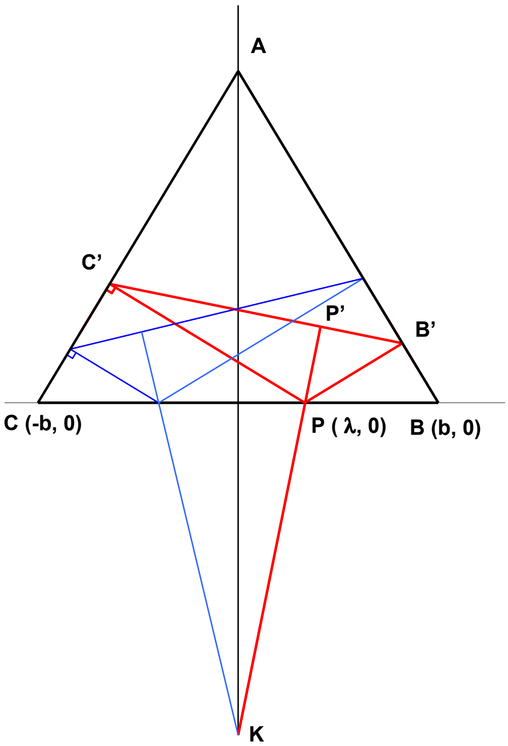
2) Donc : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_{B'}+x_{C'}}{2} = \dfrac{b^2\lambda}{a^2+b^2} \\ y_M = \dfrac{y_{B'}+y_{C'}}{2} = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \end{cases}$

On constate que y_M est indépendant de λ. Le lieu cherché est donc une droite parallèle à l'axe des x : $y = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$

P parcourt BC.

P en B $\rightarrow$ $M\left(\dfrac{b^3}{a^2+b^2}, \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$

P en C $\rightarrow$ $M\left(-\dfrac{b^3}{a^2+b^2}, \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$



3) Coefficient angulaire de $B'C'$

$$\frac{\dfrac{ab(b-\lambda)}{a^2+b^2}-\dfrac{ab(\lambda+b)}{a^2+b^2}}{\dfrac{b(a^2+\lambda b)}{a^2+b^2}-\dfrac{b(b\lambda-a^2)}{a^2+b^2}} = -\frac{\lambda}{a}$$

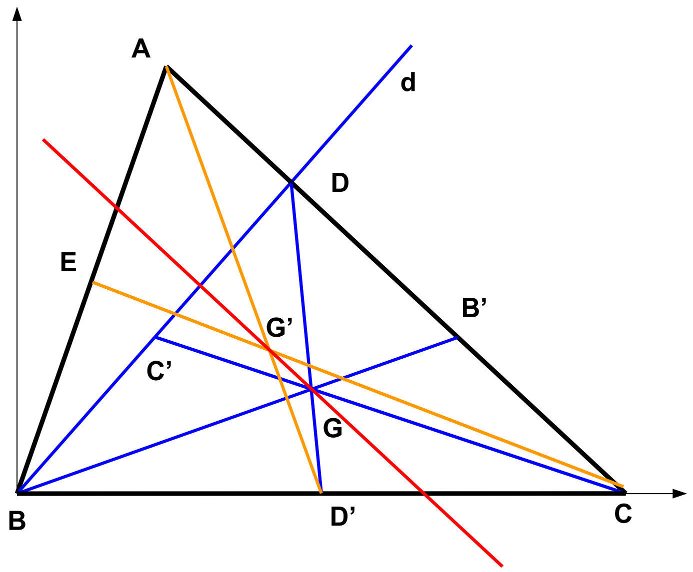
$\rightarrow$ $PP' \equiv y = \dfrac{a}{\lambda}(x-\lambda)$

Si $x=0$, $y=-a$. L'ordonnée à l'origine est indépendante de λ.

Les perpendiculaires sont donc concurantes en $K(0,-a)$

EXGAP067 – Liège, juillet 2003.

On considère un triangle ABC . Par B, on mène une droite d variable qui coupe AC en D. Déterminer l'équation cartésienne du lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABD.



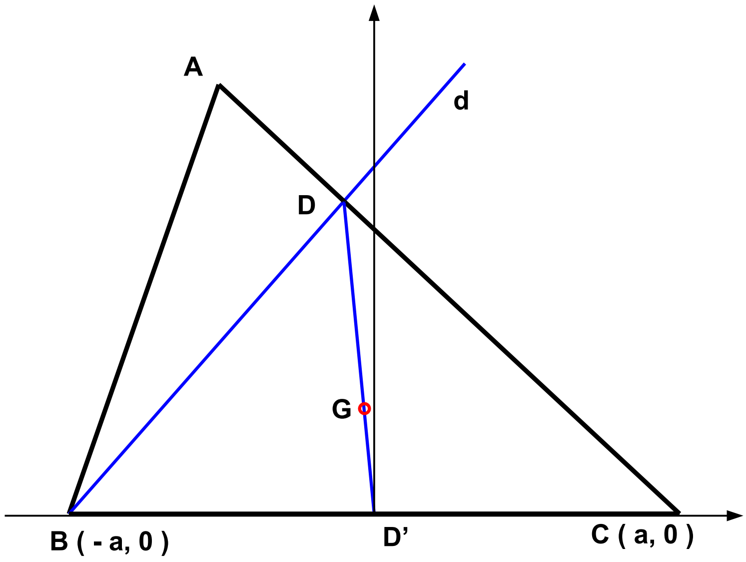
<u>Méthode synthétique</u>

Soit G' le centre de gravité du triangle ABC. $D'C'$ passe par E et est parallèle à AC (car C' est le milieu de BD, et E le milieu de AB)

La version affine forte du théorème de Pappus, nous permet de dire immédiatement que GG' est parallèle à AC.

Le lieu est donc une droite parallèle à AC passant par le centre de gravité du triangle ABC.

(Voir : Géométrie - Yves Ladegaillerie - Edition Ellipses 2003, p 116 et 122)



Méthode analytique

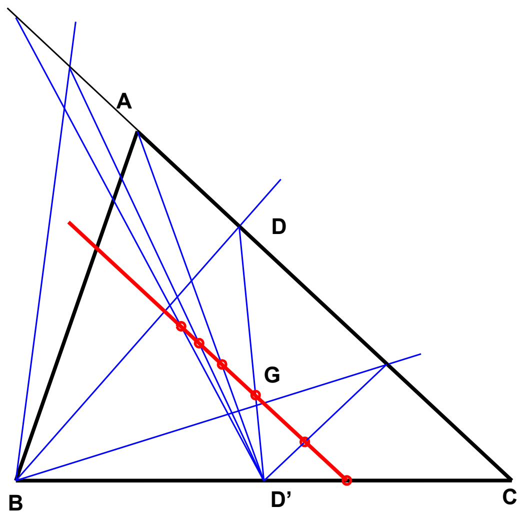
Mettons le repère en D'. Soit $|BC| = 2a$

Soit m le coefficient angulaire de AB, et μ celui de d

$$\begin{cases} BD \equiv y = \mu(x+a) \\ AC \equiv y = m(x-a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = a\dfrac{m+\mu}{m-\mu} \\ y_D = am\left(\dfrac{m+\mu}{m-\mu} - 1\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}x_D = \dfrac{a}{3}.\dfrac{m+\mu}{m-\mu} \\ y_G = \dfrac{1}{3}y_D = \dfrac{am}{3}\left(\dfrac{m+\mu}{m-\mu} - 1\right) \end{cases}$$

On élimine μ, et on obtient : $y = mx - \dfrac{m}{3}$ qui est bien l'équation d'une droite parallèle à AC.



EXGAP068 – Bruxelles, juillet 2004

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne les points fixes A (6,0), B (0,6) et C (6,6). Deux points P et Q, sont mobiles sur la droite OC. L'abscisse de Q vaut le double de l'abscisse de P.

1. Déterminez le lieu géométrique (nature et équation) du centre du cercle circonscrit :
   a. Au triangle BPQ
   b. Au triangle OBP
   c. Au triangle CBP
2. Représentez le lieu trouvé pour le triangle BPQ en prenant le centimètre comme unité de mesure.

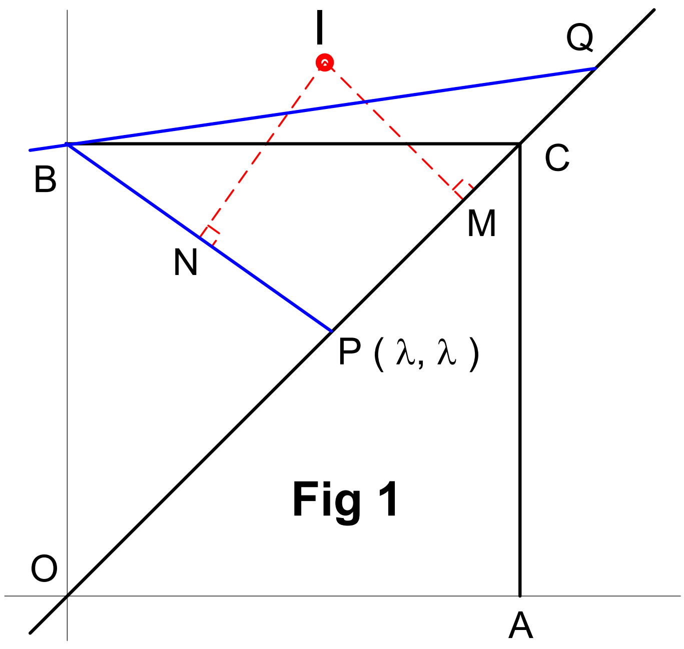


Fig 1

Soit M le milieu de PC, N le milieu de BP. Le centre du cercle circonscrit I est situé à l'intersection des médiatrices élevées en M et N.

On a $P(\lambda,\lambda) \to Q(2\lambda,2\lambda); M\left(\frac{3\lambda}{2},\frac{3\lambda}{2}\right), N\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda+6}{2}\right)$

$\to m_{BP} = \frac{\lambda-6}{\lambda} \to m_{NI} = \frac{\lambda}{6-\lambda} \to NI \equiv y - \frac{\lambda+6}{2} = \frac{\lambda}{6-\lambda}\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)$

D'autre part : $m_{MI} = -1 \to MI \equiv y - \frac{3\lambda}{2} = -\left(x-\frac{3\lambda}{2}\right) \to \lambda = \frac{y+x}{3}$

On remplace dans l'équation de $NI \to y - \dfrac{\frac{y+x}{3}+6}{2} = \dfrac{\frac{y+x}{3}}{6-\frac{y+x}{3}}\left(x-\frac{y+x}{6}\right)$

On obtient : $\boxed{x^2+2xy+y^2-27y+81=0.}$

Comme $B^2-4AC = 2^2-4\times1\times1=0$ (Rappel : On se réfère à la forme : $Ax^2+Bxy+Cy^2$)

C'est une parabole. (Voir à la fin pour des compléments)

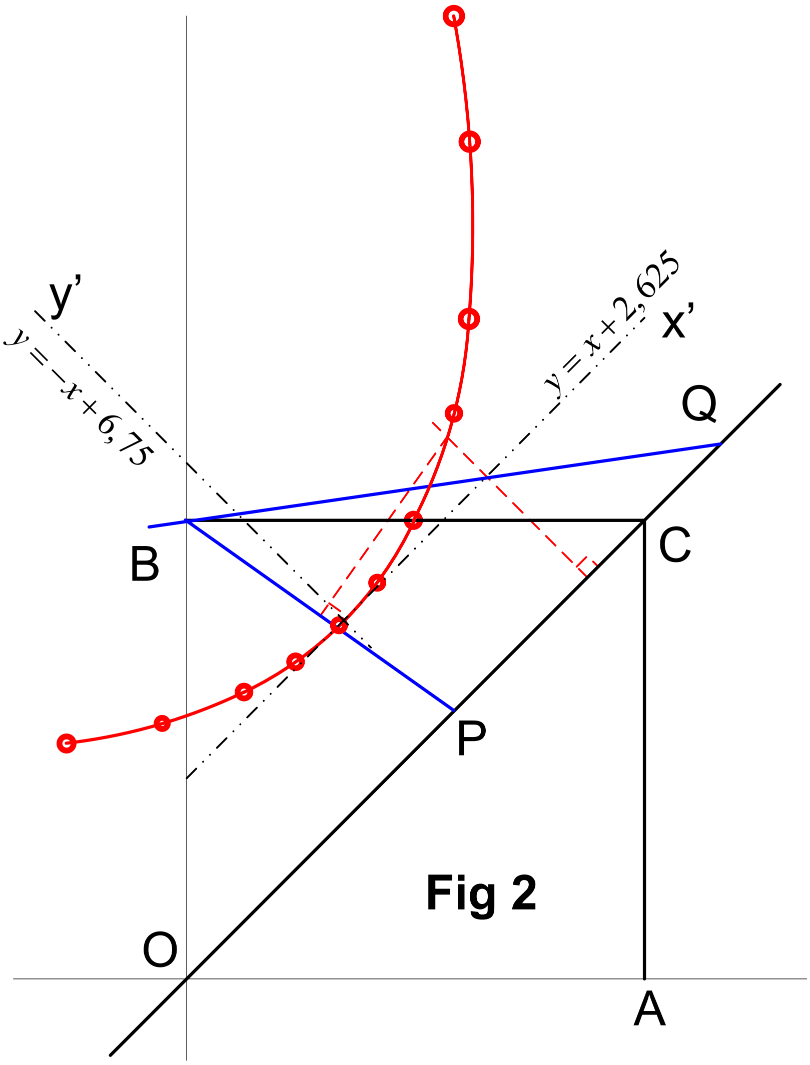


Fig 2

Pour le triangle OBP, le centre I' est l'intersection de HI' et NI'.
Or il est immédiat que HI', médiatrice de OB est indépendante de λ.
HI' est donc le lieu cherché : $\boxed{y=3}$

De même pour le triangle CBQ, KI'' est indépendant de λ, et est donc le lieu cherché : $\boxed{x=3}$

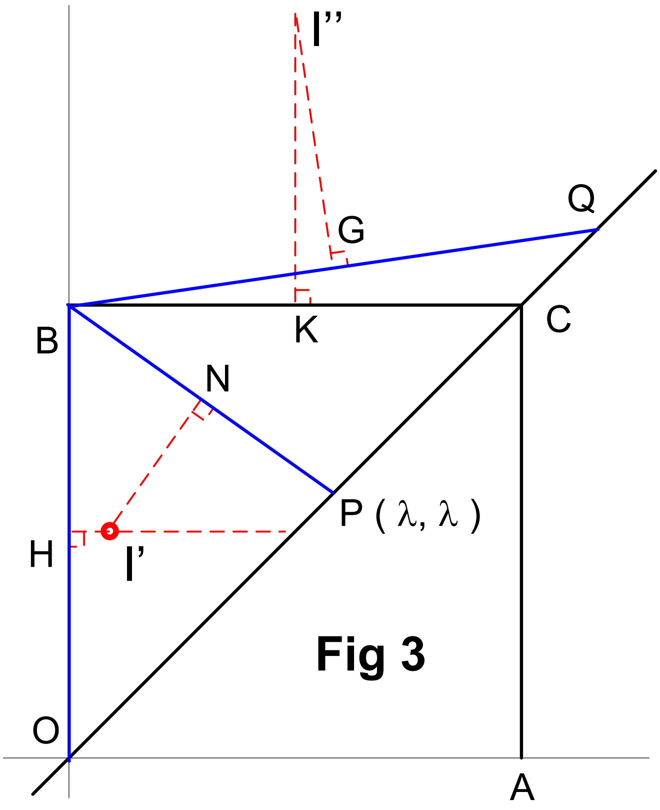


Fig 3

Compléments

Bien que ce ne soit pas démandé dans la question cherchons les axes et le sommet de la parabole.

Les pentes m des axes d'une conique $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ sont données par

$Bm^2 + 2(A - C)m - B = 0 \to 2m^2 + 2(1-1)m - 2 = 0 \to m = -1$

On pourrait donc réduire la parabole en faisant tourner les axes d'un angle de 45°.

Ce qui nous permettrait alors de trouver facilement l'axe et le sommet.

Utilisons une méthode plus simple.

Trouvons la tangente à la parabole parallèle à la direction 1.

Le point de tangence est le sommet cherché. L'axe sera la droite passant par le sommet et de direction -1.

Les équations des tangentes à une conique, parallèles à une direction donnée, s'obtiennent par la formule.

$(f'_x + mf'_y)^2 - 4(A + Bm + Cm^2) f(x, y) = 0$

On a $\begin{cases} f'_x = 2x + 2y \\ f'_y = 2x + 2y - 27 \end{cases}$

$\to (4x + 4y - 27)^2 - 4(4)(x^2 + 2xy + y^2 - 27y + 81) = 0$

$\to y = x + 2{,}625$

Pour obtenir les coordonnées du sommet, on remplace dans l'équation de la conique y par $x + 2{,}625$. Ce qui donne $x = 2{,}0625 \to y = 4{,}6875$.

Et finalement, l'équation de l'axe est : $y - 4{,}6875 = -(x - 2{,}0625) \to y = -x + 6{,}75$

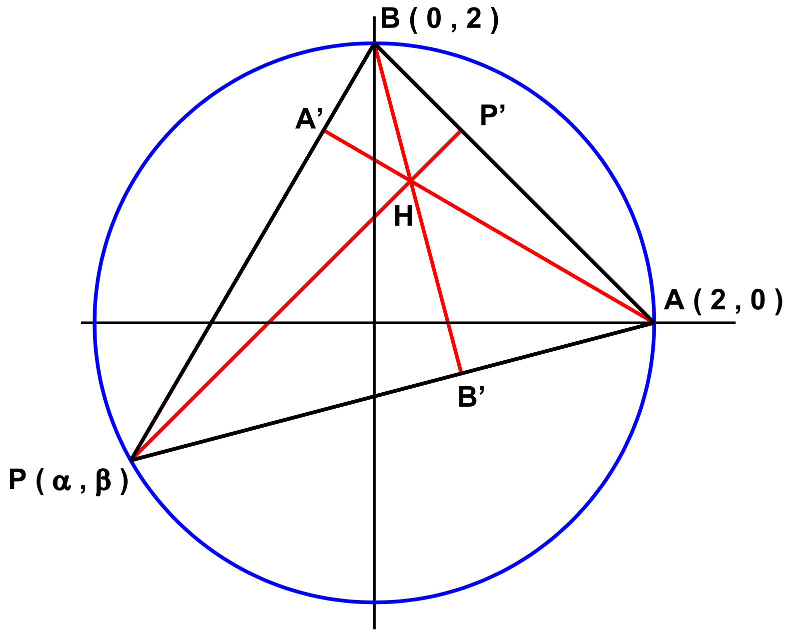
Issu le 30 décembre 2004

EXGAP069 – Bruxelles, juillet 2003.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne le cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 4$. On appelle respectivement A et B les points d'intersection du cercle avec les axes OX et OY. Soit H l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) du triangle ABP où P est un point qui parcourt le cercle donné.

a) Etablissez une équation cartésienne du lieu parcouru par le point H

b) Quelle est la nature de ce lieu ?



Première méthode

On écrit les équations de deux des hauteurs, et le lieu est donné par le système formé par ces équations en tenant compte que le point P décrit le cercle.

C'est parti :

$$m_{AB} = -1 \rightarrow m_{PP'} = 1 \rightarrow PP' \equiv y - \beta = x - \alpha \;\rightarrow\; \beta = y - x + \alpha \qquad (1)$$

$$m_{PB} = \frac{2-\beta}{-\alpha} \rightarrow m_{AA'} = \frac{\alpha}{2-\beta} \;\rightarrow AA' \equiv y = \frac{\alpha}{2-\beta}(x-2) \;\rightarrow \beta = 2 - \alpha\frac{x-2}{y} \qquad (2)$$

De (1) et (2) $\rightarrow\; y - x + \alpha = 2 - \alpha\dfrac{x-2}{y} \rightarrow \alpha = \dfrac{y(2-y+x)}{x-2+y}$ $\qquad (3)$

On remplace α dans (1): $\rightarrow \beta = y - x + \dfrac{y(2-y+x)}{x-2+y} = \dfrac{x(y-x+2)}{x-2+y}$ $\qquad (4)$

Or P satisfait l'équation du cercle $\rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4$ $\qquad (5)$

Il reste à éliminer α et β entre $(3),(4)$ et (5). Après des calculs fastidieux et assez longs, on trouve :

$$(-x+y-2)(-x+y+2)(x^2-4x+y^2-4y+4) = 0$$

Les deux premiers facteurs sont des lieux parasites.

Le lieu qui nous intéresse est :

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0 \;\rightarrow\; \boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4}$$

C'est un cercle de centre $(2,2)$ et de rayon 2.

Deuxième méthode

On peut éviter tous ces calculs laborieux, si on se souvient d'un propriété de l'orthocentre d'un triangle : Son symétrique par rapport à un côté du triangle est sur le cercle circonscrit au triangle (Voir EXGSP 064).

Par conséquent H décrit le cercle symétrique du cercle donné par rapport à la corde AB.

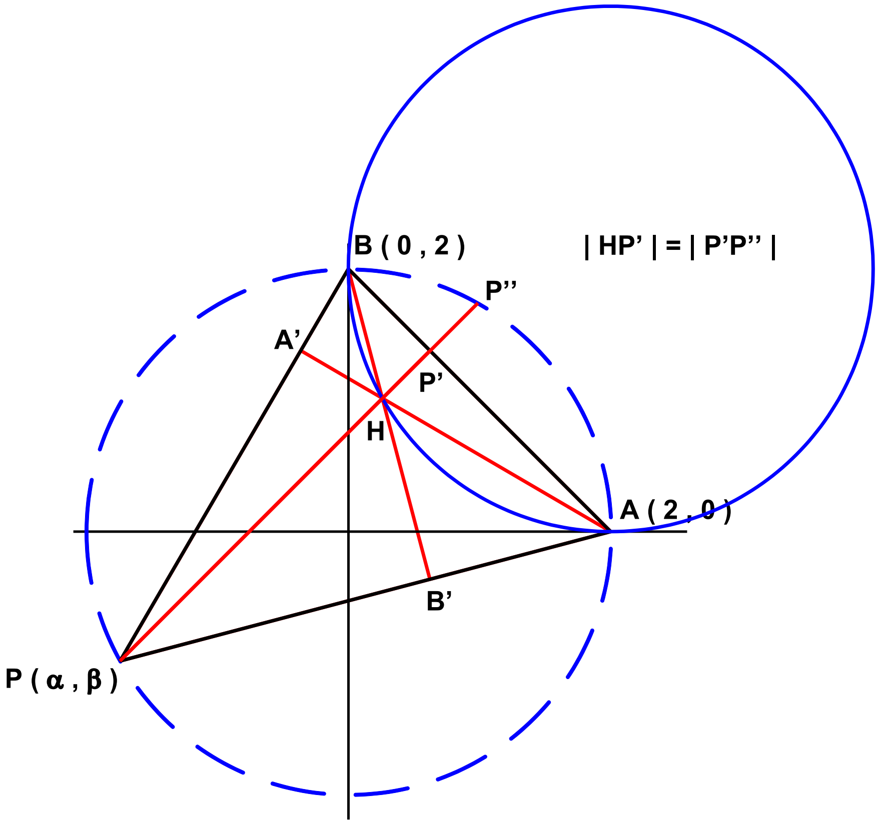
Son équation est : $(x-x')^2 + (y-y')^2 = 4$

Et comme ce cercle passe par A et B, l'équation du cercle est :

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Cette exercice montre une fois de plus qu'il ne faut pas foncer trop vite.

Prenez la peine de réfléchir, avant d'agir.


B (0 , 2)
| HP' | = | P'P'' |
P''
A'
P'
H
A (2 , 0)
B'
P (α , β)