

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Géométrie analytique plane

## **GAP 8**

**EXGAP080 – EXGAP089**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

Avril 05

## EXGAP080 – EPL, UCL, LLN, juillet 2004, série 2.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $Oxy$ . On considère les éléments suivants :

- Le cercle  $\gamma$  de centre  $C = (-2, 1)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- La droite d'équation  $p = 2x + y + 1 = 0$

On vous demande de déterminer les droites tangentes à  $\gamma$  et parallèle à la droite  $p$ .

---

Le cercle a pour équation :  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$

Méthode 1

Soit l'équation d'une tangente parallèle à la droite donnée. :  $y = -2x + p$

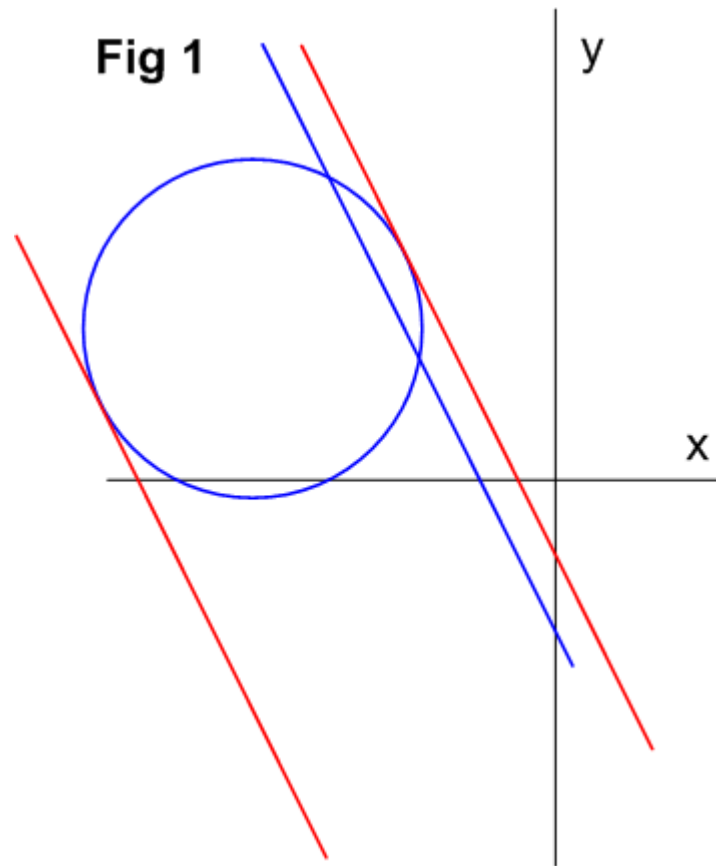
$$\rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \\ y = -2x + p \end{cases} \rightarrow 20x^2 + 16(2-p)x^2 + 4p^2 - 8p + 15 = 0$$

On détermine  $p$  en exprimant que le discriminant de l'équation est nul

$$\Delta = 64(2-p)^2 - 20(4p^2 - 8p + 15) = 0 \rightarrow 4p^2 + 24p + 11 = 0$$

$$\text{Ce qui demande : } p = \frac{12 \pm 10}{4} \rightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ p = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Les équations des deux tangentes } \begin{cases} y = -2x - \frac{1}{2} \\ y = -2x - \frac{11}{2} \end{cases}$$



Méthode 2

Soit le diamètre perpendiculaire à la direction donnée :  $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$

Ce diamètre coupe le cercle au points de tangence cherchés :

$$\rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \rightarrow (x + 2)^2 + \frac{1}{4}(x + 2)^2 = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{5}{4}(x + 2)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow t_1 \equiv y = -2x - \frac{1}{2} \\ x = -3 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow t_1 \equiv y = -2x - \frac{11}{2} \end{cases}$$

## EXGAP081 – EPL, UCL, LLN, septembre 2004.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $Oxy$ . On considère les éléments suivants :

- La droite  $p$  et passant par les points  $A = ( a, 0 )$  et  $B = ( - a, b )$
- La droite  $q$  et passant par les points  $C = ( - a, 0 )$  et  $D = ( a, d )$

Où  $a, b$  et  $d$  sont trois paramètres non nuls.

On vous demande

- de déterminer l'équation cartésienne du lieu de l'intersection des droites  $p$  et  $q$  si le produit des ordonnées des points  $B$  et  $D$  vaut une constante  $C$  non-nulle ( $b.d = C \neq 0$ )
- De discuter la nature du lieu d'après la valeur du paramètre  $C$ .

---

$$\text{On a : } \begin{cases} p \equiv y = \frac{-b}{2a}(x-a) \\ q \equiv \frac{d}{2a}(x+a) \end{cases} \rightarrow \text{Ce qui donne le point d'intersection: } I = \begin{cases} x = a \frac{b-d}{b+d} \\ y = \frac{bd}{b+d} \end{cases}$$

$$\text{Or } bd = C \rightarrow d = \frac{C}{b} \rightarrow I = \begin{cases} x = a \frac{b^2 - C}{b^2 + C} & (1) \\ y = \frac{bC}{b^2 + C} & (2) \end{cases}$$

De (1) on tire  $b^2 = C \frac{a+x}{a-x}$ . Transformons (2):  $y^2 = \frac{b^2 C^2}{(b^2 + C)^2}$  et remplaçons  $b^2$

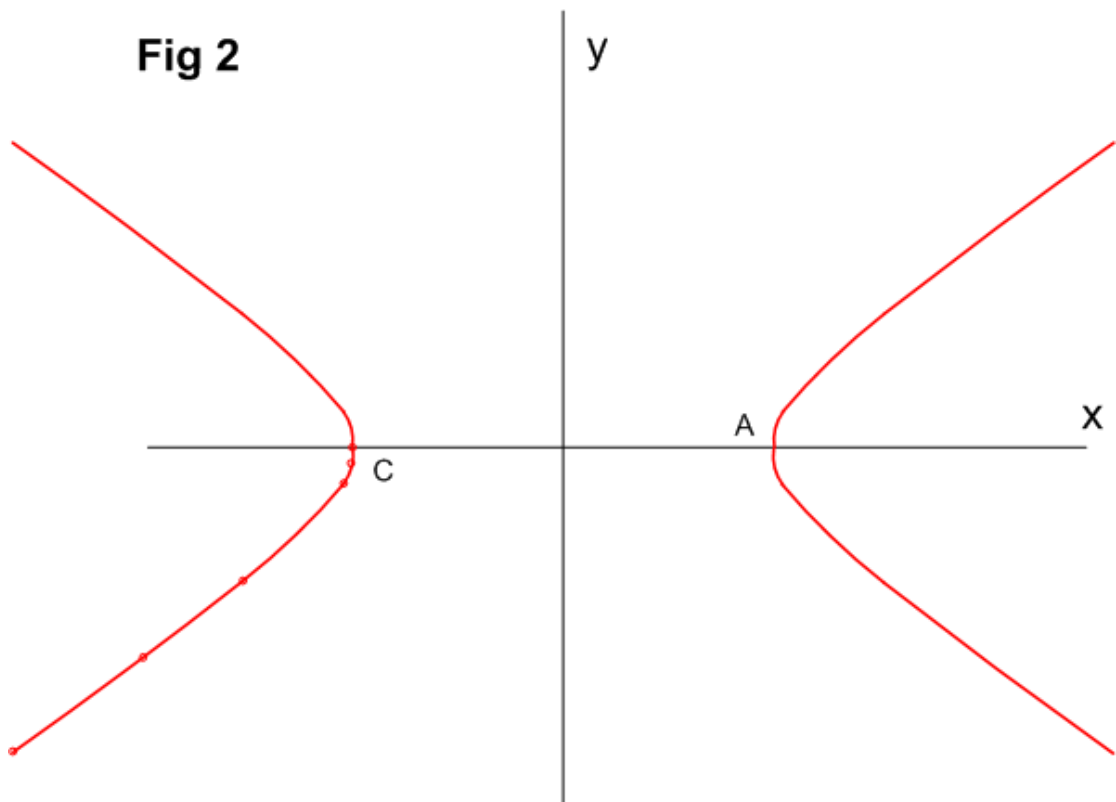
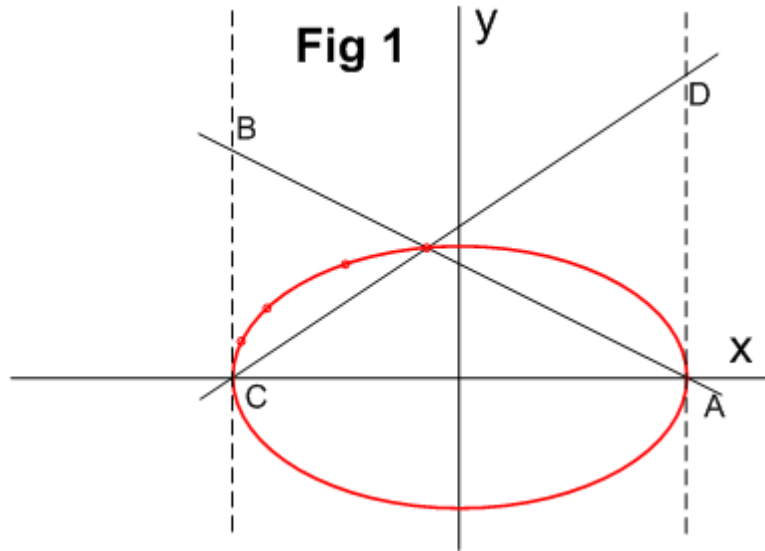
$$\rightarrow y^2 = \frac{C^3 \frac{a+x}{a-x}}{\left( C \frac{a+x}{a-x} + C \right)^2} = C \frac{(a+x)}{(a-x)} \frac{(a-x)^2}{(a+x+a-x)^2} = C \frac{a^2 - x^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow \boxed{Cx^2 + 4a^2 y^2 = Ca^2}$$

1) si  $C > 0 \rightarrow$  on a un ellipse entrée à l'origine (Figure 2)

2) si  $C < 0 \rightarrow$  on a une hyperbole entrée à l'origine (Figure 3)

Voir également EXGAP009



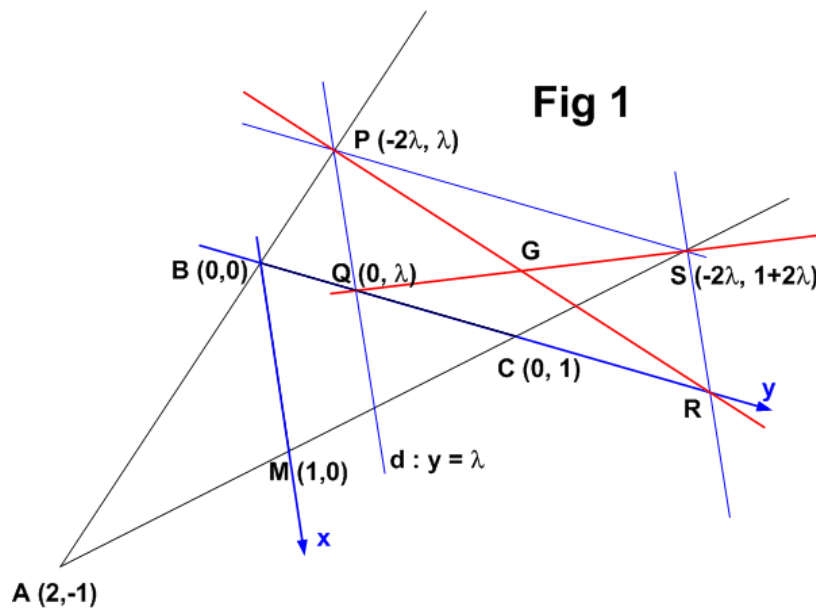
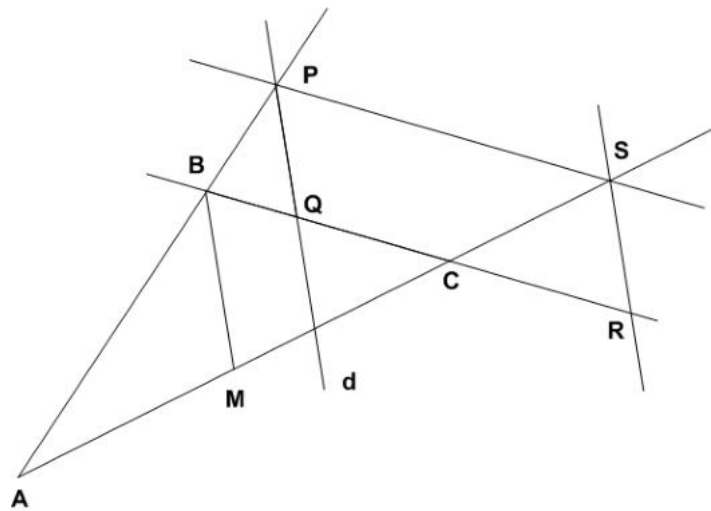

---

Le 5 avril 2005

## EXGAP082 – Liège, septembre 2004.

On considère un triangle  $ABC$  et on note  $M$  le milieu de  $[A, C]$ . Une droite variable  $d$  parallèle à  $BM$  intersecte  $AB$  en  $P$  et  $BC$  en  $Q$ . La parallèle à  $BC$  passant par  $P$  coupe  $AC$  en  $S$ . La parallèle à  $d$  passant par  $S$  coupe  $BC$  en  $R$ . Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du parallélogramme  $PQRS$  quand la droite  $d$  varie.

*Remarque* : on pourra négliger les cas où le parallélogramme n'est pas défini.



Nous reprenons la résolution proposée par l'université.

On procède par géométrie analytique. Plusieurs choix de repère sont possibles.

Si on exclut les objets (points et droites) qui varient avec  $d$ , il reste le triangle  $ABC$  et le point  $M$ . Puisque le problème n'est pas euclidien, il n'est pas nécessaire d'utiliser un repère orthonormé. Un choix classique à considérer comme origine le point  $A$  et comme axes les droites  $AC$  et  $AB$ , en choisissant les unités de façon telle que les points  $C$  et  $B$  admettent pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Un autre choix consiste à prendre  $B$  comme origine et comme axes les droites  $BM$  et  $BC$  et en adoptant pour  $M$  et  $C$  les coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . De cette façon, les droites variables sont parallèles aux axes. Retenons ce choix.

- La droite  $BM$  est donc le premier axe et admet donc l'équation :  $y = 0$
- La droite  $d$  a donc pour équation :  $y = \lambda$  où  $\lambda$  est un paramètre réel.
- Les coordonnées de  $Q$  satisfont :  $\begin{cases} y = \lambda \\ x = 0 \end{cases}$  donc  $Q$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$
- Si les coordonnées de  $A$  sont  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , on a :  $\begin{cases} \frac{a_1}{2} = 1 \\ \frac{a_1 + 1}{2} = 0 \end{cases}$  puisque  $M$  est

le milieu de  $[A, C]$ . Le point  $A$  admet donc les coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- On trouve alors les équations des droites  $AB$  et  $AC$ . On a :  $AB \equiv x + 2y = 0$  et  $AC \equiv x + y = 1$
- Les coordonnées de  $P$  satisfont :  $\begin{cases} y = \lambda \\ x + 2y = 0 \end{cases}$  et  $P$  s'écrit  $\begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$
- La droite  $PS$  est parallèle au second axe et passe par  $P$ . Elle a donc pour équation :  $x = -2\lambda$
- Les coordonnées de  $S$  satisfont alors  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = -2\lambda \end{cases}$  donc  $S = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$

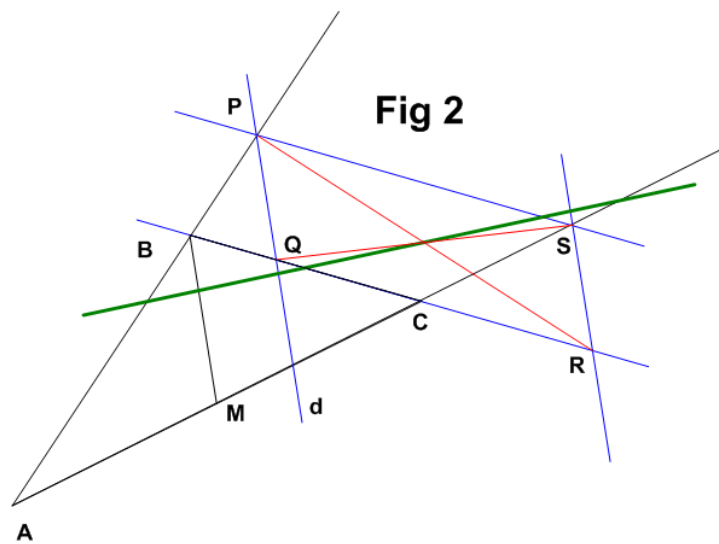
- On peut ensuite faire de même pour obtenir les coordonnées de  $R$ , ou remarquer que le centre de gravité  $G$  du parallélogramme est l'intersection de ses diagonales.

Puisque celles-ci se coupent en leur milieu, on obtient :  $G = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \frac{1+3\lambda}{2} \end{pmatrix}$

Un point de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan est donc dans le lieu si et seulement si

il existe une valeur  $\lambda$  telle que  $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \frac{1+3\lambda}{2} \end{cases}$

On reconnaît alors l'équation paramétrique de la droite d'équation :  $3x + 2y = 1$




---

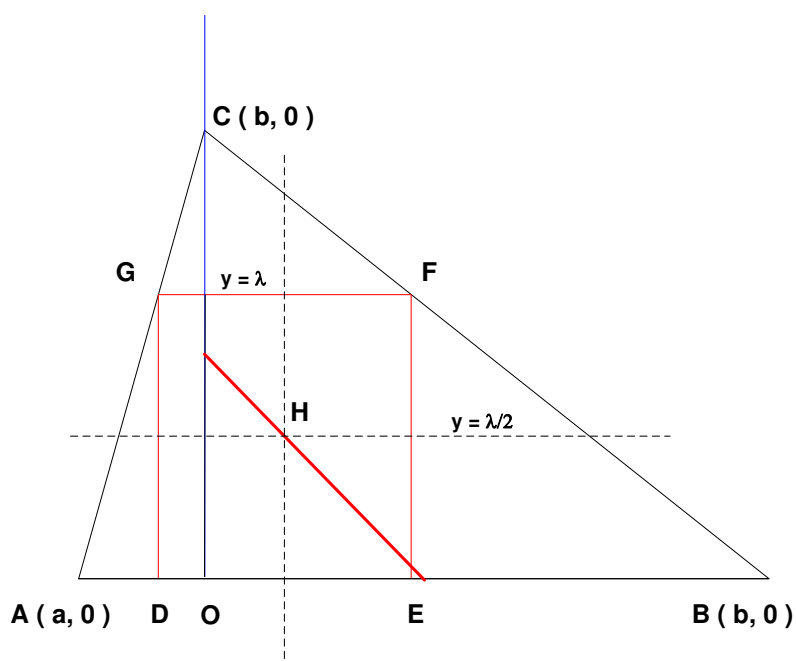
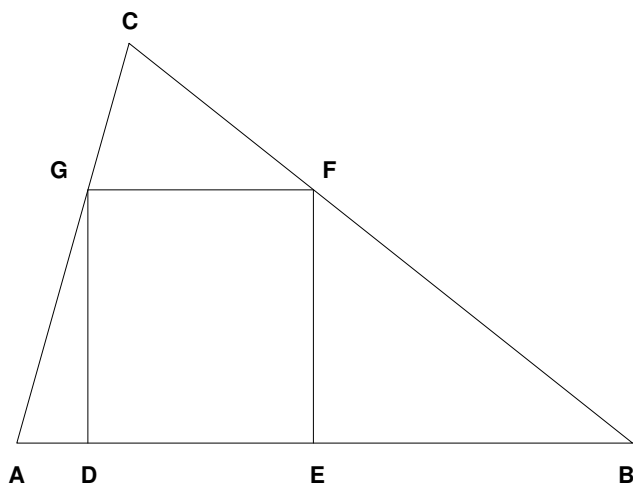
Le 5 avril 2005



## EXGAP083 – Liège, juillet 2005.

On considère un triangle  $ABC$ , dont tous les angles sont aigus.  
Déterminer le lieu des centres de gravité des rectangles  $DEFG$  satisfaisant (simultanément) les conditions suivantes.

- Les sommets  $D$  et  $E$  appartiennent à la droite  $AB$ ,
- Le sommet  $F$  appartient à  $CB$ ,
- Le sommet  $G$  appartient à  $AC$ .



On procède par géométrie analytique.

Choisissons comme repère  $Ox \equiv AB$  et  $Oy \equiv$  la hauteur issue de  $C$ .

Dans ce système, les coordonnées des sommets du triangle sont :  $A(a,0), B(b,0), C(0,c)$

Soit  $GF \equiv y = \lambda$

$$\text{Les coordonnées de } G \text{ sont : } \begin{cases} AC \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \\ GF \equiv y = \lambda \end{cases} \rightarrow G\left(a\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right), \lambda\right)$$

$$\text{Les coordonnées de } F \text{ sont : } \begin{cases} BC \equiv \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1 \\ GF \equiv y = \lambda \end{cases} \rightarrow F\left(b\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right), \lambda\right)$$

On peut alors déduire les coordonnées de  $H$  qui se trouvent à mi-hauteur de  $GF$  et sur la verticale passant par le milieu de  $GF$  :

$$\begin{cases} x = \frac{a\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) + b\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)}{2} & (1) \\ y = \frac{\lambda}{2} & (2) \end{cases}$$

Le lieu de  $H$  s'obtient en éliminant  $\lambda$  entre (1) et (2).

Ce qui donne l'équation d'une droite :  $y = \frac{c}{2} - \frac{c}{a+b}x$

Plus exactement, le lieu de  $H$  est un segment de droite dont les extrémités ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow x = \frac{a+b}{2} & \text{C'est-à-dire le milieu de } AB \\ x = 0 \rightarrow y = \frac{c}{2} & \text{C'est-à-dire le milieu de } CO \end{cases}$$

## EXGAP084 – POLYTECH, UMONS, Mons, juillet 2005.

Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  rapporté à un système orthonormé,  $Oxy$  considérons un triangle  $ABC$ .

Les coordonnées de ses sommets sont :  $A(0, 0)$ ,  $B(7, 0)$ ,  $C(4, 5)$ .

Appelons  $H$  le pied, sur  $AB$ , de la hauteur issue de  $C$ .

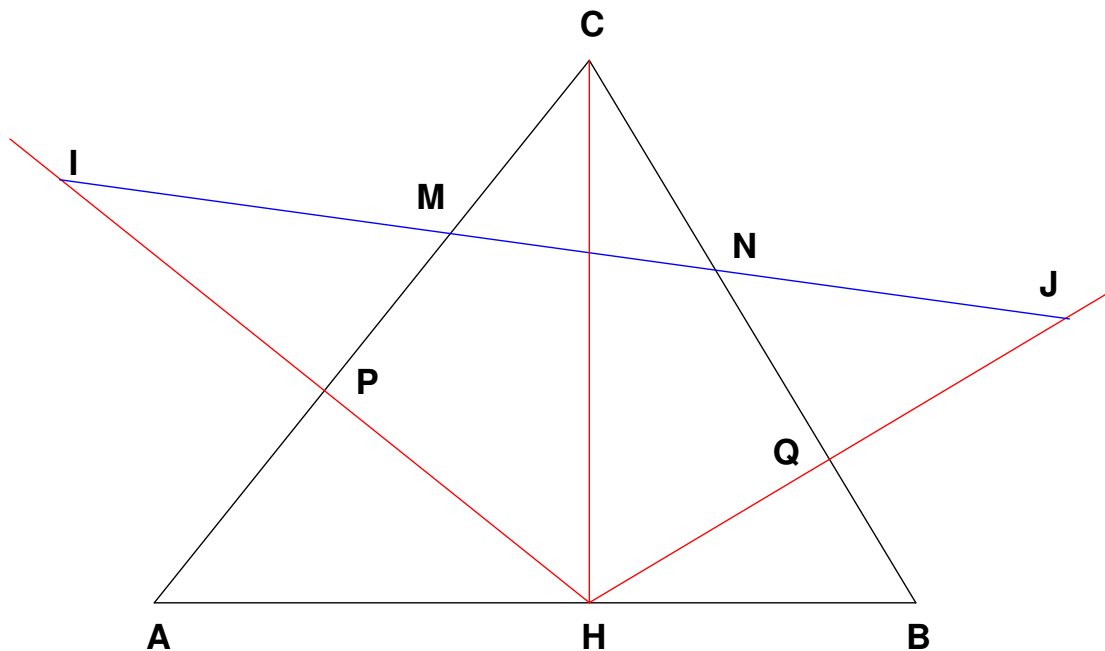
Construisons alors le  $I$  symétrique du point  $H$  par rapport à  $AC$  et le point  $J$ , symétrique de  $H$  par rapport à  $BC$ . La droite  $IH$  coupe  $AC$  en  $P$  et la droite  $JH$  coupe  $BC$  en  $Q$  et traçons le segment  $PQ$ .

Traçons aussi le segment  $IJ$  qui coupe  $AC$  en  $M$  et  $BC$  en  $N$ .

- 1) Démontrez que les points  $M$  et  $N$  sont les pieds des hauteurs issues de  $B$  et de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .
- 2) Quelle est l'équation de l'hyperbole équilatère admettant comme asymptotes d'une part une parallèle à  $Ox$  et d'autre part, l'axe  $Oy$  lui-même et admettant simultanément la droite  $IJ$  comme tangente en  $N$  ?

Note : Cet exercice est couplé avec EXGSP093

---



$$1) \left. \begin{array}{l} CB \equiv y = -\frac{5}{3}(x-7) \\ HJ \equiv y = \frac{3}{5}(x-4) \end{array} \right\} \rightarrow Q = CB \cap HJ = (6.2059, 1.3225) \rightarrow J : (8.4118, 2.647)$$

Car  $Q$  est le milieu de  $HJ$

$$\left. \begin{array}{l} AC \equiv y = \frac{5}{4}x \\ HI \equiv y = -\frac{4}{5}(x-4) \end{array} \right\} \rightarrow P = AC \cap HI = (1.5610, 1.9512) \rightarrow I : (-0.878, 3.9024)$$

$$IJ \equiv \frac{x-8.4118}{-0.878-8.4118} = \frac{y-2.647}{3.9024-2.647} \rightarrow IJ \equiv x+7.3998y = 28$$

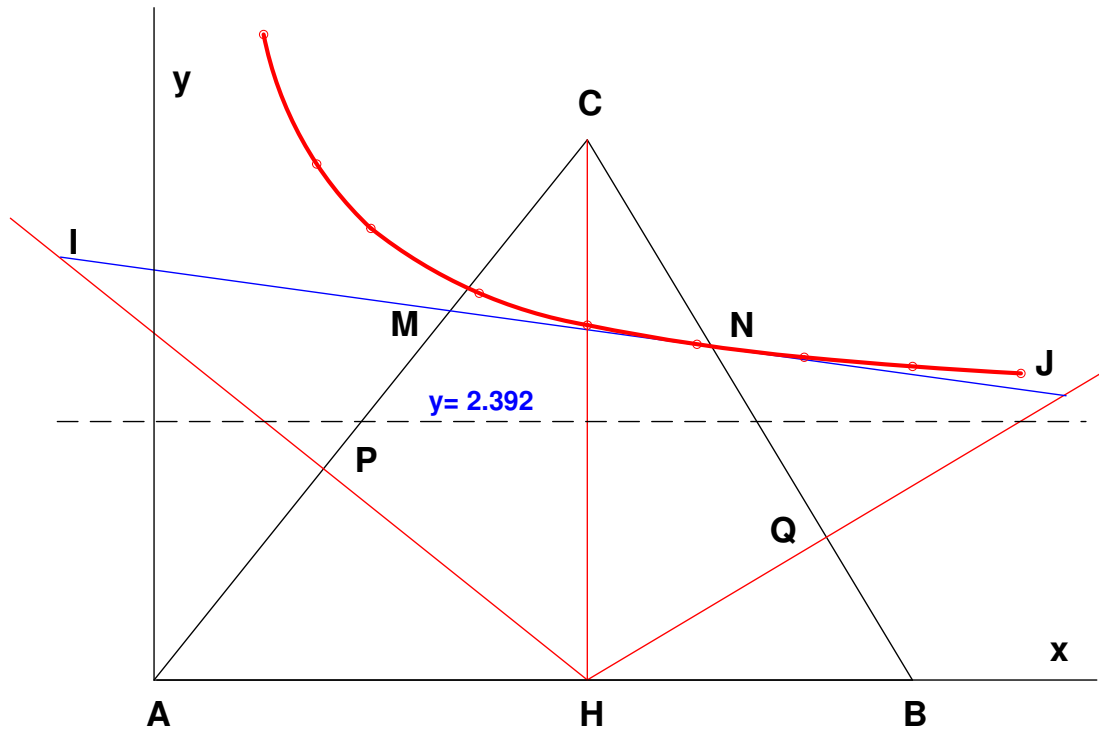
$$M = IJ \cap AC = \begin{cases} x+7.3998y = 28 \\ \frac{5}{4}x - y = 0 \end{cases} \rightarrow M : (2.7318, 3.4146)$$

$$N = IJ \cap CB = \begin{cases} x+7.3998y = 28 \\ \frac{5}{3}x + y = \frac{35}{3} \end{cases} \rightarrow N(5.147, 3.088)$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour vérifier que  $MB$  et  $AN$  sont des hauteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} : (4, 5) \\ \overrightarrow{MB} : (-4.2683, 3.4146) \end{array} \right. \rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} = -2.10^{-4} \approx 0 \rightarrow AC \perp MB$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} : (-3, 5) \\ \overrightarrow{AN} : (5.147, 3.088) \end{array} \right. \rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AN} = -1.10^{-3} \approx 0 \rightarrow BC \perp AN$$



2) C'est une hyperbole équilatère de forme :  $xy + Ax + B = 0$

(On vérifie facilement que les asymptotes sont  $x = 0$  et  $y = -A$ )

$N$  appartient à la conique  $\rightarrow 5.147 \cdot 3.088 + A \cdot 5.147 + B = 0$

$\rightarrow 5.147A + B = -15.8939$  (1)

D'autre part  $IJ$  est tangente. Donc la valeur de la dérivée en  $N$  est égale à la pente de la droite :

$$y' = -\frac{Ax - Ax - B}{x^2} = \frac{B}{x^2} = -\frac{1}{7.3998} \rightarrow B = -3.58$$

Et de (1)  $\rightarrow A = -2.392$

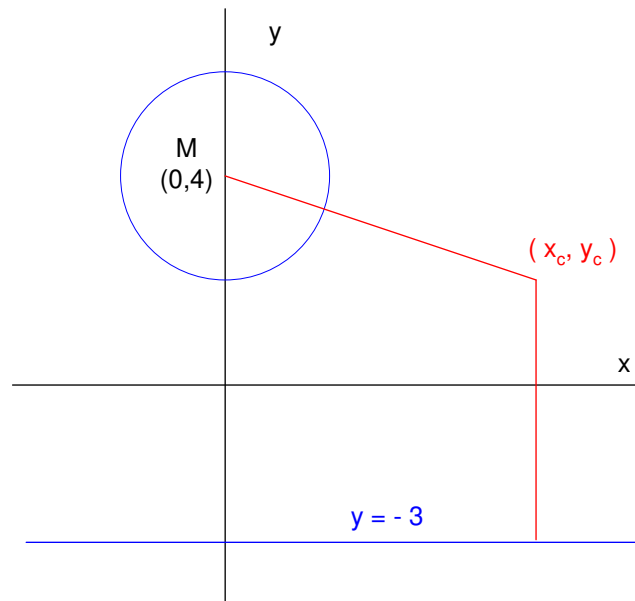
L'équation de la conique est donc :  $xy - 2.392x - 3.58 = 0$

---

Le 5 août 2005

## EXGAP085 – ERM, Bruxelles, 2004.

On donne le cercle  $C$  de centre  $M(0,4)$  et de rayon  $R = 2$  et la droite  $d$  d'équation  $y + 3 = 0$ .  
On demande de déterminer les cercles passant par l'origine et qui sont tangents au cercle  $C$  et à la droite  $d$ .



Soient  $(x_c, y_c)$  les coordonnées d'un cercle. Traduisons que les distances de ce point au cercle donné et à la droite donnée sont égales :  $y_c + 3 = \sqrt{x_c^2 + (y_c - 4)^2} - 2$

$$\rightarrow y_c + 5 = \sqrt{x_c^2 + (y_c - 4)^2} \rightarrow y_c = \frac{x_c^2 - 9}{18}$$

Le lieu des centres des cercles est donc une parabole dont les équations paramétriques

$$\text{sont : } \begin{cases} x_c^2 - 9 = 18t \\ y_c = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_c = 3\sqrt{2t+1} \\ y_c = t \end{cases} \text{ et le rayon des cercles est } R = t + 3$$

Les cercles ont pour équation :  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

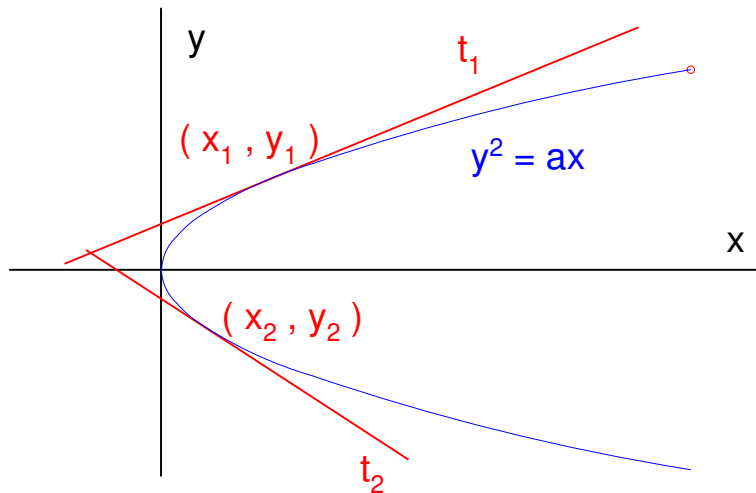
$$\text{Ce qui donne : } (x - 3\sqrt{2t+1})^2 + (y - t)^2 = (t + 3)^2$$

## EXGAP086 – ERM, Bruxelles, 2004.

On considère deux tangentes différentes  $t_1$  et  $t_2$  à la parabole d'équation

$$y^2 = 2ax \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

On demande de démontrer que l'ordonnée du point d'intersection entre  $t_1$  et  $t_2$  est la moyenne arithmétique des ordonnées des points tangents.



$$y^2 = ax \Rightarrow 2y \cdot y' = a \Rightarrow y' = \frac{a}{2y}$$

Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , les coordonnées des deux points de tangences.

Les équations des tangentes sont :

$$t_1 \equiv y - y_1 = \frac{a}{2y_1}(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{a}{2y_1} \left( x - \frac{y_1^2}{a} \right) \Rightarrow y - y_1 = \frac{a}{2y_1}x - \frac{y_1}{2} \quad (1)$$

$$t_2 \equiv y - y_2 = \frac{a}{2y_2}(x - x_2) \Rightarrow y - y_2 = \frac{a}{2y_2} \left( x - \frac{y_2^2}{a} \right) \Rightarrow y - y_2 = \frac{a}{2y_2}x - \frac{y_2}{2} \quad (2)$$

Multiplions (1) par  $\left(\frac{1}{y_2}\right)$  et (2) par  $\left(\frac{1}{y_1}\right)$ , et soustrayons membre à membre

$$\Rightarrow (y - y_1) \frac{1}{y_1} - (y - y_2) \frac{1}{y_2} = -\frac{y_1}{2y_2} + \frac{y_2}{2y_1}$$

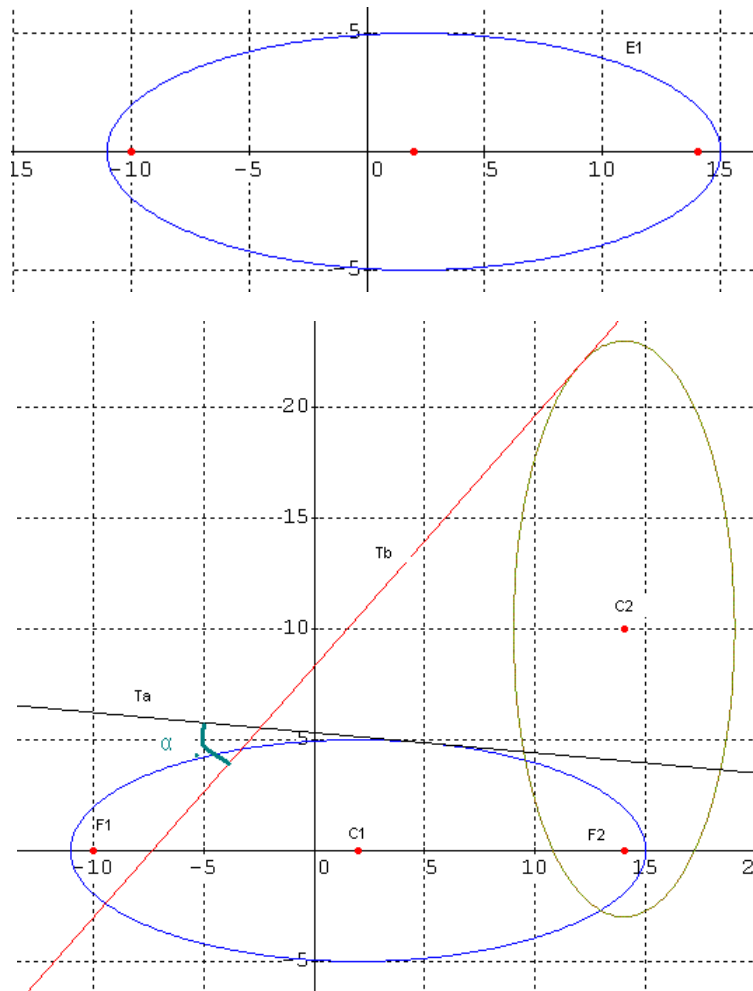
$$\text{Multiplions par } y_1 y_2 \Rightarrow (y - y_1) y_2 - (y - y_2) y_1 = -\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{\frac{1}{2} y_2^2 - y_1^2}{\frac{1}{2} y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Le 20 août 2005. Modifié le 17 mai 2013 (Fabienne Zoetard)

## EXGAP087 – POLYTECH, UMONS, Mons, Juillet, 2003

1. Déterminer l'équation d'une ellipse (ellipse 1) de centre  $C_1$  dont le grand axe a pour longueur 20 et dont les foyers sont donnés par leurs coordonnées :  $F_1(-10,0)$  et  $F_2(14,0)$
2. Si cette ellipse subit une rotation de  $90^\circ$  autour de  $C_1$  puis une translation amenant son centre au point  $C_2(14,10)$ , quelle équation aura cette nouvelle ellipse (ellipse 2).
3. Par le point  $A$  (abscisse 5 et ordonnée positive) de l'ellipse 1, on mène une tangente  $t_1$  à cette ellipse 1. Par le point  $B$  (abscisse 12 et ordonnée positive), on mène une tangente  $t_2$  à cette ellipse 2. Déterminer les équations des  $t_1$  et  $t_2$ .
4. Que vaut l'angle aigu formé par ces deux tangentes ?





$$1) X_{C_1} = \frac{14-10}{2} = 2; Y_{C_1} = 0$$

$$\text{Or on a } c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 144 = 169 - b^2 = 25 \rightarrow b = 5$$

$$\text{On en déduit : } E_1 \equiv \frac{(x-2)^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$2) \text{ Immédiat : } E_2 \equiv \frac{(x-14)^2}{5^2} + \frac{(y-10)^2}{13^2} = 1$$

3) Coordonnées de A : (5, 4.865); Coordonnées de B : (12, 21.915)

Pente de  $t_1$  et  $t_2$  calculées selon  $-\frac{F'_x}{F'_y}$ , qui sont respectivement les dérivées partielles

de l'ellipse selon  $x$  (on fixe  $y$  constant) et selon  $y$  (on fixe  $x$  constant).

On obtient :

$$m_A = -\left[ \frac{2(x-2).5^2}{13^2.2y} \right]_{(5, 4.865)} = -0.0912 \quad \text{et} \quad m_B = \left[ \frac{2(x-14).13^2}{5^2.2.(y-10)} \right]_{(12, 21.915)} = 1.1347$$

Les équations des tangentes sont donc :

$$\begin{aligned} (y-4.865) &= -0.0912(x-5) & \text{ou encore} & & y_A &= -0.0912x + 5.321 \\ (y-21.915) &= 1.1347(x-12) & & & y_B &= 1.1347x + 8.2986 \end{aligned}$$

4) Première méthode

L'angle formé par  $t_1$  avec l'axe des abscisses est  $\alpha = \arctan 0.0912 = 5.211^\circ$

L'angle formé par  $t_2$  avec l'axe des abscisses est  $\beta = \arctan 1.1347 = 48.611^\circ$

L'angle aigu formé par les deux tangentes est  $\alpha + \beta = 53.822^\circ$

Deuxième méthode (Produit scalaire)

Angle de deux droites  $u(1, -0.0912)$  et  $v(1, 1.1347)$  peut s'écrire

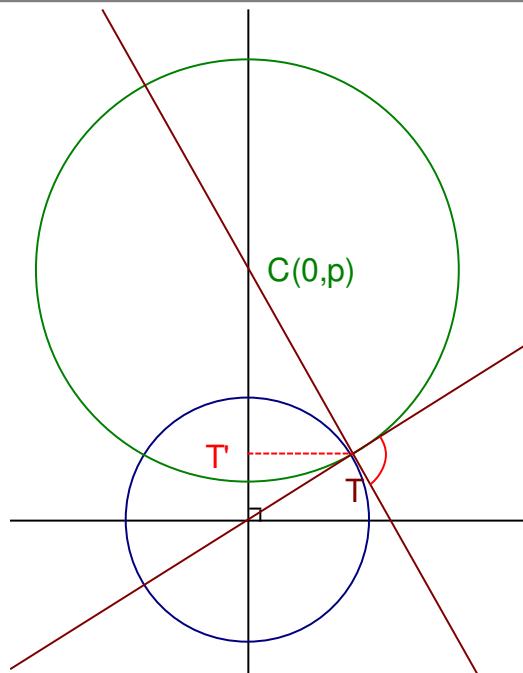
$$\cos \theta = \frac{(1).(1) + (-0.0912).(1.1347)}{(\sqrt{1^2 + 0.0912^2})(\sqrt{1^2 + 1.1347^2})} = \frac{0.8965}{1.1588} = 0.5903$$

$$\rightarrow \theta = 53.82^\circ$$

## EXGAP088 – POLYTECH, UMONS, Mons, Juillet, 2003

Soit une circonférence de centre  $(0,0)$  et de rayon 2. Soit une autre circonférence centrée en  $C$  sur l'axe  $Oy$ , de centre variable  $(0,p)$ .

1. Déterminer l'équation de cette circonférence variable si, aux points d'intersection des deux circonférences, la tangente à la première est perpendiculaire à la tangente de la seconde.
2. Si  $T$  est le point d'intersection variable et  $T'$  sa projection orthogonale sur  $OC$ , montrer que le produit des distances  $|OT'| \cdot |OC|$  est une constante.
3. Montrer que ce produit constant vaut le carré du segment tangent joignant  $O$  au point de tangence de ce segment avec la circonférence variable construite sur  $CT'$  comme diamètre.
4. Représenter graphiquement la loi de variation de  $|OT'|$  en fonction de  $|OC|$  et dites de quel type est la courbe obtenue.



1) De façon évidente, par la géométrie synthétique :  $r_{variable}^2 = CT^2 - OT^2 = p^2 - 4$

Donc les circonférences variables ont pour équations :  $x^2 + (y - p)^2 - (p^2 - 4) = 0$  (1)

2)  $\left| \overrightarrow{OT} \right| \cdot \left| \overrightarrow{OC} \right| = Cte$  ?

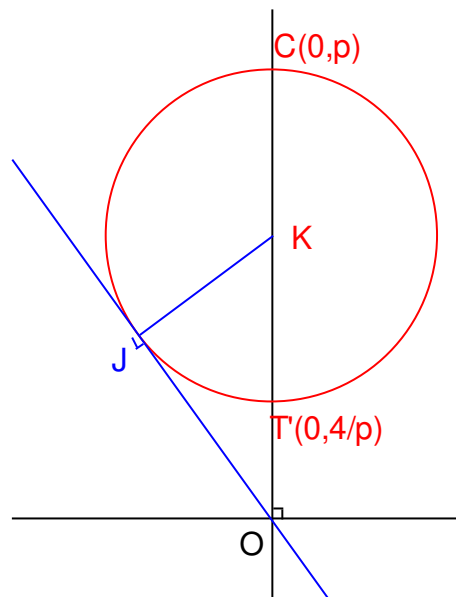
Point d'intersection  $T$  avec  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  (2)

$$\rightarrow (1) - (2) \rightarrow -2y_T \cdot p + p^2 - (p^2 - 4) + 4 = 0$$

$$\rightarrow -2y_T \cdot p + p^2 - p^2 + 4 + 4 = 0$$

$$\rightarrow y_T = \frac{4}{p} \rightarrow \left| \overrightarrow{OT} \right| = \frac{4}{p}$$

$$\text{Donc } \left| \overrightarrow{OT} \right| \cdot \left| \overrightarrow{OC} \right| = \frac{4}{p} \cdot p = 4 = Cte$$



3)  $\left| \overrightarrow{OT} \right| \cdot \left| \overrightarrow{OC} \right| = OJ^2$  ?

$$\text{Centre } K \text{ de la circonférence : } \left| \overrightarrow{OK} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left( p + \frac{4}{p} \right) = \frac{p}{2} + \frac{2}{p}$$

$$\text{Rayon de la circonférence : } \left( \frac{p}{2} + \frac{2}{p} \right) - \frac{4}{p} = \frac{p}{2} - \frac{2}{p}$$

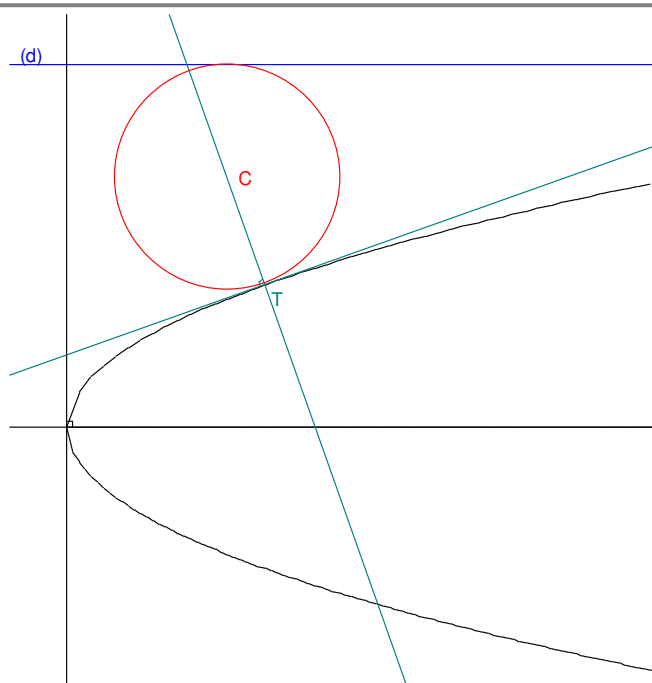
$$\text{Et donc } \left| \overrightarrow{OJ} \right|^2 = \left( \frac{p}{2} + \frac{2}{p} \right)^2 - \left( \frac{p}{2} - \frac{2}{p} \right)^2 = 4$$

4) C'est une hyperbole équilatère.

## EXGAP089 – POLYTECH, UMONS, Mons, Juillet, 2003

Soit la parabole  $P (y^2 = 4x)$  et la droite  $d (y = 3)$ .

1. Déterminer l'équation de la circonférence tangente à la droite  $d$  et à la parabole en son point  $T$  d'abscisse 1 et d'ordonnée positive; son centre est situé entre la parabole et la droite.
2. Déterminer l'équation de l'ellipse admettant comme centre  $C$  le centre de la circonférence déterminé en (1.) ; son grand axe est parallèle à  $Oy$  et sa longueur vaut 10; cette ellipse est tangente à la circonférence.
3. Déterminer l'équation de l'hyperbole équilatère passant par  $C$  et admettant comme asymptotes les droites  $(y = 1)$  et  $(x = -1)$



1) Coordonnées de  $T$  d'abscisse 1 :  $T(1, 2)$

Le centre  $C$  de la circonférence cherchée appartient à la normale à la parabole  $P$  en  $T$ .

$$\text{L'équation de la normale est : } (y - 2) = \left( \frac{F'_y}{F'_x} \right)_T (x - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} F'_y = 2y \\ F'_x = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \left( \frac{F'_y}{F'_x} \right)_{(1,2)} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ d'où l'équation de la normale : } (y - 1) = -1 \cdot (x - 1)$$

Sur le point courant de cette normale, d'abscisse = paramètre  $\alpha$

$$y = 2 - x + 1 = 3 - x = 3 - \alpha \text{ ses coordonnées sont donc : } (\alpha, (3 - \alpha))$$

$$\begin{aligned} d_{\rightarrow(d)} &= 3 - (3 - \alpha) = \alpha \\ \text{Distance de ce point courant } (d) \text{ et à } T : \\ d_{\rightarrow(T)} &= \sqrt{(\alpha - 1)^2 + ((3 - \alpha) - 2)^2} \end{aligned}$$

Le centre de la circonférence est tel que ces distances sont égales (et égales au rayon de la circonférence).

$$\alpha^2 = (\alpha - 1)^2 + (1 - \alpha)^2$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$$

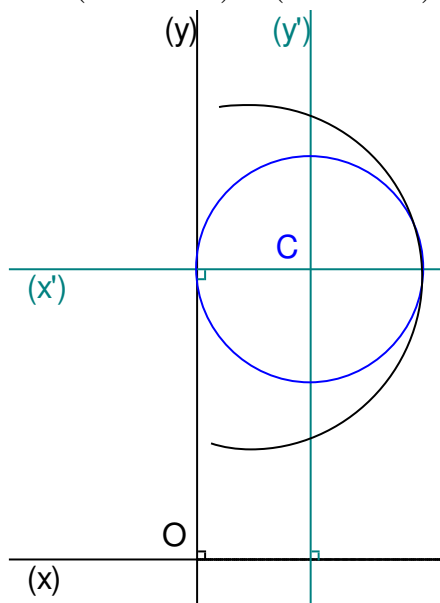
$$\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \begin{cases} 3.4142 \\ 0.5858 \end{cases}$$

Comme le centre est imposé entre la parabole et la droite, c'est la solution 0.5858 qui doit être retenue.

$$\text{Centre de la circonférence } C : y_C - 2 = -x_C + 1 \rightarrow y_C = -0.5858 + 3 = 2.4142$$

$$\text{D'où au final : } C : (0.5858, 2.4142)$$

$$\text{Equation de la circonférence : } (x - 0.5858)^2 + (y - 2.4142)^2 = 0.5858^2$$



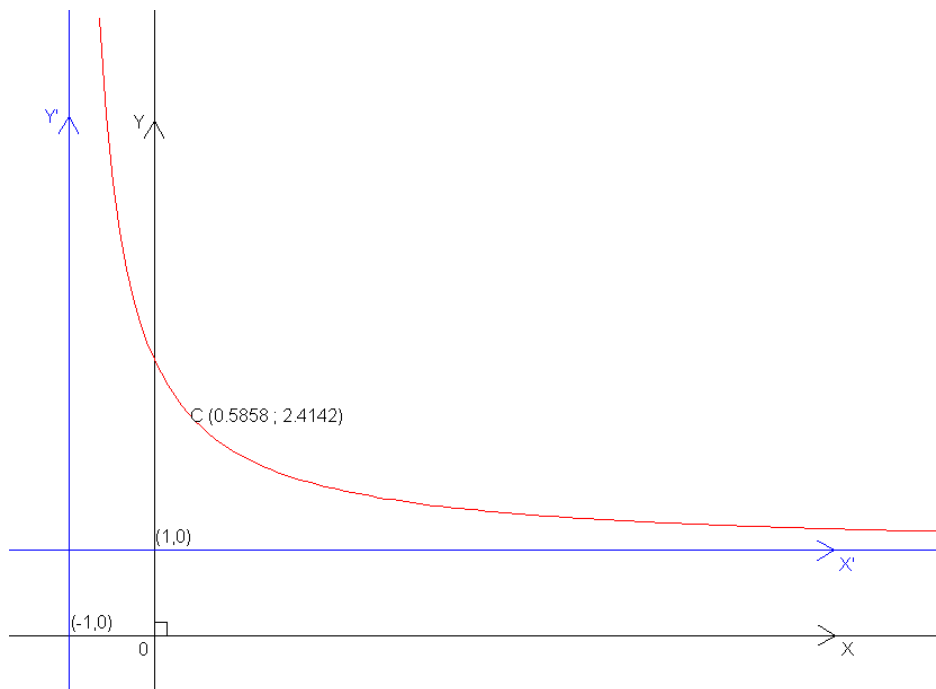
2) L'équation de l'ellipse admettant comme centre  $C$ , le centre de la circonférence déterminé en 1) et qui présente les particularités suivantes :

- Son grand axe est parallèle à  $Oy$
- La longueur de ce grand axe vaut 10
- Elle est tangente à la circonférence

$$\text{est : } \frac{x'^2}{0.5858^2} + \frac{y'^2}{5^2} = 1$$

$$\text{Mais } \begin{cases} x' = x - 0.5858 \\ y' = y - 2.4142 \end{cases}$$

$$\text{Et donc l'équation de l'ellipse est : } \frac{(x - 0.5858)^2}{0.5858^2} + \frac{(y - 2.4142)^2}{25} = 1$$



3) Equation de l'hyperbole équilatère d'asymptote  $O'x'$  et  $O'y' \rightarrow x'.y' = k$

$$\text{Dans } (x', y') = C(1.5858, 1.4142) \rightarrow x'_c \cdot y'_c = (1.5858) \cdot (1.4142) = k$$

$$\text{Mais } \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \text{ d'où, dans } Oxy : (x + 1)(y - 1) = 2.2426$$