

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique dans l'espace**

## **GSE 11**

**EXGSE110 – EXGSE119**

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot  
Benoît Baudalet – Steve Tumson  
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx  
Fabienne Zoetard**

Juin 2012

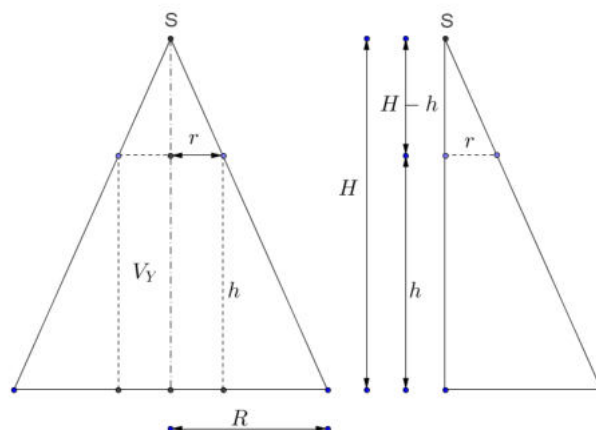
## EXGSE110 - EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Un morceau de bois à la forme d'un cône de révolution de hauteur  $H$  et de base circulaire de rayon  $R$ . A partir de la base, on creuse un trou cylindrique coaxial, de hauteur  $h$  et de rayon  $r$ , qui reste contenu à l'intérieur du cône. Soit  $V$  le volume du cône et  $V_Y$  celui du cylindre. On souhaite maximiser le rapport  $C = \frac{V_Y}{V}$ .

1. Exprimer  $C$  en fonction du rapport  $\frac{h}{H}$ .
2. Calculer la valeur maximale de  $C$ , et les valeurs correspondantes des rapports  $\frac{h}{H}$  et  $\frac{r}{R}$ .
3. Illustrer la solution avec un dessin clair et précis.

---

### Solution proposée par Nicole Berckmans



Remarque préalable : Pour  $h$  (ou  $r$ ) donné le volume maximal du cylindre est obtenu lorsque le cylindre est tangent au cône.

$$C = \frac{V_Y}{V} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = 3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( \frac{h}{H} \right) = 3 \left( 1 - \frac{h}{H} \right)^2 \left( \frac{h}{H} \right) = 3(1-x)^2 x$$

$$\text{si } x = \frac{h}{H} \text{ où } 0 < x < 1$$

$x$	0	$\frac{1}{3}$	1	
$\frac{dC}{dx} = 3(x-1)(3x-1) \Rightarrow$		+	0	-
$C$		$\nearrow$	Max	$\searrow$

Si  $x = \frac{1}{3}$  alors

$\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{4}{9}$ et $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$
---

## EXGSE111 - EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 2.

Deux modèles (1) et (2) sont utilisés pour représenter une fibre de verre.

(1) : un cylindre de hauteur  $h$  et de base circulaire de rayon  $r$ ; sur chacune des bases est collée une calotte sphérique (une demi-boule) de rayon  $r$ .

(2) : un cylindre de hauteur  $H$  et de base circulaire de rayon  $r$ .

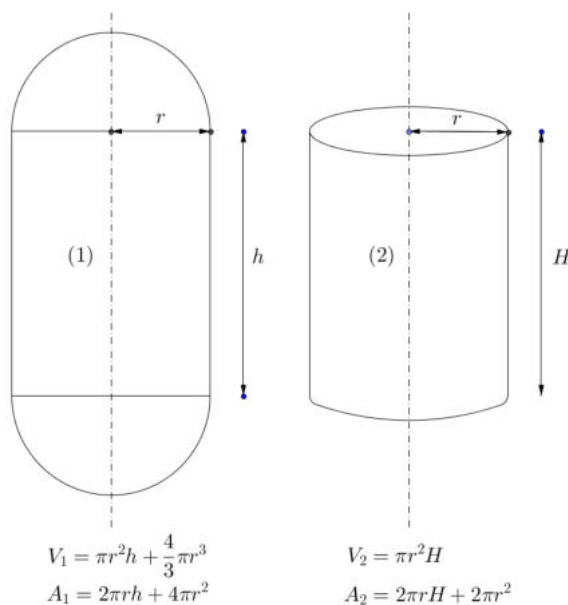
Pour (1) et (2), on désigne le volume de la fibre par  $V_1$  et  $V_2$ , et l'aire totale par  $A_1$  et  $A_2$ .

(N.B. la surface comprend deux calottes sphériques pour (1), et les deux bases circulaires pour (2)). On souhaite utiliser (2) au lieu de (1), à condition que  $V_2$  et  $A_2$  soient proches de  $V_1$  et  $A_1$ .

1. Faire un dessin clair et propre des modèles (1) et (2).
2. On impose que  $V_2 = V_1$ . Exprimer  $H$  en fonction de  $h$  et  $r$  uniquement. Exprimer la différence relative  $(A_2 - A_1) / A_1$  en fonction du rapport  $h / r$  uniquement.
3. On impose que  $A_2 = A_1$ . Exprimer  $H$  en fonction de  $h$  et  $r$  uniquement. Exprimer la différence relative  $(V_2 - V_1) / V_1$  en fonction du rapport  $h / r$  uniquement.
4. Des valeurs de  $H$  calculées aux points 2 et 3, laquelle est la meilleure?  
Justifier la réponse. Sachant qu'en pratique,  $h / r$  est compris entre 10 et 100, comment varie l'erreur avec laquelle le modèle (2) approxime le modèle (1)? Pour quelles valeurs de  $h / r$  l'erreur est inférieure ou égale à 1%?

---

### Solution proposée par Nicole Berckmans



2)  $V_2 = V_1$  implique que  $H = h + \frac{4}{3}r$  et dans ce cas  $\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{1}{3\left(\frac{h}{r} + 2\right)}$

Si  $x = \frac{h}{r}$  alors l'erreur relative est :  $f(x) = \frac{1}{3(x+2)}$ .

3) Si  $A_2 = A_1$  alors  $H = h + r$  et dans ce cas  $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{-1}{3\frac{h}{r} + 4}$ .

Si  $x = \frac{h}{r}$  alors l'erreur relative est :  $g(x) = \frac{1}{3x+4}$

4) Posons :  $x = \frac{h}{r}$

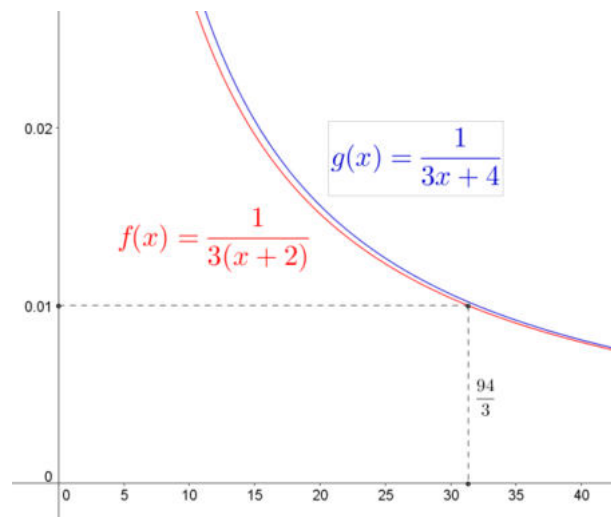
Si  $H = h + \frac{4}{3}r$  alors  $\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{1}{3(x+2)}$  ( $\alpha$ )

Si  $H = h + r$  alors  $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{1}{3x+4}$  ( $\beta$ )

Je choisirais la solution ( $\alpha$ ) car  $\forall x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{3(x+2)} < \frac{1}{3x+4} = g(x)$$

Si  $\frac{1}{3(x+2)} \leq \frac{1}{100}$  alors  $\boxed{\frac{94}{3} \leq x = \frac{h}{r}}$



22 aout 2012

## EXGSE112 - – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

A l'intérieure d'une boule sphérique de centre  $O$  et de rayon  $R$ , on définit deux domaines volumiques. Le premier est celui d'une calotte sphérique de hauteur  $H < R$  et de base circulaire de rayon  $r < R$ . Le second domaine est celui d'un cône de sommet  $O$  et de hauteur  $(R - H)$ , dont la base circulaire de rayon  $r$  est commune à celle de la calotte. Le volume de la calotte est donné par la formule (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$V_s = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H)$$

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et propre.
2. Exprimer  $r$  en fonction de  $H$  et  $R$  uniquement.
3. Exprimer le volume du cône en fonction de  $H$  et  $R$  uniquement.
4. Calculer le rapport  $H / R$  de façon que les volumes de la calotte et du cône soient égaux.

---

### Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

2. 1<sup>ère</sup> méthode : dans le triangle  $OBA$  rectangle :  $r = \sqrt{R^2 - (R - H)^2} = \sqrt{H(2R - H)}$

2<sup>ème</sup> méthode : dans le triangle  $CDF$  rectangle :  $r^2 = H(2R - H)$

$$3. V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \pi r^2 (R - H) = \frac{\pi}{3} H(2R - H)(R - H)$$

$$4. V_{\text{cal}} = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H)$$

$$V_{\text{cône}} = V_{\text{cal}} \Leftrightarrow H(2R - H)(R - H) = H^2(3R - H)$$

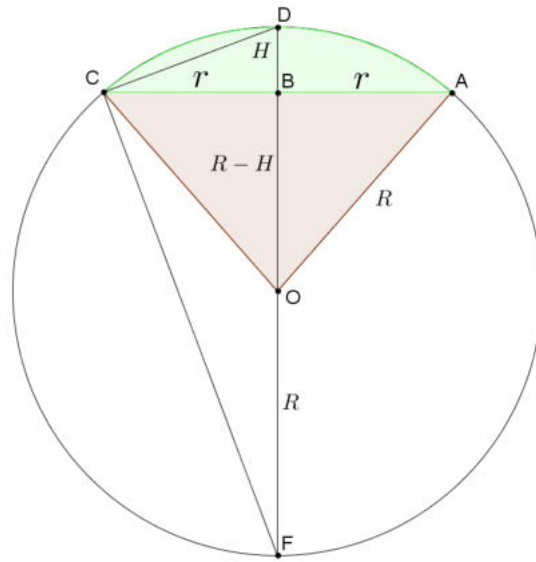
$$\Leftrightarrow H^2 \left( \frac{2R}{H} - 1 \right) \left( \frac{R}{H} - 1 \right) = H^2 \left( 3 \frac{R}{H} - 1 \right)$$

$$\text{Posons } x = \frac{R}{H} \Rightarrow (2x - 1)(x - 1) = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{R}{H} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

Rem :  $\frac{R}{H} \neq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  car  $H < R$

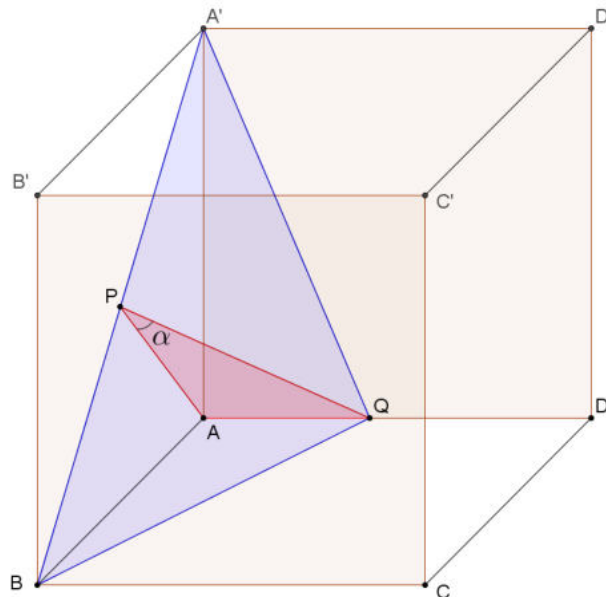


---

26 novembre 2012

## EXGSE113 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Un plan passe par une diagonale d'un face d'un cube. Déterminez la tangente du plus petit angle qu'il fait avec cette face dans l'hypothèse où il partage le cube en deux volumes dont le rapport vaut 9.



Soit un cube d'arête  $c$ . Soit  $A'BQ$  le plan passant par la diagonale  $A'B$ , qui coupe  $AD$  en  $Q$  et posons  $\overline{AD} = y$

$$\text{Volume du tétraèdre } A'BQ : V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot y = \frac{c^2 y}{6}$$

$$\text{Volume du solide } BQDCB'A'D'C' : V_2 = V_{\text{cube}} - V_1 = c^3 - \frac{c^2 y}{6} = \frac{c^2}{6} (6c - y)$$

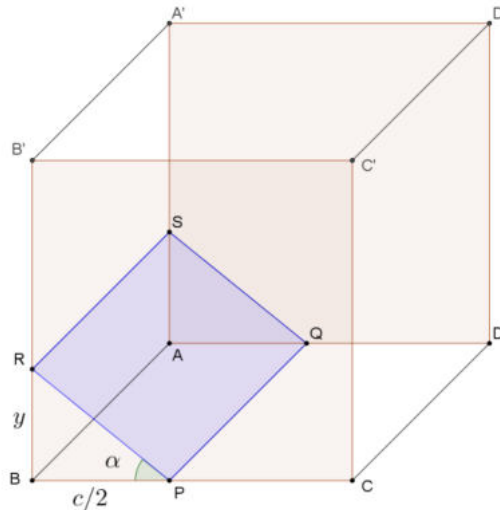
$$\text{Or } \frac{V_2}{V_1} = 9 \Rightarrow \frac{\frac{c^2}{6} (6c - y)}{\frac{c^2 y}{6}} = 9 \Rightarrow 6c - y = 9y \Rightarrow y = \frac{3}{5}c$$

Soit  $P$  le milieu de  $A'B$ . Le plan  $PAQ$  est perpendiculaire à  $A'B$  puisque  $PA \perp A'B$  (diagonales d'un carré) et que  $AQ \perp$  face  $ABB'A'$ . L'angle  $\overline{PAQ} = \alpha$  est l'angle cherché

$$\text{Comme le triangle } APQ \text{ est rectangle en } A : \tan \alpha = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{3}{5}c}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$$

## EXGSE114 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012

Un plan passe par une médiane d'une face d'un cube. Déterminez la tangente du plus petit angle qu'il fait avec cette face dans l'hypothèse où il partage le cube en deux volumes dont le rapport vaut 9.



Soit le plan  $PRSQ$  qui détermine le prisme  $BRPASQ$ . On a  $\overline{BP} = c/2$  et posons  $\overline{BR} = y$

$$\text{Volume du prisme : } V_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot y \cdot c = \frac{c^2 y}{4}$$

$$\text{Volume du cube : } V_C = c^3$$

$$\text{Volume du solide } RSQPCDD'A'B'C' : V_S = V_C - V_P = c^3 - \frac{c^2 y}{4} = \frac{c^2}{4} (4c - y)$$

$$\text{On demande : } \frac{V_S}{V_P} = 9 = \frac{\frac{c^2}{4} (4c - y)}{\frac{c^2 y}{4}} \Rightarrow 4c - y = 9y \Rightarrow y = \frac{2}{5} c$$

L'angle  $\overline{RPB} = \alpha$  est le plus petit angle car  $PQ$  est perpendiculaire à la face  $BCC'B'$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{y}{c/2} = \frac{2c/5}{c/2} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

2 octobre 2013



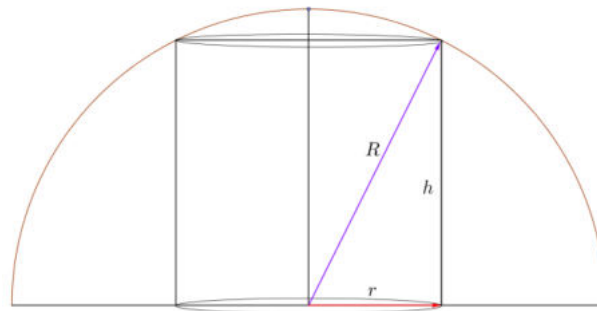
## EXGSE115 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2013, série 1

Un dôme à la forme d'une demi-boule sphérique de rayon  $R$  et de base plane horizontale. On considère un cylindre  $h$  et de rayon  $r$ , qui est inscrit dans le dôme. L'axe du cylindre vertical passe par le pôle du dôme. Soit  $V$  le volume et  $V_Y$  celui du cylindre.

On a  $C = V_Y/V$  et  $x = r/R$ .

1. Exprimer  $C$  en fonction de  $x$  uniquement.
2. Calculer la valeur maximale de  $C$ , et les valeurs correspondantes de  $x$  et du rapport  $h/R$ .
3. Illustrer la solution avec un dessin clair et précis.

### Solution proposée par Nicole Berckmans



$$V_Y = \pi r^2 h; \quad V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi R^3; \quad \text{Lien entre } r, R, h : R^2 = r^2 + h^2$$

$$1) C = \frac{V_Y}{V} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{2} \frac{x^2 \sqrt{R^2 - r^2}}{R} = \frac{3}{2} x^2 \sqrt{1 - x^2}$$

$$2) \frac{dC}{dx} = \dots = \frac{3}{2} x \cdot \frac{2 - 3x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

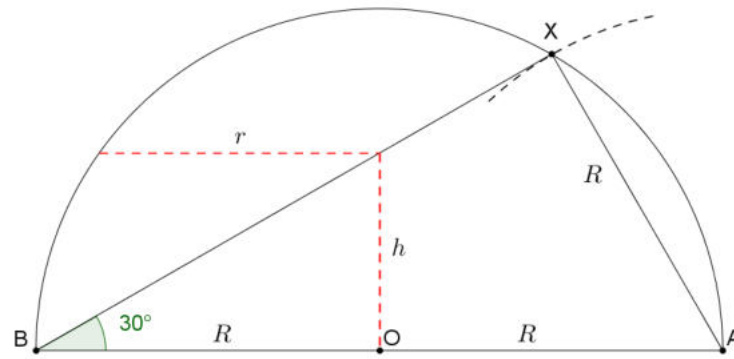
$x$	0	$\sqrt{2/3}$	1
$dc/dx$	0	+	0
$C$	$\nearrow$	$\sqrt{3/3}$	$\searrow$

Maximum de  $C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . On aurait pu aussi dire que  $C$  admet un maximum lorsque  $V_Y$  est maximum. En effet,  $V$  est constant :

$$V_Y = \pi r^2 h = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \frac{dV_Y}{dr} = \dots = \frac{\pi r (2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \Rightarrow x = \frac{r}{R} = \sqrt{2/3}$$

$$\Rightarrow 3r^2 = 2R^2. \text{ Or } h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{2}{3}R^2 = \frac{R^2}{3}.$$

$$\text{Dans ce cas : } \frac{h}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$



Par A on mène un cercle de rayon  $R$ . Celui-ci, coupe le cercle initial en  $X$ .

L'angle en  $X$  est droit car il sous-tend un demi-cercle.

$$\sin \alpha = \frac{AX}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}. \text{ On en déduit que } \alpha = 30^\circ. \text{ On détermine } h \text{ et } r$$

facilement.

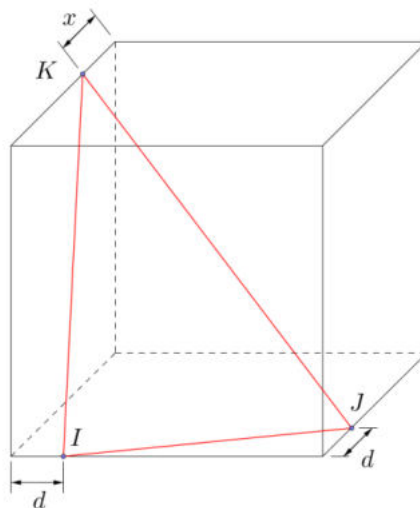
---

Le 16 septembre 2013

## EXGSE116 - EPL, UCL, Louvain, juillet 11, série 2

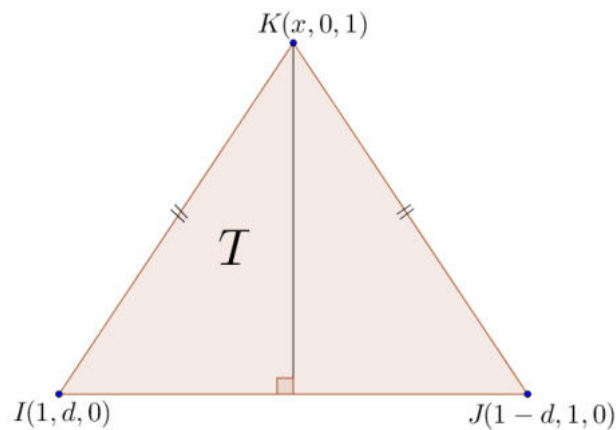
La figure représente un cube de côté unité, dans lequel on considère trois points non-alignés  $I, J$  et  $K$ . On désigne par  $d$  et  $x$  les distances représentées sur la figure.

1. Exprimer les conditions que doivent vérifier  $d$  et  $x$  afin que les longueurs  $IK$  et  $JK$  soient égales. On considère uniquement cette situation pour le reste de l'exercice.
2. Calculer  $x$  pour chacune des quatre valeurs suivantes de  $d$  :  $1/2$ ;  $2/3$ ;  $3/4$ ;  $1$ .  
Commenter
3. On note  $T$  l'aire du triangle  $(I, J, K)$ . Exprimer  $T$  en fonction de  $d$  uniquement.
4. Calculer  $T$  pour chacune des deux valeurs suivantes de  $d$  :  $1/2$ ;  $1$ . Commenter.



---

### Solution proposée par Nicole Berckmans



Résolution par la géométrie analytique.

Mettre un repère sur le cube.

$$1) \left. \begin{array}{l} \overline{IK}^2 = (x-1)^2 + d^2 + 1 \\ \overline{JK}^2 = (1-d-x)^2 + 1 + 1 \end{array} \right\} \overline{IK} = \overline{JK} \text{ ssi } 2d(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{2d} = \frac{2d-1}{2d}$$

$d$	$x$	Commentaires
1/2	0	$K$ sommet du cube
2) 2/3	1/4	
3/4	1/3	
1	1/2	$I$ et $J$ sommets du cube

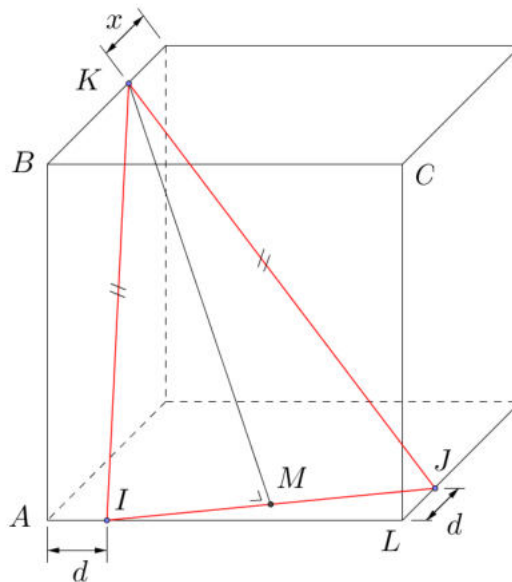
$$3) T = \frac{1}{2} \cdot \overline{IJ} \cdot \overline{KM} \text{ où } \overline{IJ} = \sqrt{d^2 + (d-1)^2}; M = \left(1 - \frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}, 0\right)$$

$$\overline{KM} = \sqrt{\left(x-1 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d+1}{2}\right)^2 + 1} = \dots = \frac{1}{2d} \sqrt{(d^2-1)^2 + (d^2+d)^2 + 4d^2}$$

$$4) \text{ Si } d = 1/2 \Rightarrow T = \dots = \frac{\sqrt{17}}{8}$$

$$\text{Si } d = 1 \Rightarrow T = \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Solution proposée par Pierre Klaessens**



Résolution par le produit scalaire

$$\overrightarrow{IK}^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK})^2 = \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BK}^2 + \underbrace{2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \underbrace{2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BK}}_0 + \underbrace{2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BK}}_0$$

$$= d^2 + 1 + (1-x)^2$$

$$\overrightarrow{JK}^2 = (\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK})^2$$

$$= \overrightarrow{JL}^2 + \overrightarrow{LA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BK}^2 + \underbrace{2\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{LA}}_0 + \underbrace{2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BK}}_0 + \underbrace{2\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \underbrace{2\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{BK}}_{-2(1-x)d} + \underbrace{2\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \underbrace{2\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{BK}}_0$$

$$= d^2 + 1 + 1 + (1-x)^2 - 2(1-x)d$$

$$\overrightarrow{IK}^2 = \overrightarrow{JK}^2 \Rightarrow \cancel{d^2} + 1 + \cancel{(1-x)^2} = \cancel{d^2} + 2 + \cancel{(1-x)^2} - 2(1-x)d$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2(1-x)} \text{ ou } x = \frac{2d-1}{2d}$$

$$\text{Aire : } T = \frac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KM}}{2}$$

$$\overrightarrow{IJ}^2 = \overrightarrow{IL}^2 + \overrightarrow{LJ}^2 = (1-d)^2 + d^2$$

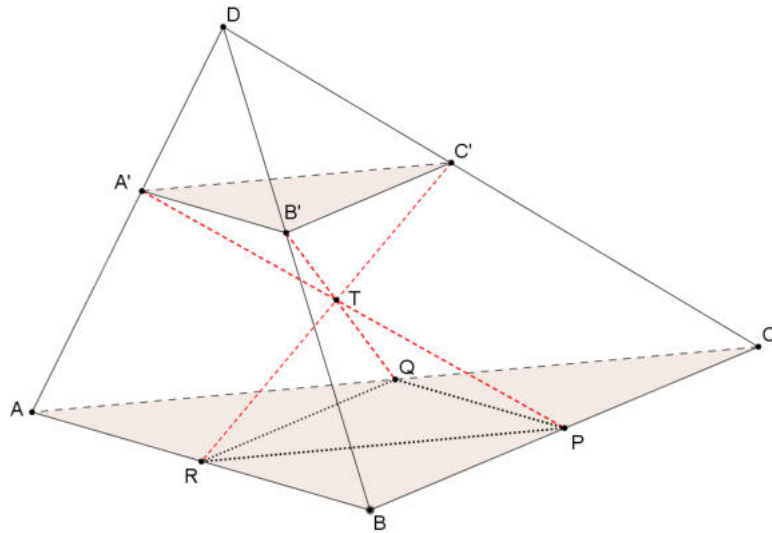
$$\overrightarrow{KM}^2 = \overrightarrow{IK}^2 - \frac{\overrightarrow{IJ}^2}{4} = d^2 + 1 + (1-x)^2 - \frac{(1-d)^2 + d^2}{4}$$

$$\text{En tenant compte que } 1-x = \frac{1}{2d}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\sqrt{(1-d)^2 + d^2} \sqrt{d^2 + 1 + \frac{1}{4d^2} - \frac{(1-d)^2 + d^2}{4}}}{2}$$

## EXGSE117 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2012

On considère un tétraèdre  $ABCD$  et un plan parallèle à sa base  $ABC$ , qui coupe les arêtes  $[AD]$ ,  $[BD]$  et  $[CD]$  en des points notés respectivement  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . Dans le triangle  $ABC$ , les milieux des côtés  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$  sont respectivement notés  $P$ ,  $Q$  et  $R$ .  
Démontrer que les droites  $A'P$ ,  $B'Q$  et  $C'R$  sont concourantes.



Les intersections de 2 plans parallèles par un troisième sont parallèles  $\Rightarrow A'C' // AC$ ,  
 $A'B' // AB$  et  $B'C' // BC$ .

D'autre part, la droite joignant le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au  
 troisième  $\Rightarrow QR // BC, PQ // AB$  et  $PR // AC$ . De plus,  $2\overline{QR} = \overline{BC}, 2\overline{PR} = \overline{AC}$  et  $2\overline{PQ} = \overline{AB}$ .  
 On a alors :  $A'C' // PR, A'B' // PQ$  et  $B'C' // QR$ .

Les points  $A'C'RP$  sont donc dans un même plan et les droites  $A'P$  et  $RC'$  se coupent en un  
 point  $T$ . Les triangles  $A'TC'$  et  $PTR$  sont semblables car leurs angles homologues sont égaux

(angles alternes-internes et angles opposés par le sommet).  $\Rightarrow \frac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{A'T}}{\overline{PT}}$  (1).

De la même manière, les droites  $A'P$  et  $B'Q$  sont coplanaires et se coupent en  $T'$ .

Les triangles  $A'B'T'$  et  $PQT'$  sont semblables  $\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{A'T'}}{\overline{PT'}}$  (2).

Pour démontrer que les droites sont concourantes, il faut montrer que  $T$  et  $T'$  sont confondus.

Ce sera le cas si  $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}}$  (Voir note)

En effet, les triangles  $A'DC'$  et  $ADC$  sont semblables  $\Rightarrow \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}}$ . De même les triangles

$A'DB'$  et  $ADB \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}}$ . Et donc  $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{A'C'}}{2\overline{PR}} = \frac{\overline{A'B'}}{2\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}}$

Ce qui démontre la proposition.

Note : Soit donc  $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}} = a$

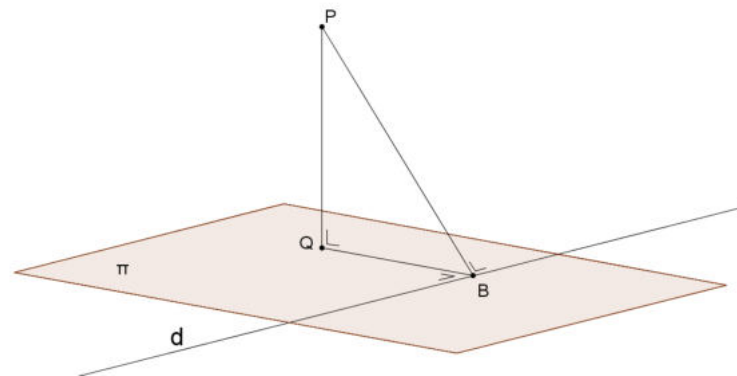
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{de (1): } \overline{A'T} = a\overline{PT} \Rightarrow \overline{A'P} - \overline{PT} = a\overline{PT} \Rightarrow \overline{A'P} = (1+a)\overline{PT} \Rightarrow \overline{PT} = \frac{\overline{A'P}}{1+a} \\ \text{de (2): } \overline{A'T'} = a\overline{PT'} \Rightarrow \overline{A'P} - \overline{PT'} = a\overline{PT'} \Rightarrow \overline{A'P} = (1+a)\overline{PT'} \Rightarrow \overline{PT'} = \frac{\overline{A'P}}{1+a} \end{array} \right.$$

Et donc  $\overline{PT} = \overline{PT'} \Rightarrow T \equiv T'$

## EXGSE118 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2012

On considère une droite  $d$  de l'espace et un point  $P$  n'appartenant pas à  $d$ . Pour tout plan  $\pi$  contenant  $d$ , on désigne par  $Q$  la projection orthogonale du point  $P$  sur le plan  $\pi$ .

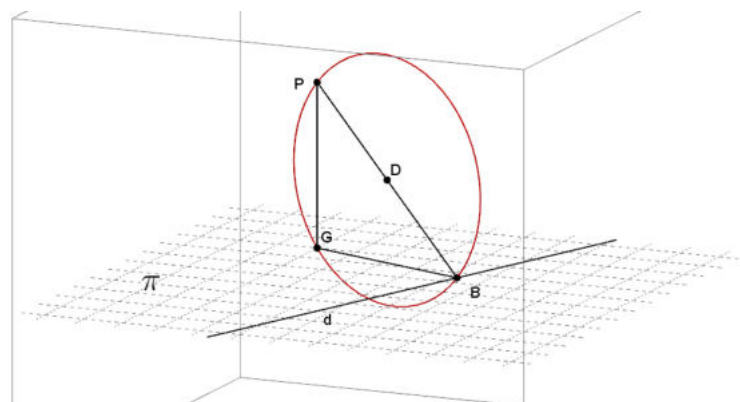
Déterminer le lieu géométrique décrit par le point  $Q$  lorsque  $\pi$  varie.



Abaissons la perpendiculaire  $PB$  sur  $d$  et joignons  $QB$ . La mesure de  $\overline{PB}$  est une constante.  $d$  est donc perpendiculaire à  $PB$  et comme  $PQ$  est perpendiculaire au plan  $\pi$ ,  $d$  est orthogonale à  $PQ$ .

Par conséquent,  $d$  est perpendiculaire au plan  $PQB$ . Dans ce plan, le triangle  $PQB$  est rectangle en  $Q$ .

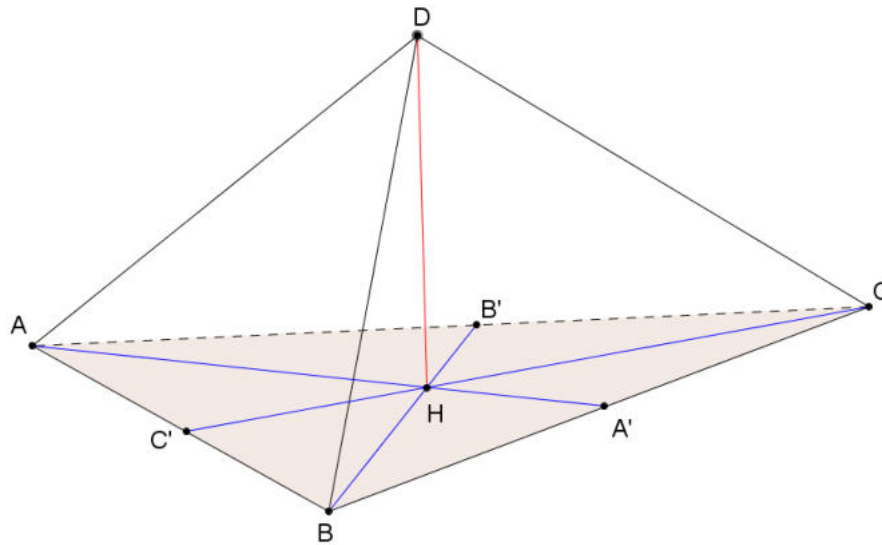
Par conséquent, le lieu de  $Q$  est le cercle situé dans le plan perpendiculaire à  $d$ , passant par  $P$  et de diamètre  $PB$ .





## EXGSE119 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2012

Soit un tétraèdre  $ABCD$  dont les arêtes  $AD, BD$  et  $CD$  sont perpendiculaires deux à deux. Démontrer que la projection orthogonale du sommet  $D$  sur le plan  $ABC$  coïncide avec l'orthocentre du triangle  $ABC$ .



Soit  $H$  la projection orthogonale de  $d$  sur le plan  $ABC$ . Traçons  $AH$  qui coupe  $BC$  en  $A'$ .  $AD$  est perpendiculaire à  $DB$  et  $DC$  par hypothèse.  $AD$  est donc perpendiculaire au plan  $ADC$  et donc  $AD$  est orthogonale à  $BC$ . Or  $DH$  est perpendiculaire à  $ABC$ , donc  $DH$  est orthogonale avec  $BC$ . Par conséquent  $BC$  est perpendiculaire au plan  $ADH$ , ce qui implique que  $AA'$  est perpendiculaire à  $BC$ . Autrement dit  $AA'$  est une hauteur du triangle  $ABC$ . On refait le même raisonnement pour montrer que les droites  $BH$  et  $CH$  sont aussi des hauteurs.  $H$  est donc l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

Le 18 octobre 2013.