Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 9

EXGAP090 – EXGAP099

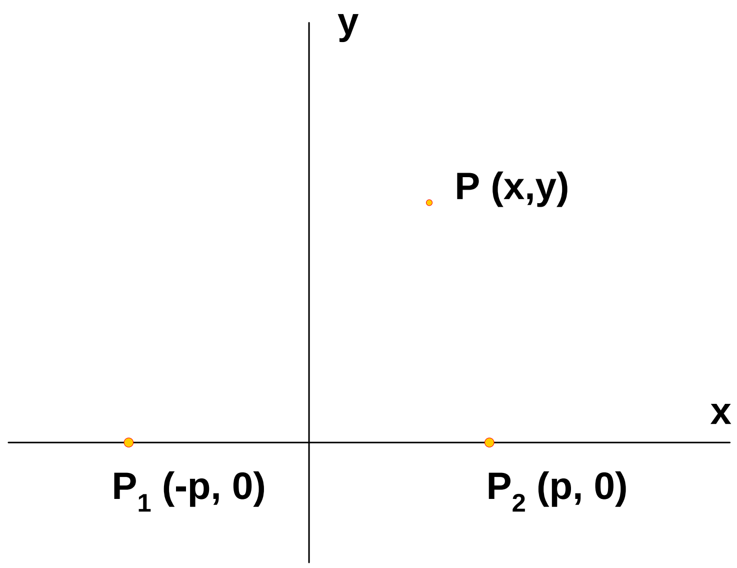
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Nov 05

EXGAP090 – Liège, septembre 2005

Dans le plan, on se donne deux points P_1 et P_2. Soit également a un nombre strictement positif.
Déterminer le lieu des points P du plan dont le rapport des distances à P_1 et P_2 vaut a. Déterminer la nature du lieu.



Les distances sont : $\begin{cases} d^2(P,P_1) = (x+p)^2 + y^2 \\ d^2(P,P_2) = (x-p)^2 + y^2 \end{cases}$

Nous devons avoir : soit $\dfrac{d(P,P_1)}{d(P,P_2)} = a$ soit $\dfrac{d(P,P_2)}{d(P,P_1)} = a$

Considérons d'abord $\dfrac{d(P,P_1)}{d(P,P_2)} = a \rightarrow \dfrac{(x+p)^2 + y^2}{(x-p)^2 + y^2} = a^2$

$\rightarrow (a^2-1)x^2 + (a^2-1)y^2 - 2p(a^2+1)x + (a^2-1)p^2 = 0$

Divisons par (a^2-1) pour simplifier : $x^2 + y^2 - 2p\dfrac{a^2+1}{a^2-1}x + p^2 = 0$

C'est l'équation d'un cercle que nous pouvons réduire : $\left(x - p\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 + y^2 = p^2\left[\left(\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 - 1\right]$

Le centre du cercle est donc : $\left(p\dfrac{a^2+1}{a^2-1}, 0\right)$

Calculons le rayon : $R^2 = p^2\left[\left(\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 - 1\right] = \dfrac{p^2}{(a^2-1)^2}\left[(a^2+1)^2 - (a^2-1)^2\right] = \dfrac{4a^2p^2}{(a^2-1)^2}$

$\rightarrow$ ou encore : $R = \dfrac{2ap}{a^2-1}$ et comme R doit être positif, cela implique $a > 1$

Notons que l'inégalité $\dfrac{2ap}{a^2-1} < p\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$ est alors toujours vérifiée.

En d'autres termes, le cercle est entièrement situé du côté des $x > 0$

Considérons maintenant $\dfrac{d(P,P_2)}{d(P,P_1)} = a.$

Nous obtiendrons aussi un cercle : $\left(x - p\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 + y^2 = \dfrac{4a^2p^2}{(a^2-1)^2}$ qui est symétrique du premier

par rapport à l'axe des y

Il nous faut enfin envisager le cas : $a = 1 \rightarrow (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 + y^2 \rightarrow x = 0$

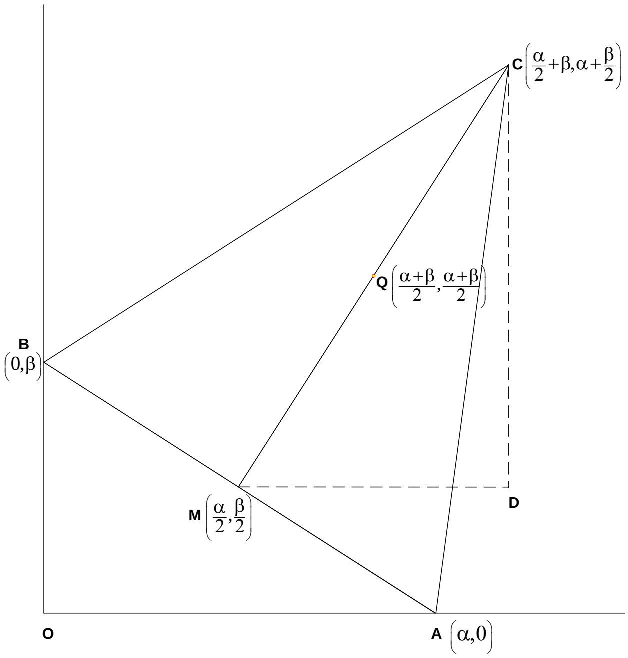
Le lieu dégénère est est simplement l'axe des y

EXGAP091 – Bruxelles, juillet 2005

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine *O* et d'axes *X* et *Y*, on donne le triangle isocèle *ABC* ($\| AC \| = \| BC \|$) dont la base [*AB*], de longueur *L*, égale la hauteur issue de *C*. Ce triangle peut se déplacer dans le premier quadrant de façon à ce que *A* reste constamment sur *OX* et *B* sur *OY*. De plus, on impose $0 \leq \| OA \| \leq L,\ 0 \leq \| OA \| \leq L$

On demande

1. de déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique :
   a. du milieu *M* de [*AB*]
   b. du milieu *Q* de [*MC*]
   c. du point *C*
2. De représenter les trois lieux en prenant *L* = 10 cm.
3. D'indiquer la nature (droite, parabole, cercle ou autre de chacun de ces lieux).



<u>Détermination des coordonnées des différents points.</u>

Soit $A(\alpha,0)$ et $B(0,\beta)$ avec $\alpha^2+\beta^2=L^2$

On obtient facilement les coordonnées de *M* : $\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Pour les coordonnées de *C*, il suffit de remarquer que les triangles *OAB* et *DCM* sont égaux $\rightarrow C\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta,\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)$

et par conséquent : $Q\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

1)Lieu de M

Soit (x, y) les coordonnées d'un point du lieu. Il suffit d'éliminer α et β dans

le système $\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = \dfrac{\beta}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = L^2 \end{cases} \qquad \rightarrow 4x^2 + 4y^2 = L^2$

M décrit donc un arc du cercle centré en O et de rayon $\dfrac{L}{2}$

2) Lieu de Q

Il est immédiat : Q est situé sur la droite $y = x$

Déterminons les positions extrémales de Q

Position la plus proche de l'origine : $\left(\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right)$

Position la plus éloignée:

$$|\,OQ\,|^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) = \frac{1}{2}\left(L^2 + 2\alpha\beta\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(L^2 + 2\alpha\sqrt{L^2 - \alpha^2}\right)$$

Dérivons $\rightarrow \sqrt{L^2 - \alpha^2} - \dfrac{2\alpha^2}{2\sqrt{L^2 - \alpha^2}} = \dfrac{L^2 - 2\alpha^2}{\sqrt{L^2 - \alpha^2}} \rightarrow L^2 - 2\alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}L$

Les coordonnées x et y de Q varient donc dans l'intervalle $\left[\dfrac{\mathrm{L}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}L\right]$

3) Lieu de C

Il suffit d'éliminer α et β dans le système $\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} + \beta \\ y = \alpha + \dfrac{\beta}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = L^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{3}(2y - x) \\ \beta = \dfrac{2}{3}(2x - y) \\ \alpha^2 + \beta^2 = L^2 \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{4}{9}\left[(2y-x)^2 + \frac{2}{3}(2x-y)^2\right] = L^2 \rightarrow 5x^2 - 8xy + 5y^2 = \frac{9}{4}L^2 \quad (1)$$

C'est une ellipse (car $(-8)^2 - 4\times 5\times 5 < 0$) centrée en O (car pas de termes en x et y)

Déterminons les pentes des axes.

Pour une conique $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ les pentes des axes sont donnés par

$Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0 \rightarrow -8m^2 + 2(5-5)m + 8 = 0 \rightarrow m = \pm 1$

Les axes sont donc les droites : $y = x$ et $y = -x$

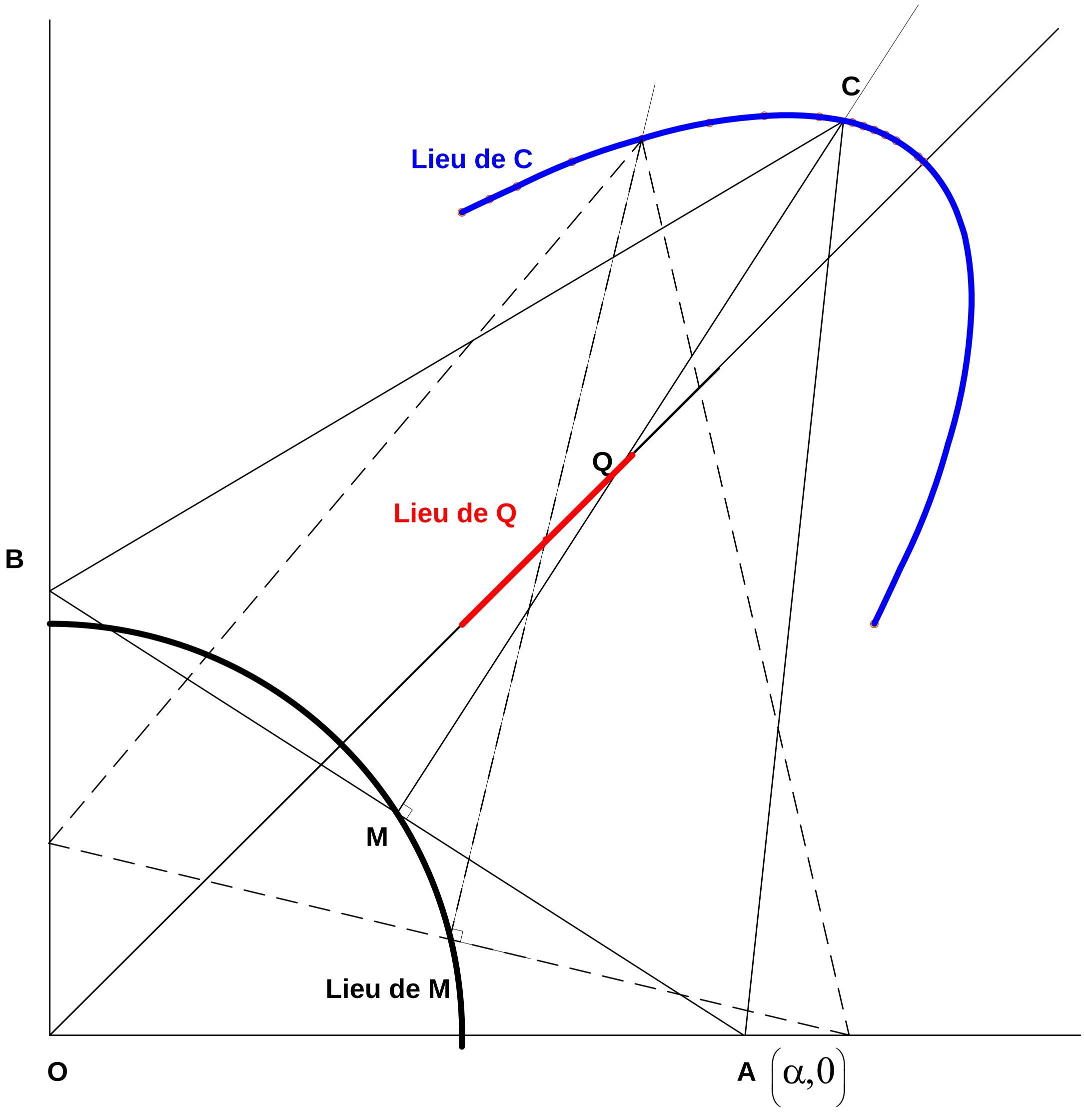
On peut donc éliminer le terme en xy en faisant une rotation des axes d'un angle ϕ de 45°.

$$\rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\phi - y'\sin\phi \\ y = x'\sin\phi + y'\cos\phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

(1) devient $x'^2 + 9y'^2 = \dfrac{9L^2}{4} \rightarrow \dfrac{x'^2}{\left(\frac{3}{2}L\right)^2} + \dfrac{y'^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 1$

L'ellipse à donc pour demi grand axe $\dfrac{3}{2}L$ et pour demi petit axe $\dfrac{L}{2}$

Cette ellipse coupe la droite $y = x$ en $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}L, \dfrac{3\sqrt{2}}{4}L\right)$



Le 1 mars 2006

EXGAP092 – Bruxelles, septembre 2005

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne la parabole d'équation $Y^2 = 2pX$. Déterminer analytiquement le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires. Quelle est la nature de ce lieu ?

Méthode 1

Soit (α,β) les coordonnées d'un point appartenant au lieu.

Ce point est situé sur la droite d'équation : $y-\beta = m(x-\alpha)$

Lintersection de cette droite avec la parabole $y^2 = 2px$ est donnée par la solution

du système : $\begin{cases} y = m(x-\alpha)+\beta \\ y^2 = 2px \end{cases} \rightarrow \left[m(x-\alpha)+\beta\right]^2 = 2px$

On développe et on regroupe les termes :

$m^2x^2 + 2\left(m\beta - \alpha m^2 - p\right)x + m^2\alpha^2 - 2m\alpha\beta + \beta^2 = 0$

Si la droite est une tangente alors le réalisant de cette équation du second degré est nul.

Et comme le coefficient en x est paire, on calcule simplement :

$\left(m\beta - \alpha m^2 - p\right)^2 - m^2.\left(m^2\alpha^2 - 2m\alpha\beta + \beta^2\right) = 0$

$\rightarrow 2\alpha m^2 - 2\beta m + p = 0$

On résoud. Ce qui nous donne les pentes des deux tangents $\begin{cases} m_1 = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha p}}{2\alpha} \\ m_2 = \dfrac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha p}}{2\alpha} \end{cases}$

Or les tangentes doivent être perpendiculaires, donc $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

$\rightarrow \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha p}}{2\alpha} = -\dfrac{2\alpha}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha p}} \rightarrow \beta^2 - \beta^2 + 2\alpha p = -4\alpha^2 \rightarrow 2\alpha(2\alpha + p) = 0$

Ce qui donne comme solution non trivial : $\boxed{\alpha = -\dfrac{p}{2}}$

Conclusion : le lieu recherché n'est autre que la directrice de la parabole.

Méthode II (Méthode des coordonnées homogènes)

Une conique en coordonnées homogènes s'écrit :

$f(X,Y,Y) = AX^2 + BXY + CZ^2 + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0$

Ici, la parabole donnée est en coordonnées homogènes $f(X,Y,Z) = Y^2 - 2pXZ = 0$

On en déduit : $A = B = E = F = 0;\; C = 1;\quad D = -2p$

Les dérivées partielles sont : $\begin{cases} f'_X = -2pZ \\ f'_Y = 2Y \\ f'_Z = -2pX \end{cases}$

Soit $x(\alpha,\beta,1)$ un point du lieu cherché $\rightarrow \begin{cases} f'_\alpha = -2p \\ f'_\beta = 2\beta \\ f'_1 = -2p\alpha \end{cases}$

L'équation des pentes des tangentes est donnée par :

$\left[f'^{\,2}_\beta - 4.C.f(\alpha,\beta,1)\right]m^2 + 2.f'_\alpha.f'_\beta.m + f'^{\,2}_\alpha - 4.A.f(\alpha,\beta,1) = 0$

$\rightarrow \left[4\beta^2 - 4\left(\beta^2 - 2p\alpha\right)\right]m^2 - 8p\beta m + 4p^2 = 0$

Ce qui redonne la même équation que précédement : $2\alpha m^2 - 2\beta m + p = 0$

La suite est identique

Le 6 septembre 2005

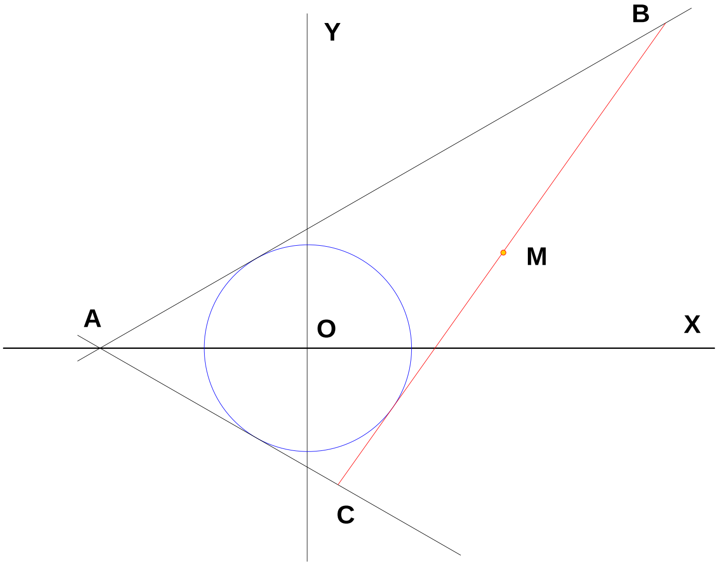
EXGAP093 – Louvain, juillet 2005, série 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*, on considère γ, le cercle centré à l'origine et de rayon unitaire. D'autre part, on a le point *A* = (-*a*; 0) où *a* est une constante réelle strictement positive.

On vous demande :

1. de calculer la valeur de *a* afin que les deux droites issues de *A* et tangentes au cercle forment un angle de *π/*3 (dans le triangle formé par *A* et les deux points de tangence).

2. de donner le lieu du milieu du segment mobile *BC* tel que le cercle γ soit inscrit dans le triangle *ABC*.



1) Si les deux tangentes forment un angle de $\frac{\pi}{3}$, alors une tangente forme un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des x et l'autre un angle de $-\frac{\pi}{6}$.

La pente de la tangente est : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \to$ L'équation de la tangente : $t_1 \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-a)$

L'intersection avec le cercle est donnée par : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-a) \end{cases} \to x^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a)\right]^2 = 1$

$\to 4x^2 - 2ax + a^2 - 3 = 0$. Le réalisant doit être nul : $\Delta \equiv a^2 - 4a^2 + 12 = 0 \to 3a^2 = 12 \to a = 2$

2) Si le cercle est inscrit dans le triangle ABC, alors le segment mobile BC est distant de 1 du centre O.

La distance d'une droite $ax+by+c=0$ à un point $P(x_1, y_1)$ est donné par $d=\dfrac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ce qui donne ici : $\dfrac{|\,c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \to c=\sqrt{a^2+b^2}$

Le segment BC a donc pour équation : $ax+by+\sqrt{a^2+b^2}=0$

Posons $\alpha=\dfrac{a}{b}$, il vient : $BC \equiv y=-\alpha x-\sqrt{\alpha^2+1}$

Coordonnées du point B $\begin{cases} y=-\alpha x-\sqrt{\alpha^2-1} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases} \to \begin{cases} x_B=\dfrac{-\sqrt{\alpha^2+1}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\alpha} \\ y_B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x_B+2) \end{cases}$

Coordonnées du point C $\begin{cases} y=-\alpha x-\sqrt{\alpha^2-1} \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases} \to \begin{cases} x_C=\dfrac{+\sqrt{\alpha^2+1}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\alpha} \\ y_C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x_C+2) \end{cases}$

Coordonnées du point M milieu de BC

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{1}{2}(x_B+x_C) \\ y_M=\dfrac{1}{2}(y_B+y_C)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x_B-x_B) \end{cases} \to \begin{cases} x_M=\dfrac{2-3\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}{3\alpha^2-1} \\ y_M=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+1}-2\alpha}{3\alpha^2-1} \end{cases} \quad (1)$$

Ces dernières équations sont les équations paramètriques du lieu de M.

L'élimination de α n'est pas simple. Posons $x=x_M$ et $y=y_M$, et réarrangeons (1)

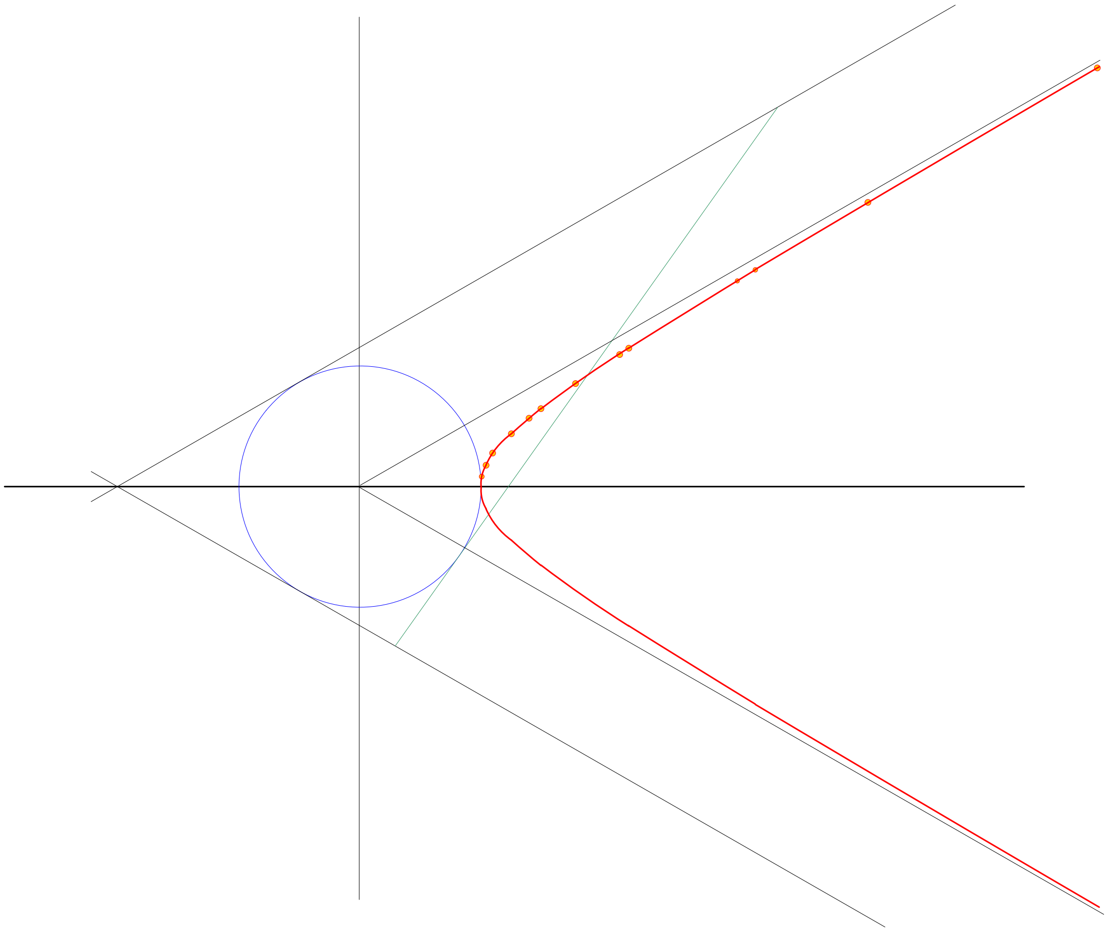
$$\begin{cases} (3\alpha^2-1)x=2-3\alpha\sqrt{\alpha^2+1} \\ (3\alpha^2-1)y^2=\sqrt{\alpha^2+1}-2\alpha \end{cases} \to \begin{cases} (3\alpha^2-1)^2x^2=4-12\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+9\alpha^2(\alpha^2+1) & (2) \\ (3\alpha^2-1)^2y^2=\alpha^2+1-4\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+4\alpha^2 & (3) \end{cases}$$

Combinons (2) et (3) pour éliminer la racine : $(2)-3\times(2)$

$$\to (3\alpha^2-1)^2(x^2-3y^2)=1+9\alpha^2(\alpha^2+1)-15\alpha^2=1-6\alpha^2+9\alpha^4=(3\alpha^2-1)^2$$

Et finalement : $\boxed{x^2-3y^2=1}$

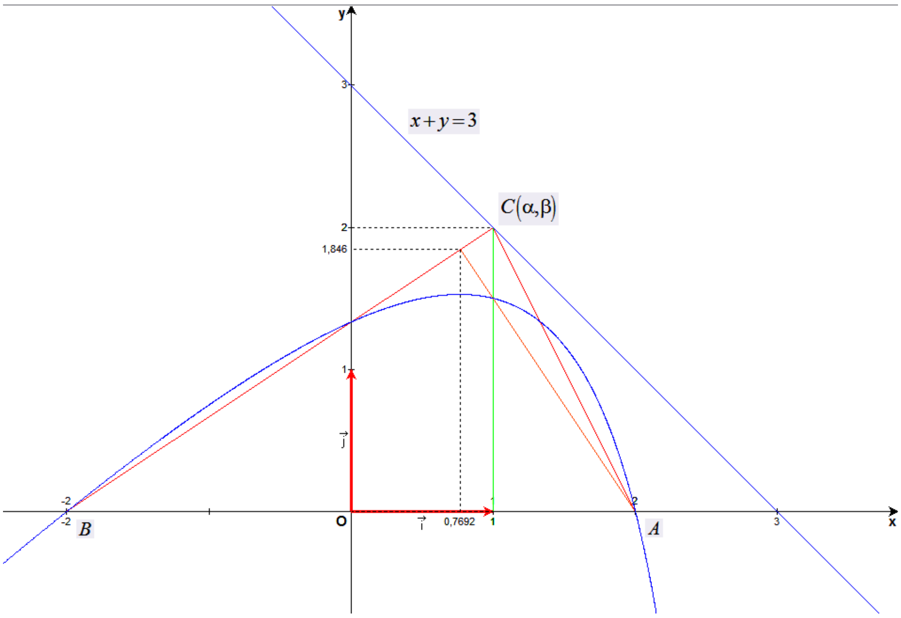
C'est une hyperbole centrée sur l'origine est dont les asymptotes sont parallèles aux tangentes.



Le 4 avril 2006. Modifié le 30 juin 2006 (Jonathan Defoin)

EXGAP094 – Louvain, juillet 2005, série 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*, on considère le triangle *ABC*.
Les deux premiers sommets sont $A = (2; 0)$ et $B = (-2; 0)$.
Le troisième sommet *C* est mobile et se déplace sur la droite $x + y = 3$.
On vous demande de déterminer l'équation du lieu de l'intersection des trois hauteurs du triangle.



Soit (α,β) les coordonnées de $C \to \alpha+\beta=3 \quad (1)$

Le coefficient angulaire de BC est $\dfrac{\beta}{\alpha+2}$

$\to$ le coefficient angulaire de la hauteur issue de $A : -\dfrac{\alpha+2}{\beta}$

$\to$ la hauteur issue de $A : y = -\dfrac{\alpha+2}{\beta}(x-2) \quad (2)$

La hauteur issue de C est : $x = \alpha \quad (3)$

On forme un système avec $(1),(2)$ et (3)

$$\begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ y=-\dfrac{\alpha+2}{\beta}(x-2) \to \text{On élimine } \alpha \text{ et } \beta \to \boxed{x^2-xy+3y-4=0} \\ x=\alpha \end{cases}$$

C'est une hyperbole. En effet : $B^2-4AC=1+0>0$

($B =$ coefficient du terme en xy, ici =1; A coefficient du terme en x^2, ici =1;
C = coefficient du terme en y^2, ici = 0)

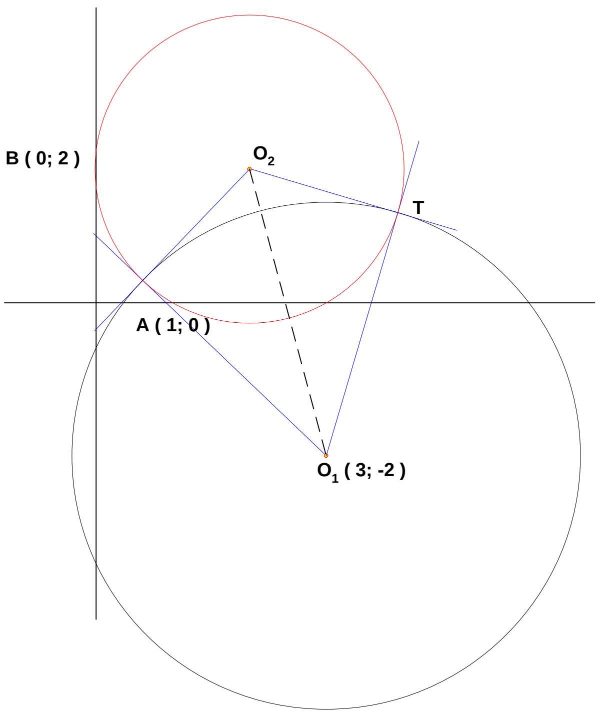
Le 4 avril 2006

EXGAP095– Louvain, septembre 2005

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*, on considère les éléments suivants :

- le cercle *C* passant par les points $A = (1;\ 0)$ et $B = (0;\ 2)$,
- le cercle *C'* dont l'équation est $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.

On vous demande de déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle *C* afin qu'il soit orthogonal au cercle *C'*. Deux cercles sont dits orthogonaux s'ils se coupent et si leurs tangentes respectives en un point commun sont orthogonales.



Le cercle C' peut se mettre sous la forme réduite : $(x-3)^2+(y+2)^2=11$

Donc sont centre O_1 a pour coordonnées $(3,-2)$ et son rayon vaut $R_1=\sqrt{11}$

Le cercle cherché a pour équation : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2{}_2$

A et B appartiennent au cercle $\rightarrow\begin{cases}(1-a)^2+b^2=R_2{}^2 & (1)\\ a^2+(2-b)^2=R_2{}^2 & (2)\end{cases}$

$(1)-(2)$ donne $ab-2a=3\rightarrow a=\dfrac{4b-3}{2}\quad(3)$

En reamplaçant a dans $(1)\rightarrow 5b^2-10b+\dfrac{25}{4}=R_2{}^2\quad(4)$

Si les cercles sont orthogonaux, alors le triangle O_1TO_2 est rectangle.

Pythagore $\rightarrow |\ O_1T\ |^2 + |\ O_2T\ |^2 = |\ O_1O_2\ |^2 \rightarrow R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2} = |\ O_1O_2\ |^2$

$\rightarrow (a-3)^2 + (b+2)^2 = R_1^{\ 2} + 11$

Avec (3) et $(4) \rightarrow \left(\dfrac{4b-3}{2} - 3\right)^2 + (b+2)^2 = 5b^2 - 10b + \dfrac{25}{4} + 11$

On développe et on réduit : $-16b + 28 = 0 \rightarrow b = \dfrac{7}{4} \rightarrow a = 2 \rightarrow R_2 = \dfrac{\sqrt{65}}{4} \approx 2.02$

<u>Conclusion</u>

Le cercle cherché a pour équation : $\boxed{C \equiv (x-2)^2 + \left(y - \dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{65}{16}}$

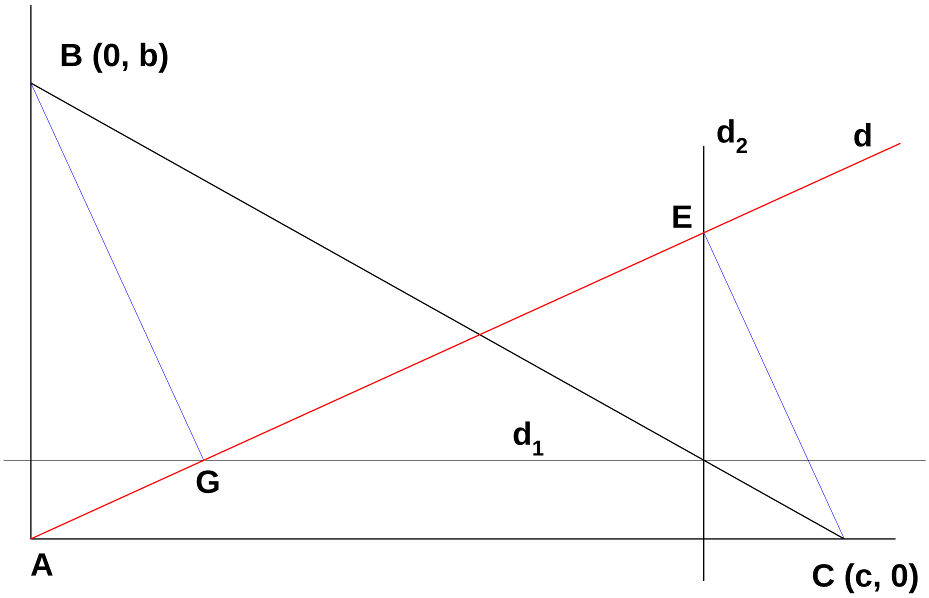
Le 4 avril 2006

EXGAP096– Louvain, juillet 2005, série 2

Soit ABC un triangle rectangle en A et d une droite contenant A. On note G la projection orthogonale de B sur d et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la parallèle à AC menée par G et d_2 la parallèle à AB menée par E.

1. Démontrer que $d_{1,}$, d_2 et BC sont concourantes
2. Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de $d_{1,}$et d_2 quand d varie

---



Nous allons calculer les coordonnées des points E et G. On en déduira les équations des droites d_1 d_2 et nous vérfierons que le point d'intersection de d_1 et d_2 appartient à la droite BC

$$\begin{cases} d \equiv y = mx \\ GB \equiv y = -\dfrac{x}{m} + b \end{cases} \rightarrow mx = -\frac{x}{m} + b \rightarrow x = \frac{mb}{m^2+1} \rightarrow y = -\frac{b}{m^2+1} + b = \frac{m^2 b}{m^2+1}$$

$$\rightarrow G\left(\frac{mb}{m^2+1}, \frac{m^2 b}{m^2+1}\right) \rightarrow \boxed{d_1 \equiv y = \frac{m^2 b}{m^2+1}} \quad (1)$$

$$\begin{cases} d \equiv y = mx \\ CE \equiv y = -\dfrac{x-c}{m} \end{cases} \rightarrow mx = -\frac{x-c}{m} \rightarrow x = \frac{c}{m^2+1} \rightarrow y = \frac{mb}{m^2+1}$$

$$\rightarrow E\left(\frac{c}{m^2+1}, \frac{mb}{m^2+1}\right) \rightarrow \boxed{d_2 \equiv x = \frac{c}{m^2+1}} \quad (2)$$

Il est immédiat que le point d'intersection de d_1 et d_2 est $\left(\dfrac{c}{m^2+1}, \dfrac{m^2 b}{m^2+1}\right)$

Or $BC \equiv \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{b} = 1$

On vérifie facilement que le point appartient bien à BC : $\dfrac{c}{c\left(m^2+1\right)} + \dfrac{m^2 b}{b\left(m^2+1\right)} = 1$

les trois droites sont donc bien concourantes.

Le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et d_2 quand d varie est la droite BC
On peut le vérifier facilement en éliminant m entre (1) et (2)

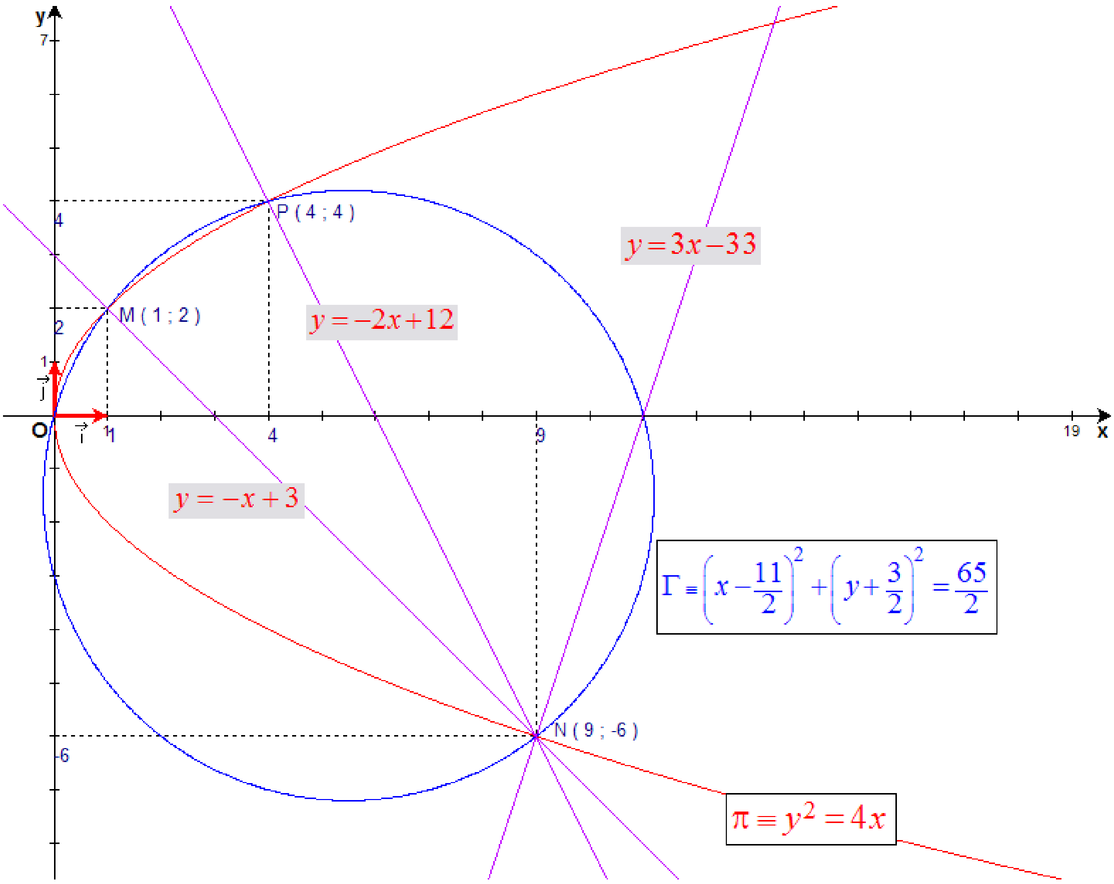
$$\begin{cases} y = \dfrac{m^2 b}{m^2+1} \\ x = \dfrac{c}{m^2+1} \rightarrow m^2 = \dfrac{c}{x} - 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{\left(\dfrac{c}{x} - 1\right) b}{\dfrac{c}{x}} = \frac{(c-x)b}{c} \rightarrow \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{c} \equiv BC$$

Le 18 juillet 2006. Modifié le 19 août (Benoît BAUDELET)

EXGAP097 – Bruxelles – Septembre 2006

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on donne les points M (1,2) et N (9,–6).

1. Déterminez une équation cartésienne du cercle Γ passant par O, M, et N, ainsi que les coordonnées de son centre et la mesure de son rayon.
2. Montrer que les points M, N et O appartiennent à la parabole π d'équation $y^2 = 4x$ et déterminez les coordonnées du quatrième point P, d'intersection de Γ et π.
3. Montrez que les normales à π en M, N et P sont concourantes et déterminer les coordonnées de leur pont commun (NB : la normale à un courbe en un point est la perpendiculaire à la courbe en ce point)



1) Equation du cercle Γ

L'équation générale d'un cercle est : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$$\begin{cases} O\in\Gamma \to a^2+b^2=R^2 \\ M\in\Gamma \to (1-a)^2+(2-b)^2=R^2 \\ N\in\Gamma \to (9-a)^2+(-6-b)^2=R^2 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2=R^2 \\ a^2+b^2-2a-4b+5=R^2 \\ a^2+b^2-18a+12b+117=R^2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 2a+4b=5 \\ -18a+12b=-117 \end{cases} \to \begin{cases} a=\dfrac{11}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \to R^2=\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{65}{2} \to R\simeq 5.7$$

$$\to \boxed{\Gamma \equiv \left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{65}{2}}$$

2. Intersection de la parabole et du cercle.

$$\begin{cases} \pi \equiv y^2=4x \\ \Gamma \equiv \left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{65}{2} \end{cases} \to \frac{y^4}{16}-\frac{11y^2}{4}+\frac{121}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}=\frac{65}{2}$$

$$\to y^4-44y^2+484+16y^2+48y+36=520 \to y\left(y^3-28y+48\right)=0$$

Ce qui donne comme première solution qui correspond à l'origine: $y=0$

On sait que y_M et y_N sont des solutions de l'équation. $y^3-28y+48$ est divisible

par $x-2$ et $x+6 \to$

	3	2	1	0
	1	0	−28	48
2		2	4	48
	1	2	−24	0
−6		−6	24	
	1	−4	0	

$\to y^3-28y+48=(y-4)(y-1)(y+6)$

Si $y=4 \to x=4.$ Le point cherché P a donc pour coordonnées $\boxed{P(4,4)}$

3. Normales

La partie de la parabole située au dessus de l'axe des x a pour équation : $f(x)=2\sqrt{x}$ et la partie située en dessous : $f(x)=-2\sqrt{x}$

La pente des tangentes est donnée par $f'(x)$ et la pente des normales par $-\dfrac{1}{f'(x)}$

L'équation des normales est donc $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(x)}(x-a)$

$$\begin{cases} M \to -\dfrac{1}{f'(x_M)} = -\sqrt{x_M} = -1 \to n_M \equiv y-2=-(x-1) \to n_M \equiv y=-x+3 \\ P \to -\dfrac{1}{f'(x_P)} = -\sqrt{x_P} = -2 \to n_P \equiv y-4=-2(x-4) \to n_P \equiv y=-2x+12 \\ N \to -\dfrac{1}{f'(x_N)} = +\sqrt{x_N} = 3 \to n_N \equiv y+6=3(x-9) \to n_N \equiv y=3x+33 \end{cases}$$

Calculons l'intersection de n_M et n_P $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=-2x+12 \end{cases} \to \boxed{(9,-6)}$

Ce qui correspond simplement au point N

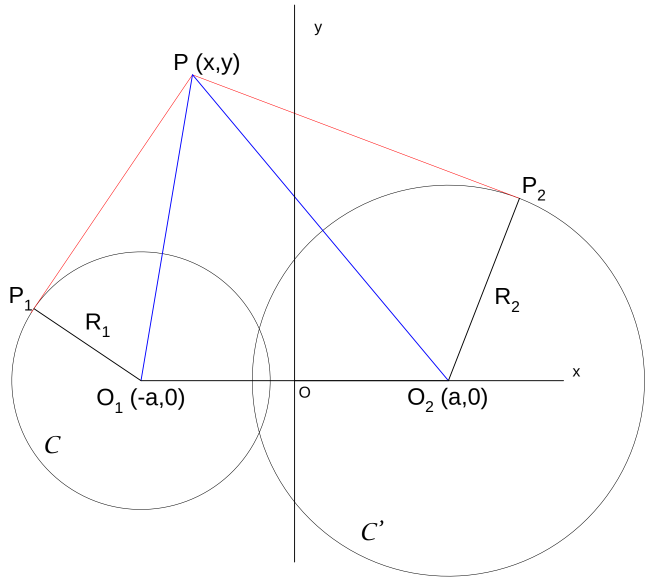
Le 6 aout 2006

EXGAP098 – Liège – Septembre 2006

Soient deux cercles C et C' non concentriques. Par tout point P du plan extérieur à ces deux cercles, on peut mener une tangente p à C et une tangente p' à C'. La droite p rencontre alors C au point de tangence P_1, et p' rencontre C' en P_2.
Déterminer le lieu géométrique des points P du plan tels que

$$\left|\overrightarrow{PP_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PP_2}\right|^2 = k$$

Où k est un nombre réel donné.



Prenons un système d'axe tel que les centres O_1 et O_2 des cercles de rayon R_1 et R_2 soient sur l'axe x et que l'axe y soit élevé au milieu de O_1O_2.

Soient les coordonnées des points : $P(x,y), O_1(-a,0)$ et $O_2(a,0)$.

Nous avons par simple application de Phytagore :

$$|PP_1|^2 = |O_1P|^2 - R_1^2 = (x+a)^2 + y^2 - R_1^2$$

$$|PP_2|^2 = |O_2P|^2 - R_1^2 = (x-a)^2 + y^2 - R_2^2$$

Remplaçons dans l'expression demandée :

$$|PP_1|^2 - |PP_2|^2 = k$$

$$\rightarrow (x+a)^2 + y^2 - R_1^2 - (x-a)^2 - y^2 + R_2^2 = k$$

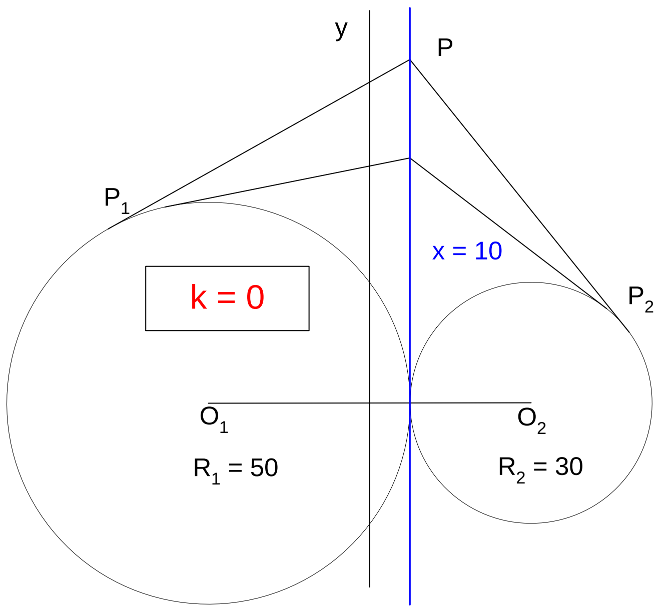
$$\rightarrow 4ax = \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4a}\left(k + R_1^2 - R_2^2\right)}$$

C'est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des y.

Exemple

Dans le cas où $k = 0$ et que les cercles sont tangents extérieurement

$\rightarrow 2a = R_1 + R_2$. Le lieu est alors $x = \dfrac{R_1 - R_2}{2}$



Le 6 aout 2006

EXGAP099 – Bruxelles – Septembre 2006

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on donne les coniques d'équations respectives :

$$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$
$$g(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}y - 1 = 0$$

a) Spécifiez la nature de ces deux coniques et représentez-les en prenant pour unité de mesure le cm.
b) Déterminez les coordonnées des points d'intersection des deux coniques.
c) Si λ est un paramètre réel, l'équation $f(x,y) + \lambda \,.\, g(x,y) = 0$ représente une famille de coniques passant par les points d'intersection trouvés au b). Déterminez, parmi les coniques de la famille, celle qui passe par le point $x = -2\sqrt{3}/3$; $y = 0$. Quelle est la nature de cette courbe ? Dessinez-la.

---

a) $f(x,y)$ est un cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1
$g(x,y)$ est une ellipse de centre $(0,0)$ et d'axes $a = 1$ et $b = 2$

b) Intersection des deux coniques

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0 \end{cases} \to (y-1)^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0 \to \left(\frac{3}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}y - 1\right) = 0$$

$$\to \begin{cases} y = \frac{2}{3} \to x^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 - 1 = 0 \to x^2 = \frac{8}{9} \to \begin{cases} x = +\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \\ y = 2 \to x^2 + (2-1)^2 - 1 = 0 \to x = 0 \end{cases}$$

Les points sont donc : $\boxed{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ et } (0,2)}$

c) $f(x,y) + \lambda g(x,y) = (1+\lambda)x^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right)y^2 - 2y - \lambda = 0 \qquad (1)$

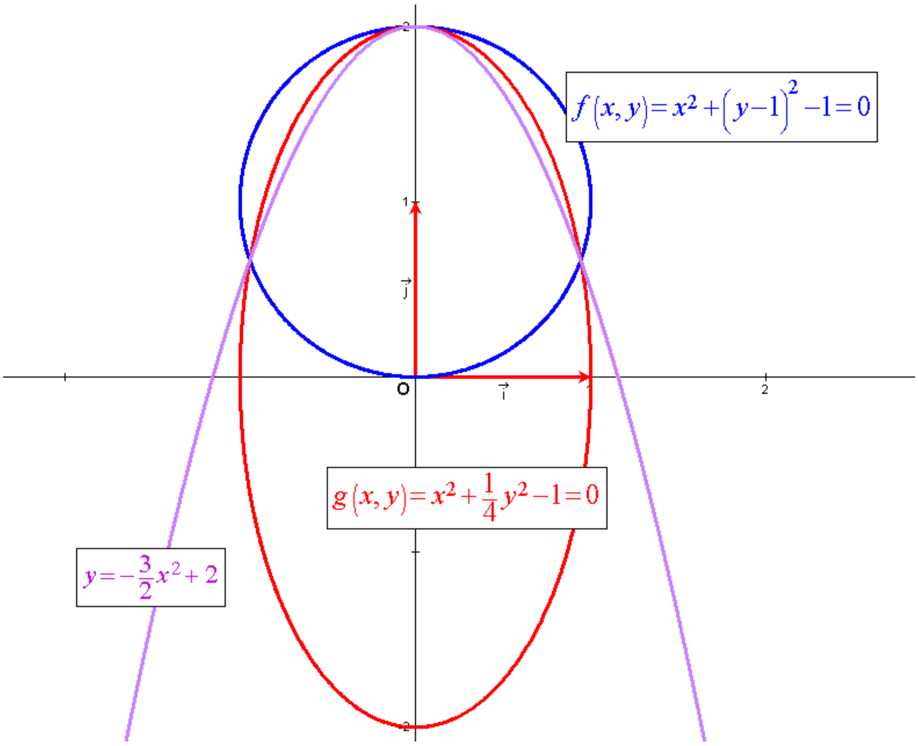
On cherche la courbe qui passe par $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

$$\to (1+\lambda)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \lambda = 0 \to \lambda = -4$$

On remplace dans (1) pour obtenir la courbe cherchée :

$$\to -3x^2 + (1-1)y^2 - 2y + 4 = 0 \to \boxed{y = -\frac{3}{2}x^2 + 2}$$

C'est une parabole d'axe Oy et de sommet $(0,2)$



Le 10 février 2007