Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 10

EXGSE100 – EXGSE109

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans

Juillet 2010

EXGSE100 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 2

Une « fusée » est construite à partir d'un cylindre de rayon a et de hauteur $H = 2a$ auquel on superpose un cône dont la base est de rayon a et dont la hauteur est h.
On désire prévoir deux niveaux de même volume dans la fusée, ces niveaux étant séparés par un plan parallèle à la base du cylindre, situé à une hauteur h_1 par rapport à cette même base.
On vous demande d'exprimer h_1 en fonction de a et h en discutant la solution pour différentes valeurs de a et h.

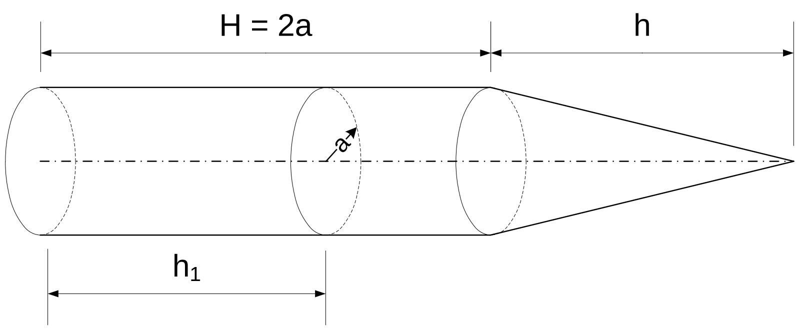
Solution proposée par Nicole Berckmans

Le volume total de la fusée est la somme du volume du cylindre et du volume du cône.

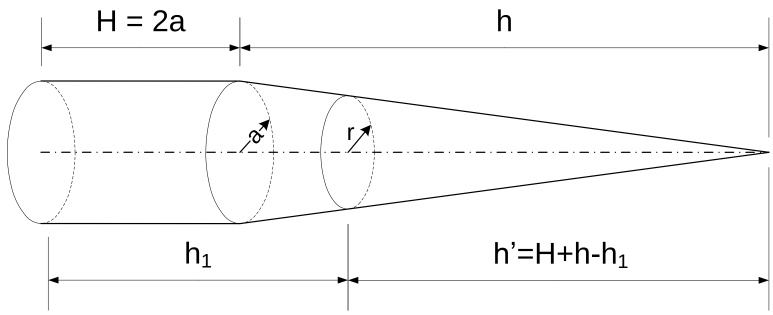
$$V_{tot} = 2\pi a^2 + \frac{1}{3}\pi a^2 h = \frac{\pi a^2}{3}(h+6a)$$

La moitié de ce V_{tot} vaut $\pi a^2\left(\frac{h}{6}+a\right)$ ce qui représente le volume d'un cylindre où a est le rayon de la base et $\left(\frac{h}{6}+a\right)$ est la hauteur. Ce cylindre sera à l'intérieur du cylindre donné à condition que : $\frac{h}{6}+a \le H = 2a$, c'est-à-dire $h \le 6a$.

Nous envisagerons donc 2 cas :



<u>1er cas</u> : $h \le 6a$ alors $\boxed{h_1 = \frac{h}{6} + a}$



<u>2ème cas</u> : $6a < h$.

La coupe se fera dans le cône. On va donc calculer h_1 pour que le cône de hauteur h' et de rayon r ait un volume :

$$V = \frac{1}{2}V_{tot} = \pi a^2\left(\frac{h}{6}+a\right)$$

Le volume du petit cône : $V_c = \frac{1}{3}\pi a^2 h'$.

Calculons r en fonction de a, h et h'. Par le théorème de Thalès ou en utilisant les homothéties, on a : $\frac{a}{r} = \frac{h}{h'}$ c'est-à-dire $r = \frac{ah'}{h}$

On doit donc trouver h' à partir de l'équation

$$\pi a^2\left(\frac{h}{6}+a\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{ah'}{h}\right)^2 h'$$

En développant, on trouve : $h' = \sqrt[3]{\frac{h^3+6ah^2}{2}}$

On demande $h_1 = H + h - h'$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_1 = 2a + h - \sqrt[3]{\frac{h^3+6ah^2}{2}}}$$

Autre méthode

<u>1er cas : $h_1 \le 2a$</u>

Dans ce cas, $h \le 6a$ et le plan parallèle coupe le cylindre.

$$\left.\begin{array}{l} V_{cyl} = \pi a^2 2a = 2\pi a^3 \\ V_{cône} = \frac{1}{3}\pi a^2 h \end{array}\right\} \to \pi a^2 h_1 = \frac{1}{2}\left(2\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^2 h\right) \to \boxed{h_1 = a + \frac{1}{6}h}$$

2ème cas : $h_1 > 2a$

Dans ce cas, $h > 6a$ et le plan parallèle coupe le cône et y détermine un tronc de cône.

Le volume du tronc de cône est donné par : $V_{TC} = \frac{1}{3}\frac{\pi a^2}{h^2}\left(h^3 - h'^3\right)$ (Voir ci-dessous)

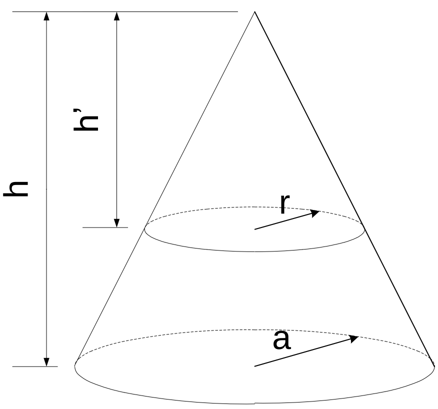
On a alors : $V_{cyl} + V_{TC} = \frac{1}{2}\left(V_{cyl} + V_{cône}\right) \rightarrow V_{TC} = \frac{1}{2}\left(V_{cône} - V_{cyl}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\frac{\pi a^2}{h^2}\left(h^3 - \left(2a + h - h_1\right)^3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi a^2 h - 2\pi a^3\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(h^3 - \left(2a + h - h_1\right)^3\right) = 3h^2\left(\frac{1}{3}h - 2a\right)$$

$$\Rightarrow 2h^3 - 2\left(2a + h - h_1\right)^3 = h^3 - 6ah^2$$

$$\rightarrow \left(2a + h - h_1\right)^3 = \frac{h^3 + 6ah^2}{2} \rightarrow \boxed{h_1 = 2a + h - \sqrt[3]{\frac{h^3 + 6ah^2}{2}}}$$



Volume du tronc de cône

Par homothètie, on a : $\frac{h'}{h} = \frac{r}{a} \rightarrow r = a\frac{h'}{h}$

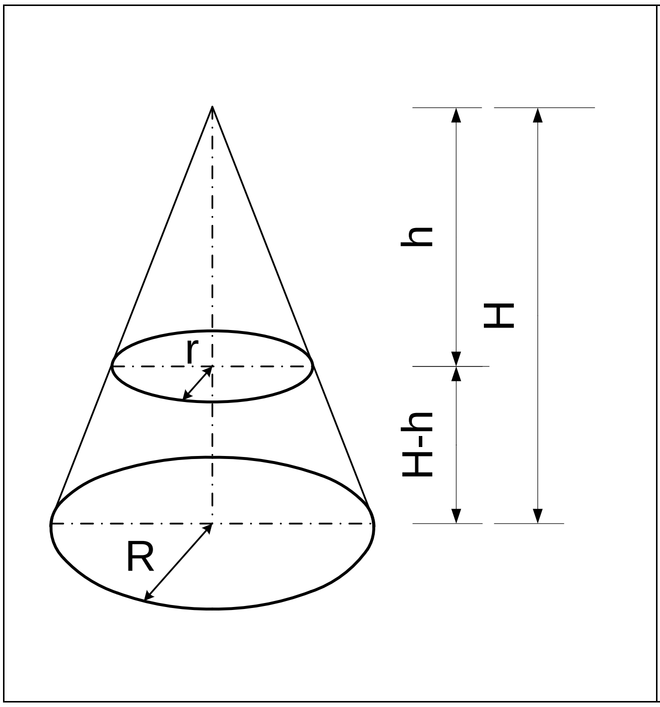
$$V_{TC} = \frac{1}{3}\pi a^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h' \rightarrow V_{TC} = \frac{1}{3}\pi a^2 h - \frac{1}{3}\pi a^2\left(\frac{h'}{h}\right)^2 h' = \frac{1}{3}\frac{\pi a^2}{h^2}\left(h^3 - h'^3\right)$$

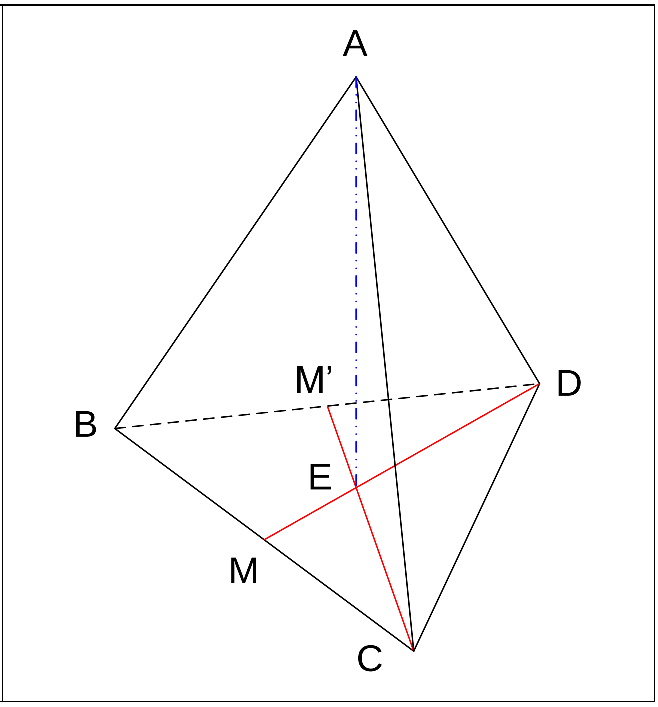
---

21 juillet 2010. Modifié le 16 janvier 2011 (Nicole Berckmans)

EXGSE101 - Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, Série C.

Considérons un cône de hauteur H dont le rayon de la base circulaire est R et le sommet S.
Coupons ce cône par un plan parallèle au plan de la base et distant de S d'une longueur h pour former un tronc de cône de hauteur $(H-h)$.
Quelle relation "$h =$ fonction de H et de R" faut-il imposer pour que le volume de ce tronc de cône soit égal à la somme du volume d'une sphère de rayon R et du volume d'un tétraèdre régulier de côté R ?





Volume du tronc de cône : $V_{TC} = \frac{\pi}{3}R^2H - \frac{\pi}{3}r^2h$ avec $r = \frac{Rh}{H}$ (Voir figure)

Volume de la sphère : $V_S = \frac{4}{3}\pi R^3$

Volume du tétraèdre :

Voir figure : Si le côté du tétraèdre est R : $\| MD \|^2 = \frac{3}{4}R^2$

$$\text{et } \| AE \|^2 = R^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{2}{3}R^2$$

$$\text{Donc : } V_T = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}R.\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}R}_{\| MD \|}\right).\underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}R}_{\| AE \|} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{4}R^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}R^3$$

$$\text{On a alors : } V_{TC} = V_S + V_T \rightarrow \frac{\pi}{3}\left(R^2H - r^2h\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{\sqrt{2}}{12}R^3$$

$$\rightarrow \pi R^2H - \pi\frac{R^2h^3}{H^2} = 4\pi R^3 + \frac{\sqrt{2}}{4}R^3$$

$$\rightarrow \pi H - \pi\frac{h^3}{H^2} = 4\pi R + \frac{\sqrt{2}}{4}R \qquad (R \neq 0)$$

$$\rightarrow h^3 = H^2\left(H - 4R - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}R\right) \rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{H^2\left(H - 4R - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}R\right)}}$$

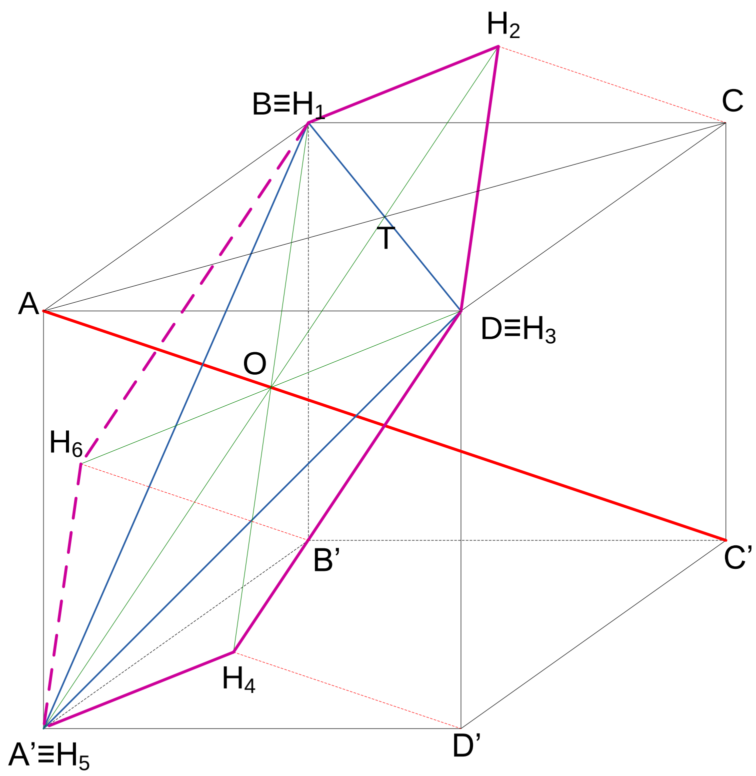
Avec la condition : $H > R\left(4 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right) \simeq 3.887R$

EXGSE102 - – FACSA, ULG, Liège, Septembre 10.

On considère un cube $ABCDA'B'C'D'$ avec $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'D'}$ et un plan π perpendiculaire à la droite AC'. La longueur d'une arête du cube est notée l.
On note respectivement H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 et H_6 les projections orthogonales des sommets B, C, D, D', A', B' du cube sur π.

a) Démontrer que l'hexagone H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 et H_6 est régulier.
(Suggestion : utiliser les propriétés de symétrie du cube).

b) Déterminer l'aire de cet hexagone en fonction de l.



La position du plan π n'est pas précisée. En effet, la projection des 6 sommets donne une figure identique sur n'importe quel plan perpendiculaire à AC'.
Prenons alors par exemple le plan $A'BD$ qui est perpendiculaire à AC' comme nous pouvons facilement le voir par le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'D}=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'C'}\right)\left(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'D}\right)$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'D'}}_{=0}+\overrightarrow{A'D'}^2+\underbrace{\overrightarrow{D'C'}.\overrightarrow{A'D'}}_{=0}+\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{D'D}+\underbrace{\overrightarrow{A'D'}.\overrightarrow{D'D}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{D'C'}.\overrightarrow{D'D}}_{=0}$$

$$=\overrightarrow{A'D'}^2+\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{D'D}=\left|A'D'\right|^2-\overrightarrow{AA'}^2=\left|A'D'\right|^2-\left|AA'\right|^2=0$$

Donc $AC'\perp A'D$. De même, nous aurons $AC'\perp A'B$. Ce qui démontre que le plan $A'BD$ est bien perpendiculaire à AC'.

Méthode 1

Soit donc le plan $\pi \equiv A'BD$. Les points $A' \equiv H_5, B \equiv H_1$ et $D \equiv H_3$ sont confondus avec leur projection. Déterminons la projection H_2 de C sur π.

Soit T l'intersection des diagonales AC et BD.

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ \text{Plan } ACC' \perp \text{face } ABCD \\ T \in \text{plan } ACC' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Le plan ACC' est le plan médiateur de BD. Ce plan contient H_2. Donc H_2 est sur la médiatrice de $BD \Rightarrow |BH_2| = |H_2D|$. Le triangle BH_2D est alors isocèle.

Les triangles rectangles ACC' et CH_2T sont semblables car H_2C est parallèle à AC'.

$$\Rightarrow \frac{|H_2T|}{|CC'|} = \frac{|CT|}{|AC'|} \Rightarrow \frac{|H_2T|}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2}}{l\sqrt{3}} \Rightarrow |H_2T| = \frac{l\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Or } |DT| = \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan TH_2D = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2}}{\frac{l\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow TH_2D = 60° \Rightarrow TDH_2 = 30°$$

Finalement : $BH_2D = 2 \times TDH_2 = 120°$.

Par simple symétrie, les triangles $BH_2D, DH_4A', A'H_6B$ sont tous des triangles isocèles isométriques. Nous en déduisons que l'hexagone $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ est régulier.

Calculons la surface de cet hexagone.

$$|A'H_2| = \sqrt{|AA'^2| + |AT^2|} + TH_2 = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{2}} + \frac{l\sqrt{6}}{6} = l\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = l\,\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Donc :

$$A_{hex} = 6A_{Triangle\ BOH_2} = 6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{|A'H_2|}{2}\right)^2 \sin 60 = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times l^2 \times \frac{4\times 6}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{l^2\sqrt{3}}$$

Rappel : L'aire d'un triangle d'angle α compris entre deux côtés b et c est donnée par

$$A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

Méthode 2

Utilisons le calcul vectoriel. Pour cela définissons, $A'B' \equiv Ox$, $A'D' \equiv Oy$ et $A'A \equiv Oz$.

Pour simplifier prenons $l = 1$. Il suffira de multiplier le résultat final par l pour des longueurs et l^2 pour des surfaces si $l \neq 1$.

$$\left| A'H_2 \right| = \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{1_{OT}} \text{ où } \overrightarrow{1_{OT}} = \frac{\overrightarrow{OT}}{\left| \overrightarrow{OT} \right|} \text{ est un vecteur unitaire de } OT$$

$$\left| A'H_2 \right| = (1,1,1).\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Par simple symétrie, $\left| A'H_2 \right| = \left| DH_6 \right| = \left| BH_4 \right|$

Soit O le milieu de $\left| A'H_2 \right|$.Reste à vérifier que $\widehat{BOH_2 = 60°}$.

De nouveau par symétrie, les autres angles de sommet O seront aussi de 60°.

$$\overrightarrow{A'O} = \frac{1}{2}\left| A'H_2 \right| \overrightarrow{.1_{OT}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'O} = (1,0,1) - \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\cos \widehat{BOH_2} = \frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{A'O}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|.\left|\overrightarrow{A'O}\right|} = \frac{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}.\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} = \frac{\frac{2}{9}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOH_2 = 60°}$$

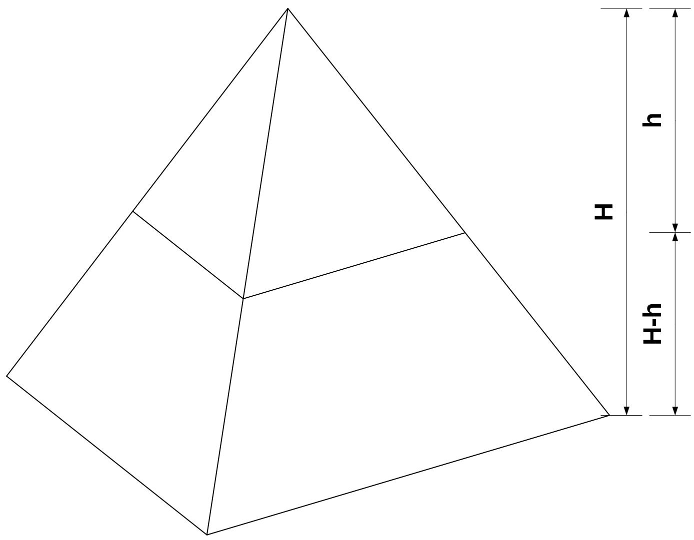
Et donc l'hexagone est un hexagone régulier dont la surface a été déterminée plus haut.

EXGSE103 - EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Soit une pyramide qui est coupée par un plan parallèle à sa base, on vous demande :

- de déterminer la distance du plan par rapport à la base pour que le volume du tronc de pyramide ainsi formé soit les 3/8 du volume total de la pyramide.
- d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$\left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{5}{8} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}H$$

Et donc : $X = H - h = H - \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}H = H\left(1 - \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

---

20 septembre 2010

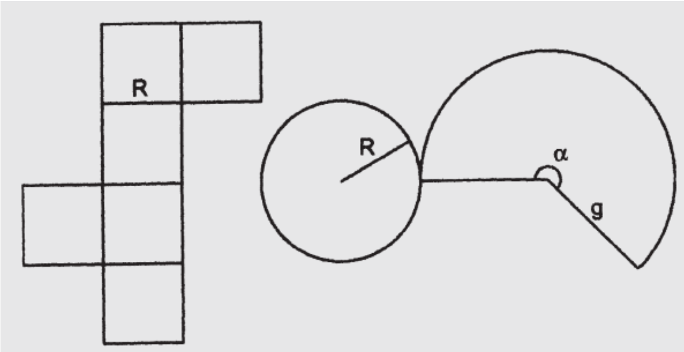
EXGSE104 - FACS - ULB - Bruxelles– juillet 10

La figure ci-dessous représente les développements d'un cube d'arête R et d'un cône. Le développement du cône est constitué d'un cercle de rayon R et d'un secteur de cercle de rayon g et d'angle α.

Dans l'hypothèse où toute section du cône par un plan qui passe par son axe est un triangle équilatéral, on demande de :

a) calculer α et la hauteur du cône en fonction de R uniquement,

b) déterminer le rapport entre le volume du cube et celui du cône.



Solution proposée par Steve Tumson

a) Toute section du cône par un plan qui passe par son axe est un triangle équilatéral : $g = 2R$

Pour un cône droit : $\alpha = 2\pi \dfrac{R}{g} \Rightarrow$ ici, on a $\boxed{\alpha = \pi}$

Nous avons également $g^2 = h^2 + R^2 \Leftrightarrow 4R^2 - R^2 = h^2 \Leftrightarrow \boxed{h = R\sqrt{3}}$

$$b)\ V_{cône} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V_{cône} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi V_{cube} \Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{cône}}{V_{cube}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \simeq 1{,}81}$$

---

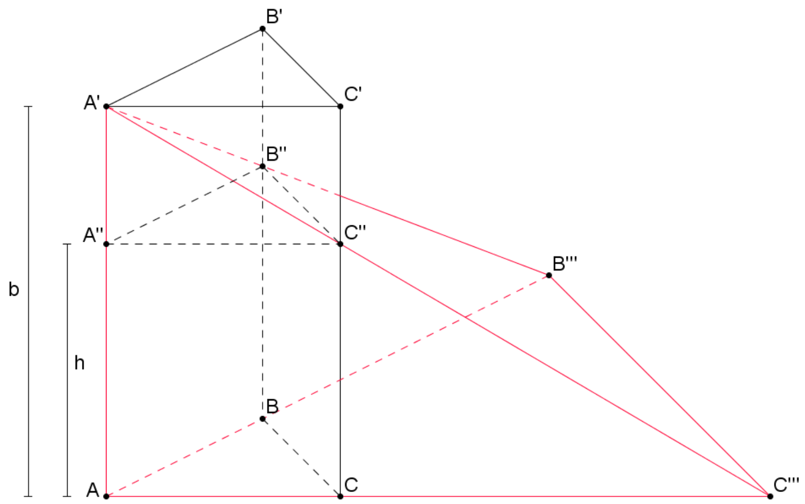
20 janvier 2011. Modifié le 12 novembre 2012 (Jean Perbal)

EXGSE105 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1

On considère un prisme $\mathcal{P}$, droit et à la base triangulaire de hauteur b.
Les sommets du triangle qui forment la base inférieure du prisme sont notés A, B et C tandis que ceux de la base supérieure sont notés A', B' et C'.
Les arêtes verticales de longueur b du prisme qui relient la base inférieure à la base supérieure sont AA', BB' et CC'.
On considère un plan Π parallèle à la base inférieure ABC du prisme.
Le plan Π coupe les arêtes AA', BB' et BB' respectivement en A'', B'' et C''.
On construit ensuite le tétraèdre $\mathcal{T}$ ayant pour sommet le point A' et dont les trois autres sommets sont les points de percée des droites $A'A'', A'B''$ et $A'C''$ dans le plan de la base inférieure ABC.
On demande de :

1) Faire un dessin clair et précis des différents éléments du problème.
2) Calculer la hauteur h du plan Π par rapport à la base ABC pour que le tétraèdre $\mathcal{T}$ ait le même volume que le prisme $\mathcal{P}$.

Solution proposée par Nicole Berckmans



Données : $\mathcal{P}$ prisme droit $ABC, A'B'C'$ de hauteur b

Π plan // à ABC coupant le prisme $\mathcal{P}$ suivant $A''B''C''$

$h = \overline{AA'}$

Construction :

Dans le plan $A'B'BA,$ la droite $A'B''$ coupe AB en B'''

Dans le plan $A'C'CA,$ la droite $A'C''$ coupe AC en C'''

$\mathcal{T}$: tétraèdre $A'B'''C'''A$

Notation : $[ABC]$ désigne l'aire du triangle ABC

Calcul : Volume $\mathcal{P} = b[ABC] = b[A''B''C'']$

Volume $\mathcal{T} = \dfrac{1}{3}b[AB'''C''']$

On demande h tel que Volume $\mathcal{P} =$ Volume $\mathcal{T}$

C'est-à-dire : $[AB'''C'''] = 3[A''B''C'']$ $\qquad (1)$

Soit $\mathcal{H}$, l'homothétie de centre A' et de rapport k qui transforme $A''B''C''$ en $AB'''C'''$

Puisque $\mathcal{H}(A'') = A,$ on a $k\overline{A'A''} = \overline{A'A} \Rightarrow k = \dfrac{b}{b-h}$

$H(A''B''C'') = AB'''C'''$ donc $k^2[A''B''C''] = [AB'''C''']$

Ou encore $\dfrac{b^2}{(b-h)^2}[A''B''C''] = [AB'''C''']$

Puisque on doit avoir (1), il faut que $\dfrac{b^2}{(b-h)^2} = 3$

C'est-à-dire : $b = \sqrt{3}(b-h)$

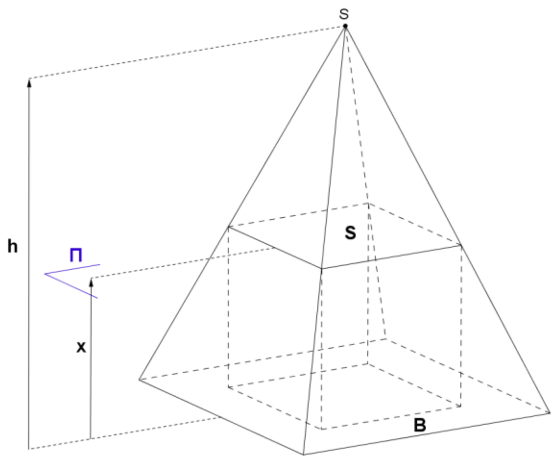
Réponse : $\boxed{h = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}b}$

20 aout 2011

EXGSE106 - EPL, UCL, Louvain, juillet 11, série 2

On considère une pyramide $\mathcal{P}$ de hauteur h. On considère ensuite un plan Π parallèle à la base de $\mathcal{P}$ qui coupe $\mathcal{P}$ à une distance x de la base et forme une section S.
On demande de trouver x tel que le prisme ayant pour base la section S et ayant pour hauteur la hauteur du troons de pyramide ait un volume maximal.
Faites un dessin clair et précis des différents éléments du problème;

Solution proposée par Nicole Berckmans



Soit $\mathcal{H}$, l'homothétie de centre S et de rapport k qui transforme la pyramide de base B en la pyramide de base S.

$$\begin{cases} \mathcal{H}(h) = kh = h - x \\ \mathcal{H}(B) = k^2 B = S \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{B} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2$$

$$V = \text{ le volume du prisme } = Sx = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 x.B$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{B}{h}(h-x)(h-3x) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & h/3 & & h \\ \hline dV/dx & & + & 0 & - & 0 \\ V & 0 & \nearrow & Max & \searrow & 0 \end{array}$$

Pour $\frac{h}{3}$, le prisme est de volume maximal.

Résolu le 20 aout 2011

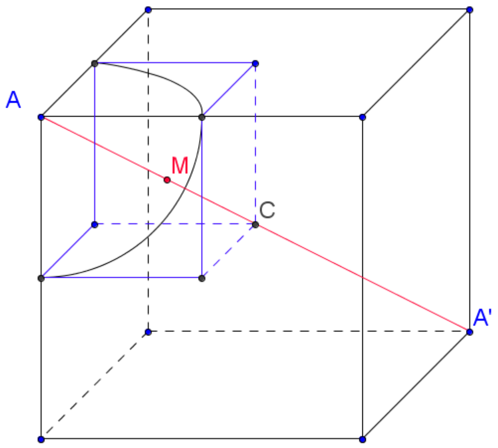
EXGSE107 - EPL, UCL, Louvain, septembre 2009

On considère un cube de côté $2a$. On considère ensuite 8 sphères de rayon a dont les centres sont les sommets du cube. On suppose que les spères sont des outils qui enlèvent chacune une partie de la matière (du volume) du cube. On appelle P l'objet résultant de la coupe effectuée par ces sphères dans le cube.

- Calculer le volume de l'objet P.
- Calculer le rayon r de la plus grande sphère inscriptible dans P.

On vous demande d'effectuer un dessin clair et précis des différents éléments du problème.

Solution proposée par Louis François



Soit le cube de côté $2a$ de diagonale AA' de centre C avec $\|AA'\| = 2\sqrt{3}a$

Le volume du cube est : $8a^3$

Il y a 8 sphères de rayon a dont on prend chaque fois 1/8.

Le volume de l'objet P est donc : $V_P = 8a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = a^3\left(8 - \frac{4}{3}\pi\right)$

Le rayon de la sphère insriptible est :

$$r = \|CA\| - \|AM\| = a\sqrt{3} - a = a\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Le 11 janvier 2012

EXGSE108 - FACSA, ULG, Liège, Juillet 2011

On considère une pyramide droite à base carrée *SABCD* (en d'autres termes, la base *ABCD* de cette pyramide est un carré, et le pied H de la hauteur issue de S est le centre de ce carré).
Cette pyramide est telle que $|AB| = |SH|$ où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.
Cette pyramide est également inscrite dans une sphère (c'est-à-dire que les points *A, B, C, D* et S sont situés à la surface de cette sphère).
Si V et V' désignent respectivement le volume de la pyramide et de la sphère, calculer la du rapport $\frac{V'}{V}$ et en donner une expression indépendante du rayon de la sphère et du côté de la base de la pyramide.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Notons c la longueur d'un côté du carré et r le rayon de la sphère.

Plaçons nous dans le plan SAC. Par symétrie du problème, le triangle SAC est isocèle en S, et inscrit dans un cercle de rayon r dont le centre O coïncide avec celui de la sphère.

Dans ce triangle, la hauteur SH issue de S est aussi celle de la pyramide $SABCD$ et l'on a donc $|SH| = c$. La base $[AC]$ de ce triangle est quant à elle une diagonale de la base carrée $ABCD$ de la pyramide, ce qui donne $|AC| = c\sqrt{2}$ et $|AH| = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Le triangle SAC étant isocèle, le point O est situé sur la hauteur SH, et l'on a $|OS| = r$.

Soit M le milieu du segment $[AS]$. Ce segment étant une corde d'un cercle de centre O, il vient $OM \perp AS$. Le triangle ASH est rectangle en H et tel que $|SH| = c$ et $|AH| = \frac{c}{\sqrt{2}}$. En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient donc $|AS| = c\sqrt{\frac{3}{2}}$, et dès lors $|MS| = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Les triangles SMO et SHA sont semblables. En effet, il sont tous deux rectangles et partagent en outre l'angle $\widehat{ASH}$, ce qui entraîne qu'ils possèdent les mêmes angles. On en déduit l'égalité

$$\frac{|SO|}{|SM|} = \frac{|SA|}{|SH|},$$

qui devient lorsque l'on remplace les longueurs des segments par les valeurs calculées

$$\frac{r}{\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{c\sqrt{\frac{3}{2}}}{c},$$

ce qui se simplifie en

$$r = \frac{3c}{4}.$$

On obtient donc pour le volume V de la pyramide et le volume V' de la sphère

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}c^3 \\ V' &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3c}{4}\right)^3 \\ &= \frac{9\pi}{26}c^3, \end{aligned}$$

d'où l'on extrait finalement

$$\frac{V'}{V} = \frac{27\pi}{16}.$$

Le 21 juin 2011

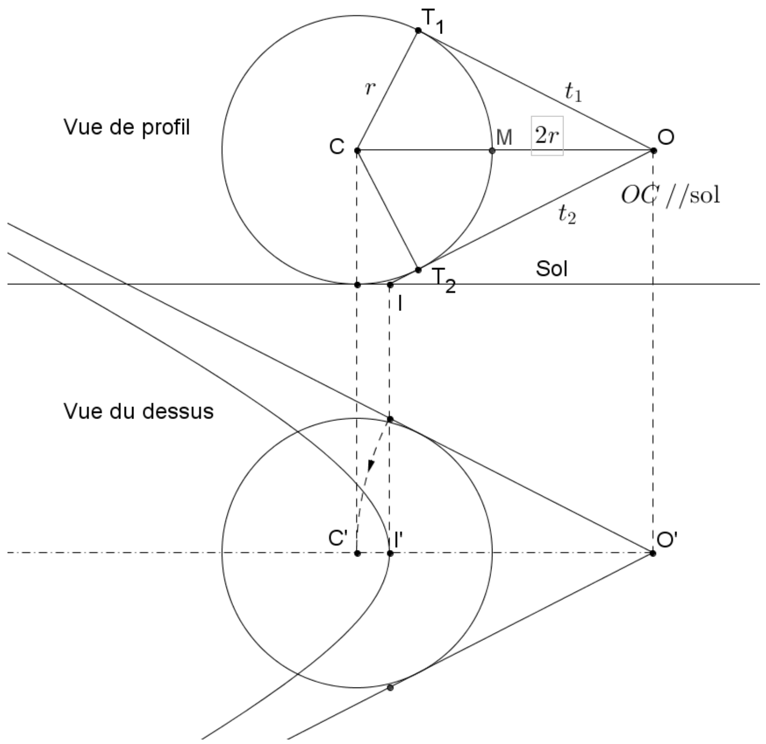
EXGSE109 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Une sphère opaque de rayon r et de centre C, posée sur un sol horizontal, est éclairée par une source lumineuse ponctuelle O, située à une distance $2r$ de C et à la même hauteur que C.

a) Déterminer le lieu de la sphère où les rayons lumineux sont tangents à cette sphère.
Suggestion : Utiliser la symétrie du problème par rapport à l'axe OC.

b) Caractériser la forme de l'ombre portée par cette sphère sur le sol?

Solution proposée par Fabienne Zoetard



a) Plaçons nous dans un plan contenant OC. Par exemple, celui perpendiculaire au sol..

Soit $\begin{cases} t_1 \text{ et } t_2 \text{ les deux tangentes au cercle } \mathscr{C}(C,r) \text{ et } T_1 \text{ et } T_2 \text{ les deux points de tangences.} \\ M \text{ milieu de } [OC] \end{cases}$

Le triangle OCT_1 est rectangle en T_1 et $|MC| = |MO| = r = |CT_1|$

Donc $T_1 \in \mathscr{C}(M,r)$; de même pour T_2.

Dans l'espace, par la symétrie de la figure par rapport à OC, le lieu des rayons tangents à la sphère $\mathscr{S}(C,r)$issus de O est le cercle M et de rayon r.

De plus, $|OT_1|^2 = |OC|^2 - |CT_1|^2 - 4r^2 - r^2 = 3r^2$

Dans l'espace, le lieu $\mathscr{L}$ des rayons tangents à $\mathscr{S}(C,r)$ issus de O est donc l'intersection de la sphère $\mathscr{S}(C,r)$ et de la sphère $\mathscr{S}(0,\sqrt{3}r)$

b) Si on fait abstraction du sol, la zone d'ombre a pour bord une nappe conique tronquée dont les bords latéraux sont les tangentes à $\mathscr{C}(C,r)$ issues de O, et dont la partie tronquée à pour bord le lieu $\mathscr{L}$ (contenant T_1 et T_2).

L'ombre sur le sol est donc l'intersection de cette nappe conique d'axe OC, et du plan parallèle à OC. Il s'agit d'une zone délimitée par une demi parabole, de sommet I (point de percée de OT_2 dans le sol).

Note : Le foyer de la branche d'hyperbole est la projection C' de C sur le sol.

Les asymptotes sont les projections sur le sol des tangentes issues de O et parallèles au sol.

Le 21 aout 2012