**Exercices résolus de mathématiques.**

# Géométrie synthétique dans l'espace

# GSE 0

**EXGSE000 – EXGSE009**

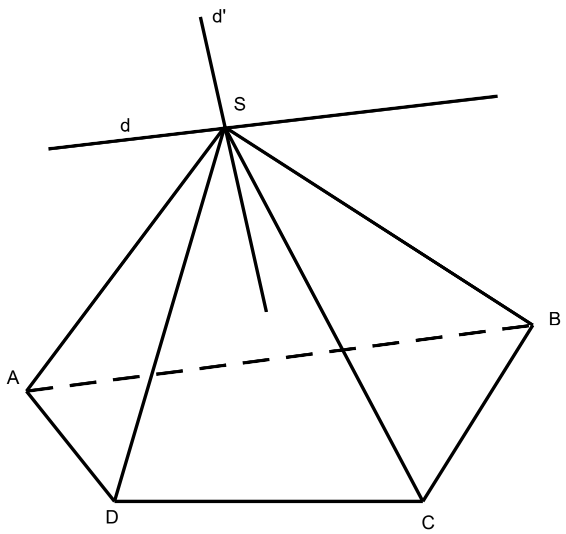
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 juillet 03

## EXGSE001 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

On considère une pyramide de sommet $S$ et dont la base est un quadrilatère convexe plan $ABCD$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si le plan $ABCD$ est parallèle aux droites d'intersections des plans $SAB$ et $SCD$ d'une part, $SBC$ et $SAD$ d'autre part.




---

Soit $d \equiv SAB \cap SDC \quad et \quad d' \equiv SAD \cap SBC$

$a)$ Soit $(dd')//ABCD$

Comme $\begin{cases} d \subset SAB \\ d \subset SDC \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d // AB \\ d // DC \end{cases} \rightarrow AB // DC$

De même : Comme $\begin{cases} d' \subset SBC \\ d' \subset SAD \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d // BC \\ d // AD \end{cases} \rightarrow BC // AD$

Et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Soit ABCD un parallélogramme.

Comme $AB // DC \rightarrow \begin{cases} d // AB \\ d // DC \end{cases} \rightarrow d //$ au plan $ABCD$

De même : Comme $AD // BC \rightarrow \begin{cases} d' // AD \\ d' // BC \end{cases} \rightarrow d' //$ au plan $ABCD$

Et donc $(dd')$ est $//$ au plan $ABCD$

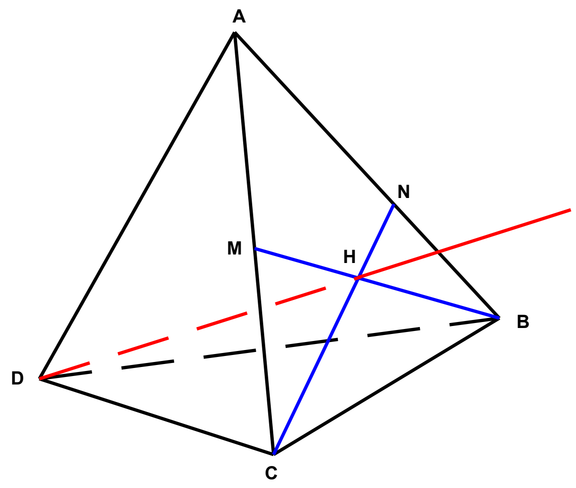
---

Modifié le 03 février 06 (Francis Drapier)

## EXGSE002 – FACSA, Liège, septembre 2000.

Un tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB$ est orthogonal à $CD$ et $AC$ à $BD$.
Montrer que, si $H$ appartient au plan déterminé par $A$, $B$, et $C$ alors $H$ est l'orthocentre du triangle si et seulement si $DH$ est perpendiculaire au plan $ABC$.

---




<u>La condition est nécessaire</u>

Supposons que $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

$\rightarrow$ $CH$ est une hauteur de $ABC$ $\rightarrow$ $AB \perp NC$
or par hypothèse $AB \perp DC$ donc $AB \perp$ plan $DNC$ et par conséquent $DH \perp AB$

$\rightarrow$ $BH$ est une hauteur de $ABC$ $\rightarrow$ $AC \perp MC$
or par hypothèse $AC \perp DB$ donc $AB \perp$ plan $DMC$ et par conséquent $DH \perp AC$

Dés lors $DH \perp$ plan $ABC$

<u>La condition est suffisante</u>

Supposons que $DH \perp$ triangle $ABC$.

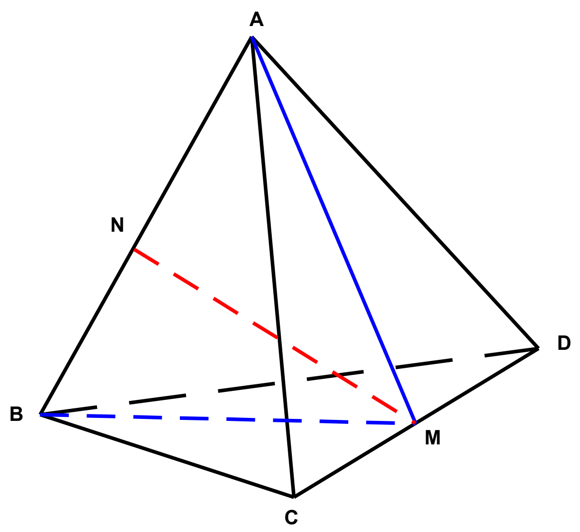
$\rightarrow$ or $DC \perp AB$ $\rightarrow$ le plan $DHC \perp$ plan $ABC$
$\rightarrow$ $CH \perp AB$ $CH$ est donc une hauteur du triangle $ABC$

$\rightarrow$ or $AC \perp DB$ $\rightarrow$ le plan $BDH \perp$ plan $ABC$
$\rightarrow$ $BH \perp AB$ $BH$ est donc une hauteur du triangle $ABC$

Dés lors $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

## EXGSE003 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que AB est perpendiculaire à $CD$ et que $|AC| = |AD|$.
Démontrer que $|BC| = |BD|$ et que la perpendiculaire à $AB$ et $CD$ est la perpendiculaire à $AB$ passant par le milieu de $CD$.




$\Delta\ ADC$ est isocèle, donc $AM$ est une médiatrice $\rightarrow$ $AM \perp CD$
Le plan $AMB$ est donc $\perp$ à $CD$, ce qui implique $BM \perp CD$.
$\rightarrow$ $BM$ médiatrice de $CD$ dans le $\Delta\ CBD$ $\rightarrow$ $|BC| = |BD|$

Dans le $\Delta\ AMB$ abaissons la perpendiculaire $NM$ à $AB$ issue de $M$.
Comme $NM \in$ au plan $AMB$ qui est $\perp$ à $CD$, $\rightarrow$ $NM \perp CD$
$NM$ est donc la perpendiculaire commune à $AB$ et $CD$ et elle passe par le milieu de $CD$.

## EXGSE004 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999 et juillet 2010

**Enoncé de juillet 1999.**

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $SA, SB$ et $SC$ sont perpendiculaires deux à deux.
On désigne par $H$ le pied de la hauteur issue de $S$ dans le triangle $SBC$ et par $I$ le pied de la hauteur issue de $S$ dans le triangle $ASH$.
Démontrer que $SI$ est perpendiculaire au plan $ABC$ et que $I$ est le point d'intersection des hauteurs du triangle $ABC$.

**Enoncé de juillet 2010**

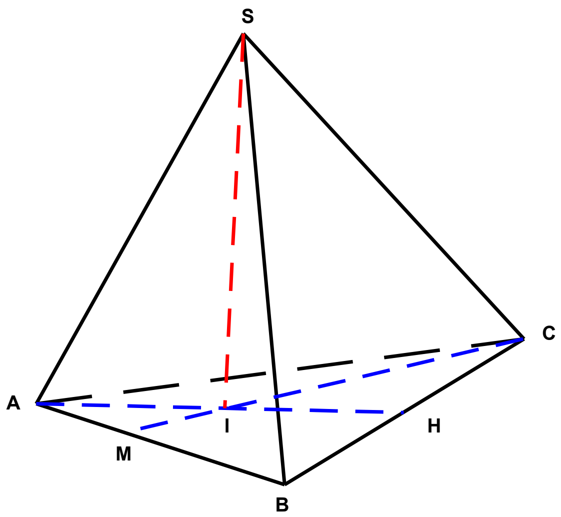
Un plan $\pi$ coupe les arêtes $[AB],[AC]$ et $[AD]$ d'un cube en trois points notés respectivement $B', C'$ et $D'$. Dans le triangle $AB'C'$, on note $H$ le pied de la hauteur issue de $A$.

(a) Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes de votre raisonnement, que la droite $B'C'$ est perpendiculaire au plan $AD'H$.

(b) En déduire que le plan $AD'H$ est perpendiculaire au plan $\pi$.

(c) En déduire que la projection orthogonale de $A$ sur le plan $\pi$ coïncide avec l'orthocentre du triangle $B'C'D'$.

---



$\begin{cases} AS \perp SB \\ AS \perp SC \end{cases} \rightarrow$ plan $ASH \perp$ plan $SBC \quad \rightarrow \quad BC \perp$ au plan $ASH$ et donc à $SI$

Or par hypothèse $SI \perp AH \quad \rightarrow \quad SI \perp$ au plan $ABC$

(car $SI$ est $\perp$ à deux droites qui appartiennent au plan $ABC$)

Soit $IC$ qui coupe $AB$ en $M$.

$\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \rightarrow$ Le plan $SCM$ est $\perp$ au plan $SAB$

$\rightarrow \quad CM \perp AB$ et donc $CM$ est une hauteur de $ABC$.

$I$ est donc l'orthocentre de $ABC$.

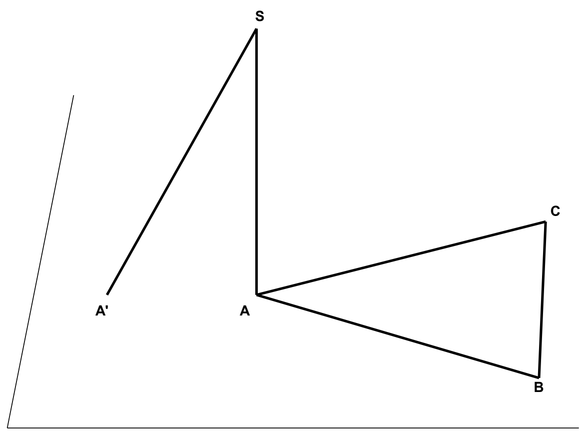
---

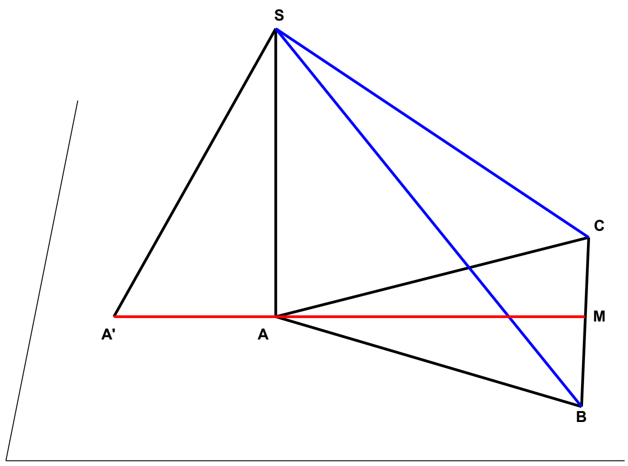
## EXGSE005 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$. On fixe $S$ distinct de $A$ sur la perpendiculaire au plan $ABC$ issue de $A$ et on note $A'$ le point de percée dans le plan $ABC$ de la perpendiculaire à $SBC$ issue de $S$.

Démontrer que $|SB| = |SC|$ et que $AA'$ est la médiatrice du segment $BC$.

---



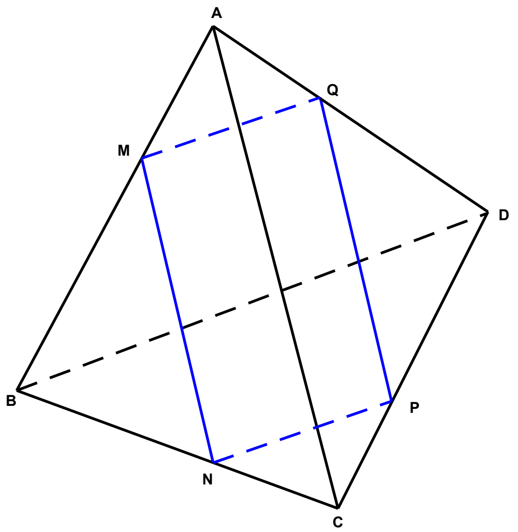



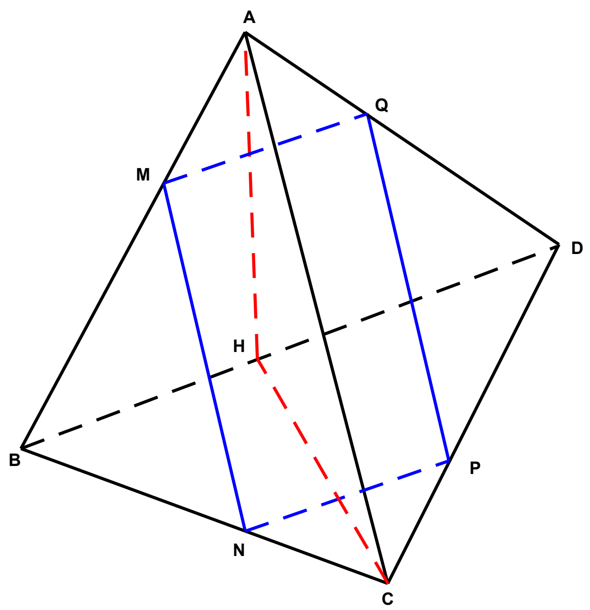
$\Delta\ SAB = \Delta\ SAC$ car ce sont deux triangles rectangles ayant 2 côtés égaux.
$\rightarrow \quad SC = SB$

$A$ est sur la médiatrice de $BC$ puisque $\Delta\ ABC$ est isocèle.
Or $\Delta\ SA'B = \Delta\ SA'C$ (Triangles rectangles ayant deux côtés égaux).
$\rightarrow \ A'C \ = A'B \ \rightarrow A'$ est sur la médiatrice de $CB$
Donc $AA'$ est la médiatrice.

## EXGSE006 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1998.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier $\left(\text{c'est-à-dire dont les arêtes ont la même longueur}\right)$.
Démontrer que si un plan $p$ le sectionne suivant un losange, alors $p$ est parallèle à deux des arêtes et coupe les deux autres en leur milieu
$\left(\text{Le losange est alors un carré, mais on ne demande pas de la démontrer}\right)$.



Si $MQPN$ est un losange, c'est aussi un parallélogramme.

$$\begin{cases} MQ \in \text{plan } ABD \text{ et est // plan } BCD \\ BP \in \text{ plan } BCD \text{ et est // plan } ABD \end{cases} \rightarrow \quad MQ \,//\, NP \,//\, BD$$

Même chose pour démontrer que $MN \,//\, QP \,//\, AC$

Les quatres faces sont des triangles équilatéraux égaux.

Dans le $\Delta\ ABC$ : $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{MN}{AC}$

Dans le $\Delta\ BCD$ : $\dfrac{CN}{BC} = \dfrac{CP}{CD} = \dfrac{NP}{BD}$

or $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{NP}{BD} \quad \rightarrow \quad BM = BN = CN = PC$

$N$ est donc le milieu de $BC$.

Même raisonnement pour $M$, $Q$ et $P$.

Bien que cela ne soit pas demandé, démontrons que le losange est un carré.

Soit $H$ le pied de la médiatrice abaissée de $A$.

$H$ est aussi le pied de la médiatrice abaissée de $C$.

$BD \perp \text{plan } AHC \quad \rightarrow \quad BD \perp AC$

et comme $MQ \,//\, BD \quad \rightarrow \quad MQ \perp AC$

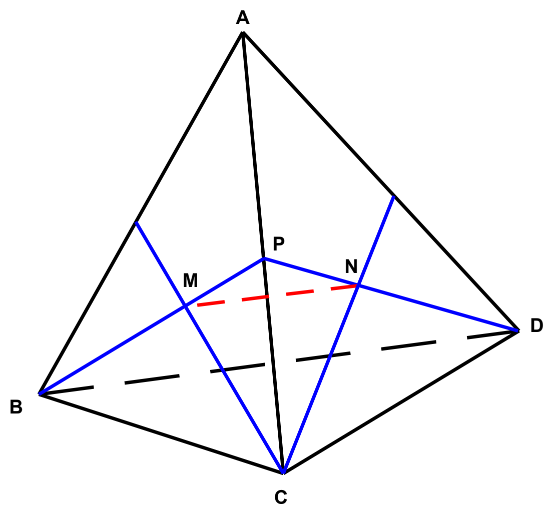
or $MN \,//\, AC \quad \rightarrow \quad MN \perp MQ$

Donc $MNPQ$ est un carré

## EXGSE007 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Démontrer que dans un tétraèdre le segment qui joint les centres de gravité (points de concours des médianes) de deux faces est parallèle à une arête et en vaut le tiers.

---




Dans le $\Delta\ BPD$ :

$$BM = \frac{2}{3} BP$$

$$ND = \frac{2}{3} PD$$

Par conséquent $MN$ est parallèle à $BD$

Les $\Delta\ PMN$ et $PBD$ sont semblables et comme

$MP = \frac{1}{3} PB$ on a $MN = \frac{1}{3} BD$

## EXGSE008 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $AB$ soit orthogonal à $CD$. On désigne par $H$ la projection orthogonale de $A$ sur le plan $BCD$ et on suppose que $H$ n'appartient pas aux droites $BC$ et $BD$.

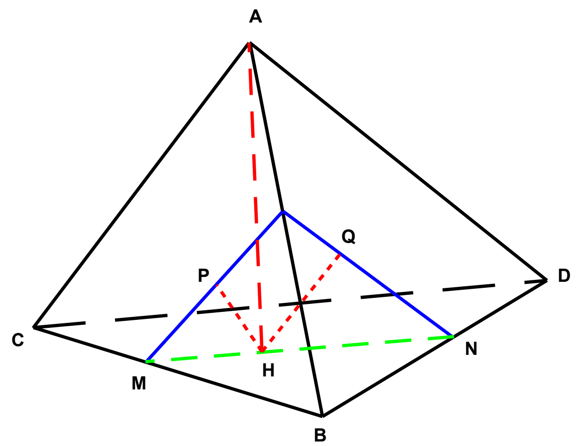
On désigne par $P$ et $Q$ les projections orthogonales de $H$ sur les plans $ABC$ et ABD.

Démontrer que

a) Le plan $PHQ$ est perpendiculaire à $AB$.

b) Le plan $PHQ$ coupe le plan $BCD$ suivant une parallèle à $CD$.

---




$HQ \perp$ plan $ABD \quad \rightarrow \quad HQ \perp AB$

$HP \perp$ plan $ABC \quad \rightarrow \quad HP \perp AB$

$\rightarrow \quad$ Plan $PHQ \perp AB$

$$\begin{cases} AH \perp \text{plan } BCD \\ AB \perp CD \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{plan } AHB \perp CD$$

Or $MN \in$ plan $PHQ$ qui est $\perp$ à $AB \quad \rightarrow \quad MN \perp AB$

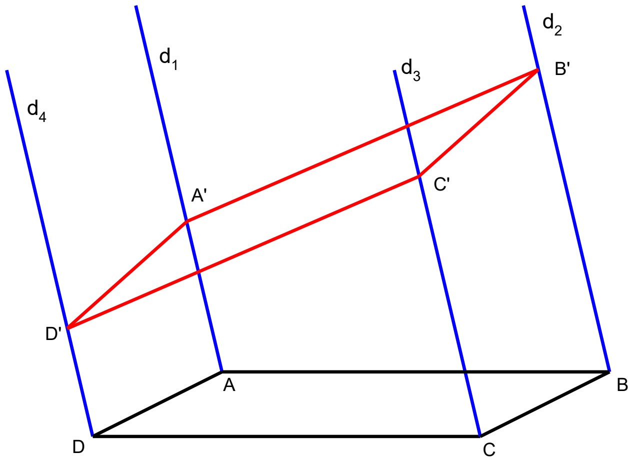
et comme $MN$ est aussi $\perp$ à $AH$, $MN$ est ^plan $AHB$

Par conséquent, $MN // CD$.

## EXGSE009 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

Soit un parallélogramme $ABCD$ et $d_1, d_2, d_3, d_4$, quatre droites passant par $A$, $B$, $C$ et $D$, parallèles entre elles et non contenues dans le plan $ABCD$.
Démontrer que tout plan $P$ qui coupe $d_1$ coupe les quatre droites selon un parallélogramme.

---




C'est immédiat puisque deux plans parallèles sont coupés par un autre suivant des droites parallèles

plan $A'ADD' //$ plan $B'BCC' \quad \rightarrow \quad A'D' // B'C'$
plan $A'B'BA$ // plan $C'CDD' \quad \rightarrow \quad A'B' // D'C'$

$\rightarrow \; A'B'C'D'$ est un parallélogramme.