Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 5

EXGSE050 – EXGSE059

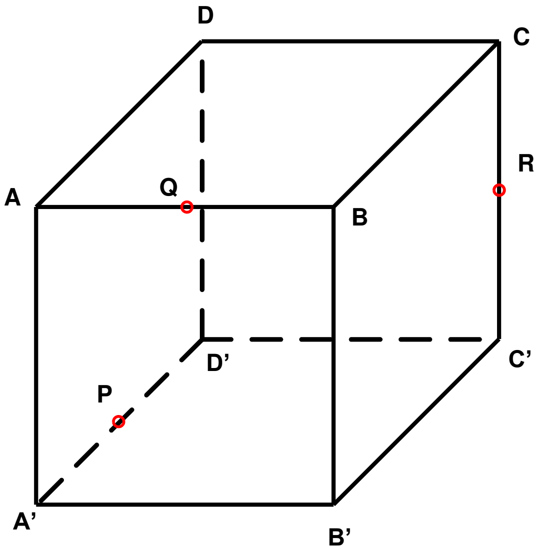
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Avril 04

EXGSE050 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2003.

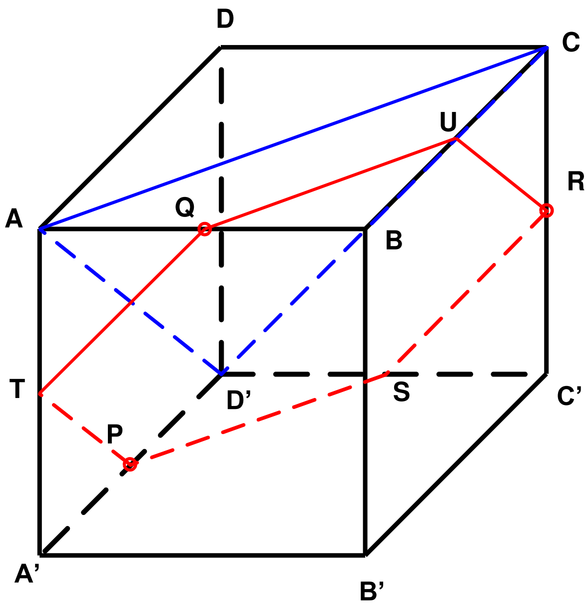
On considère le cube *ABCDA'B'C'D'*. On note *P* le milieu de [*D', A'*], *Q* le milieu de [*A, B*] et *R* le milieu de [*C, C'*].



1. Montrer que

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\left(2\vec{D'A} + \vec{AC}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{QR} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{AD'}\right)$$

2. Montrer que le plan *PQR* est parallèle au plan *ACD'*
3. Montrer que *PQR* coupe le cube selon un hexagone régulier.



1) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD'} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'R}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'C'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}\right)$

2) En vertu du point 1) $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{D'A}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont parallèles au plan ACD' $\rightarrow$ les plans PQR et ACD' sont parallèles

3) $QU \,//\, AC$ puisque les plans PQR et ACD' sont parallèles $\rightarrow$ U est le milieu de BC

et $|QU| = \frac{|AC|}{2}$

De même pour SR et TP et comme les diagonales des faces du cube sont égales

$\rightarrow$ $|QU| = |UR| = |RS| = |SP| = |TP| = |PQ|$

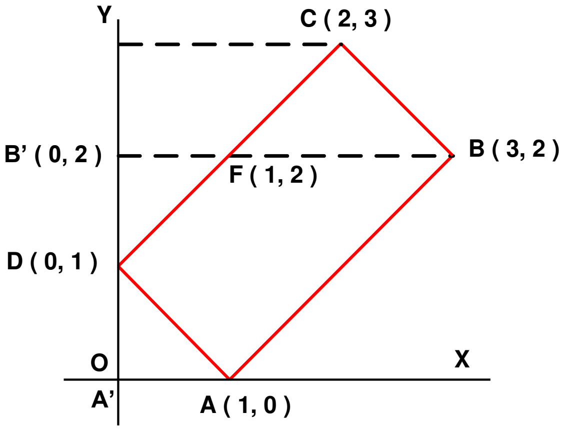
De plus, $|QS| = |UP| = |TR|$ car médianes du cube

$\rightarrow$ $QURSTQ$ est un hexagone régulier.

Modifié le 6 septembre 2004

EXGSE051– FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne quatre points : A (1, 0), B (3, 2), C (2, 3) et D (0, 1). Calculer le volume balayé par le rectangle $ABCD$ lorsqu'on lui fait subir une rotation de 180° autour de l'axe OY



Rappel :

Volume du tronc de cône : $V_{TC} = \frac{\pi}{12} h\left(D^2 + Dd + d^2\right)$

Volume du cône : $V_C = \frac{\pi}{3} r^2 h$

Le volume recherché (V) est la moitié de :

volume du tronc de cône engendré par $CC'BB'$ $\left(V_{TC}^{CC'BB'}\right)$

$-$ volume du tronc de cône engendré par $CC'FB'$ $\left(V_{TC}^{CC'FB'}\right)$

$+$ volume du tronc de cône engendré par $B'BAA'$ $\left(V_{TC}^{B'BAA'}\right)$

$-$ volume de cône $B'FD$ $\left(V_C^{B'FD}\right)$

$-$ volume du cône DAA' $\left(V_C^{DAA'}\right)$

$$V_{TC}^{CC'BB'} = \frac{\pi}{12} \times 1 \times \left(6^2 + 6 \times 4 + 4^2\right) = \frac{76\pi}{12}$$

$$V_{TC}^{CC'FB'} = \frac{\pi}{12} \times 1 \times \left(4^2 + 4 \times 2 + 2^2\right) = \frac{28\pi}{12}$$

$$V_{TC}^{B'BAA'} = \frac{\pi}{12} \times 2 \times \left(6^2 + 6 \times 2 + 2^2\right) = \frac{104\pi}{12}$$

$$V_C^{B'FD} = V_C^{DAA'} = \frac{\pi}{3} 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3}$$

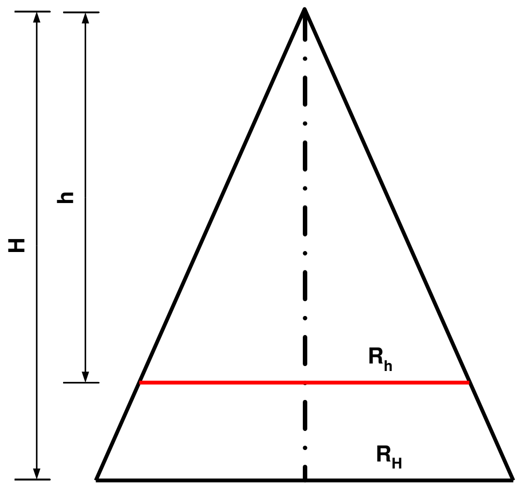
$$\rightarrow V = V_{TC}^{CC'BB'} - V_{TC}^{CC'FB'} + V_{TC}^{B'BAA'} - 2V_C^{B'FD}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12}\left(76 - 28 + 104 - 8\right) = 6\pi$$

EXGSE052– EPL, UCL , Louvain, juillet 2002, série 1.

Soit un cône circulaire droit qui est coupé par un plan parallèle à sa base. On vous demande

- De déterminer la position du plan par rapport au sommet du cône pour que les volumes des deux solides formés soient égaux.
- D’expliquer votre démarche au moyen d’un dessin clair et précis.



$$V_H = \frac{1}{3}\pi {R_H}^2 H$$

$$V_h = \frac{1}{3}\pi {R_h}^2 h$$

Or $\frac{R_h}{h} = \frac{R_H}{H}$ et $V_H = 2V_h$

$$\rightarrow \frac{1}{6}\pi {R_H}^2 H = \frac{1}{3}\pi \frac{{R_H}^2}{H^2} h^3$$

$$\rightarrow \quad h^3 = \frac{1}{2} H^3 \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} H \simeq 0.7937.H}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXGSE053– EPL, UCL , Louvain, juillet 2002, série 2.

Soit un cube d'arête *a* et dont les diagonales sont *AA', BB', CC'* et *DD'*. On fait tourner le cube autour de *AA'*.

- De déterminer en fonction de *a* l'aire de la surface engendrée par le segment de droite *AB*.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

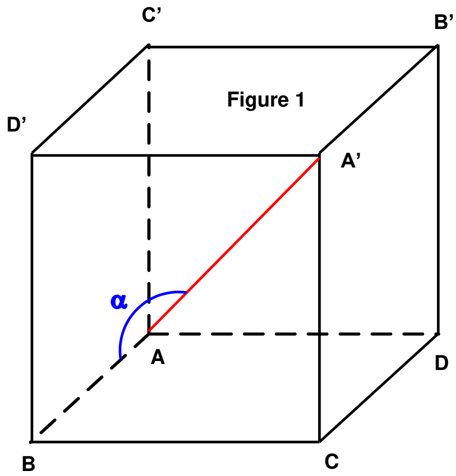
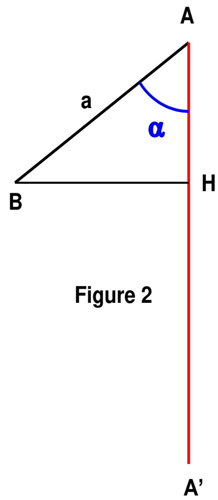


Figure 1

$\overrightarrow{AB}:(a,0,0)$ $\overrightarrow{AA'}:(a,a,a)$

Soit α est l'angle entre ces deux vecteurs

$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 54.7356°$$



La Figure 2 montre le plan ABA'

$$\rightarrow \; AH = \frac{\sqrt{3}}{3}a \quad \rightarrow \; BH = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

AB engendre un cône dont l'aire latérale est :

$$A_L = 2\pi \, . \, AH \, . \, BH = 2\pi.\frac{\sqrt{3}}{3}a.\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

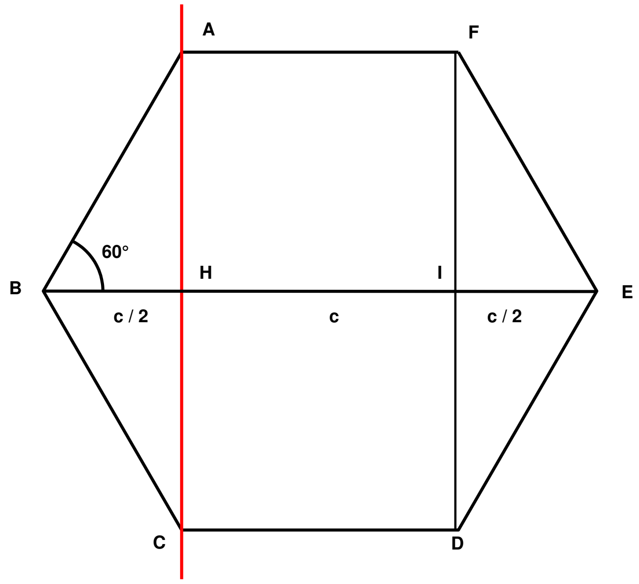
$$\rightarrow \boxed{A_L = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2}$$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004.

EXGSE054– EPL, UCL , Louvain, septembre 2002.

Soit un hexagone régulier tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets et perpendiculaire à un côté adjacent. On vous demande :

- De déterminer les rapports entre les volumes et les surfaces totales des deux solides engendrés par cette rotation.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Puisque $ABE = 60° \rightarrow \quad BH = \dfrac{c}{2}$ et $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

Rapport des volumes

Il suffit d'étudier le rapport des volumes engendré par $AFEH$ et ABH

ABH engendre un cône : $V_{ABH} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}c = \dfrac{\sqrt{3}}{24}c^3$

$AFEH$ engendre un tronc de cône : $V_{AFEH} = \dfrac{\pi}{3}\left[\left(\dfrac{3c}{2}\right)^2 + \dfrac{3c}{2}.c + c^2\right] . \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

$$= \frac{19\sqrt{3}\pi c^3}{24}$$

$$\rightarrow \frac{V_{ABH}}{V_{AFEH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{24}c^3}{\frac{19\sqrt{3}\pi c^3}{24}} = 19$$

Rapport des surfaces totales

Ici aussi, il suffit de faire le rapport des surfaces engendrées par AB et AFE.

$AB \rightarrow$ Surface latérale d'un cône : $S_1 = \pi \dfrac{c}{2} c = \dfrac{\pi c^2}{2}$ $\quad (\text{Rappel : } S = \pi r l)$

AFE

$AF \rightarrow$ Surface d'un cercle : $S_2 = \pi c^2$

$FE \rightarrow$ Surface latérale d'un tronc de cône : $S_3 = \pi \left(c + \dfrac{3c}{2} \right) c = \dfrac{5\pi c^2}{2}$

$(\text{Rappel : } S = \pi (r_1 + r_2) l)$

$AFE \rightarrow S_4 = S_2 + S_3 = \pi c^2 + \dfrac{5\pi c^2}{2} = \dfrac{7\pi c^2}{2}$

Donc $\dfrac{AFE}{AB} \rightarrow \dfrac{\dfrac{7\pi c^2}{2}}{\dfrac{\pi c^2}{2}} = 7$

Résolu le 24 juin 2004

EXGSE055 – EPL, UCL , Louvain, juillet 2003, série 1.

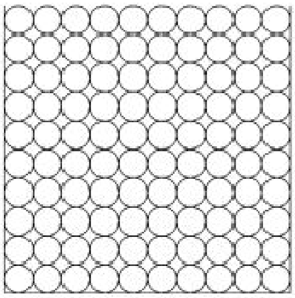
On considère une caisse cubique de côté c. On désire mettre dans cette caisse des troncs cylindriques de hauteur c et de rayon c / 20 et ensuite refermer la caisse : en d'autres mots, rien ne peut déborder de la caisse.

On vous demande:
1. De donner le nombre maximum de cylindres qui peuvent être placés dans cette caisse,
2. De calculer le rapport entre le volume vide et le volume de la caisse.
3. D'expliquer votre démarche par un dessin précis.

Solution proposée par Jan Frans Broecks

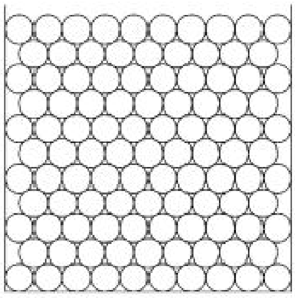
Appelons le rayon des troncs cylindriques

$$a = \frac{c}{20}$$



On peut exactement couvrir le fond de la caisse par 10 cylindres côte à côte. La hauteur de cette couche est égale à $2a$.

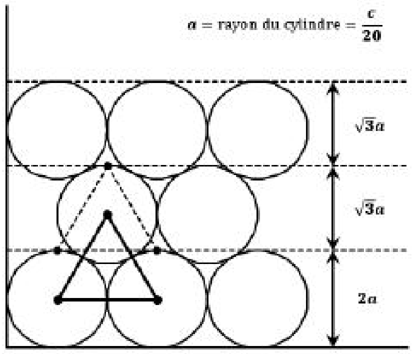
Si on couvre cette première couche par 9 autres couches identiques, on obtient l'arrangement en « réseau carré » montré ci à-côté. La caisse est ainsi entièrement replie (hauteur totale = 2a = c) et elle contient **100** troncs.



Si, par contre, on couvre la première couche de 10 troncs par une couche de 9 troncs, reposant dans les « creux » entre les troncs de la première couche, suivie d'une nouvelle paire de couches de 10 troncs et de 9 troncs, et ainsi de suite, on obtient l'arrangement en « réseau hexagonal » montré à droite.

Comme le montre la figure en bas, la hauteur totale de n couches ainsi empilées est de

$$\text{hauteur totale} = \left(2 + (n-1)\sqrt{3}\right)a \qquad (1)$$



En effet, la hauteur de la première couche est $2a$.

Dans un plan vertical, les centres de deux troncs voisins d'une couche et le centre du tronc de la couche suivante, reposant dans le creux entre ces deux troncs, sont les sommets d'un *triangle équilatéral* de côté $2a$. La hauteur de ce triangle est égale à :

$$h = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

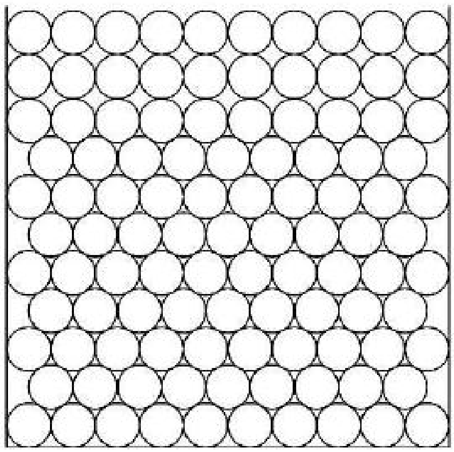
Comme le montre la figure (le triangle équilatéral en pointillé), cette distance est également la hauteur supplémentaire de chacune des $n-1$ couches suivantes, d'où la formule (1).

On peut ainsi remplir la caisse avec 11 couches, alternativement 6 couches de 10 troncs et 5 de 9 troncs, donc un total de **105** troncs.

Selon (1), la hauteur totale de ces 11 couches est égale à $2a + 10\sqrt{3}a = \left(2 + 10\sqrt{3}\right)a \cong 19{,}32\ a < c$.

Mais il est possible de faire mieux ! En effet, il reste un espace vide en haut de la caisse d'environ $0{,}68\ a$, ce qui est supérieur à la différence entre la hauteur $6a$ de trois couches en « réseau carré » et la hauteur $\left(2 + 2\sqrt{3}\right)a \cong 5{,}46\ a$ de trois couches en « réseau hexagonal ».

On peut donc, dans l'arrangement en « réseau hexagonal », *remplacer une des couches de 9 troncs par une couche de 10 troncs*, sans dépasser la hauteur du couvercle. Dans la figure ci-contre, c'est la dernière des couches de 9 troncs que nous avons remplacée par une de 10 troncs.



La hauteur totale de ces 11 couches est maintenant égale à $3(2a) + 8\sqrt{3}a = \left(6 + 8\sqrt{3}\right)a \cong 19{,}86\ a < c$.

La caisse peut donc contenir **106** troncs.

Le rapport entre le volume vide et le volume de la caisse est :

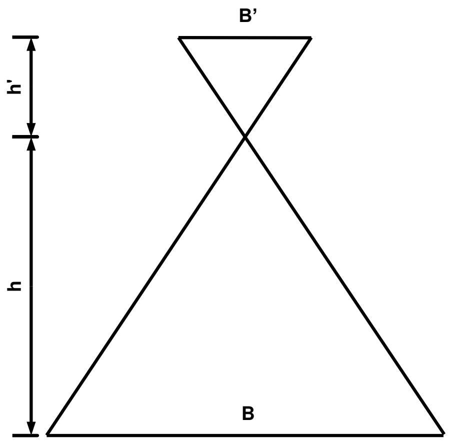
$$\begin{aligned}
\frac{\text{volume vide}}{\text{volume caisse}} &= 1 - \frac{\text{volume de 106 cylindres}}{\text{volume du cube}} \\
&= 1 - \frac{106.\pi.a^2.20a}{(20a)^3} \\
&= 1 - \frac{2120.\pi}{8000} \\
&\cong 1 - \mathbf{0{,}8325} \\
&= \mathbf{0{,}1675} \quad (\mathbf{16{,}75\%})
\end{aligned}$$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004. Modifié le 23 décembre 2011.

EXGSE056– EPL, UCL , Louvain, juillet 2003, série 2.

Soit une pyramide de base B et de hauteur h. On prolonge les arêtes de cette pyramide au-delà du sommet et on coupe ces prolongements par un plan parallèle à la base B. On forme ainsi une seconde pyramide de hauteur h' et de base B'. On définit : $\Delta h = | h' - h |$.

On vous demande d'exprimer la somme des volumes de ces deux pyramides en fonction de B, de B' et de Δh, en vous aidant d'un dessin du problème.



On a : $\left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{B'}{B} \quad \rightarrow \quad h = h'.\sqrt{\frac{B}{B'}}$

$\Delta h = |h' - h| = \left|h' - h'.\sqrt{\frac{B}{B'}}\right| = h'\left|1 - \sqrt{\frac{B}{B'}}\right|$

$\rightarrow \; h' = \frac{\Delta h}{\left|1 - \sqrt{\frac{B}{B'}}\right|} \qquad (1)$

D'autre part :

$V + V' = \frac{1}{3}(Bh + B'h') = \frac{1}{3}(Bh - Bh' + Bh' + B'h') = \frac{1}{3}\left(B.\Delta h + h'(B + B')\right)$

En vertu de (1):

$$V + V' = \frac{1}{3}\left(B.\Delta h + \frac{\Delta h}{\left|1 - \sqrt{\frac{B}{B'}}\right|}(B + B')\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{V + V' = \frac{\Delta h}{3}\left(B + \frac{B + B'}{\left|1 - \sqrt{\frac{B}{B'}}\right|}\right)}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXGSE057– EPL, UCL , Louvain, septembre 2003.

Une "maison" est construite à partir d'un cube de côté a auquel on superpose un toit pyramidal de hauteur H. Pour des raisons de dimensionnement du chauffage, on cherche à construire trois niveaux (rez de chaussée au niveau zéro et deux étages) **ayant le même volume**. Le premier étage est au niveau h_1 et le deuxième étage au niveau $h_1 + h_2$.

On vous demande :

D'exprimer h_1 et h_2 en fonction de a et H en discutant la solution pour différentes valeurs de a et H.
D'évaluer h_1 dans les cas (i) $a = 1$, $H = 1/2$ et (ii) $a = 1$, $H = 9$.

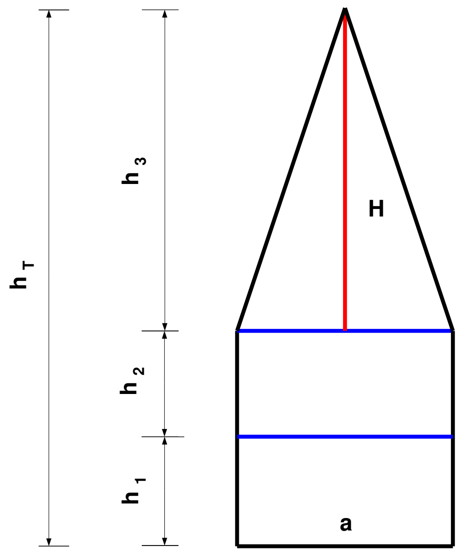


Figure 1
H = 3 a / 2

Soit :

V_1 : le volume correspondant à la hauteur h_1

V_2 : le volume correspondant à la hauteur h_2

V_2 : le volume correspondant à la hauteur h_3, définie comme la hauteur du troisème niveau.

V_T : le volume total. $V_T = a^2\left(a + \dfrac{H}{3}\right)$

Envisageons deux cas particuliers :

a) Le niveau $h_1 + h_2$ arrive juste à hauteur du toit. (Figure 1)

Dans ce cas :

$$V_1 = V_2 = \frac{a^3}{2}$$

$$V_3 = \frac{1}{3}a^2 H = V_1 = \frac{a^3}{2} \quad \rightarrow \quad H = \frac{3}{2}a$$

b) Le niveau h_1 arrive juste à hauteur du toit. (Figure 2)

$$\rightarrow\ V_1 = a^3 \quad \text{et} \quad V_1 + V_2 = \frac{1}{3}a^2 H = 2a^3 \quad \rightarrow \quad H = 6a$$

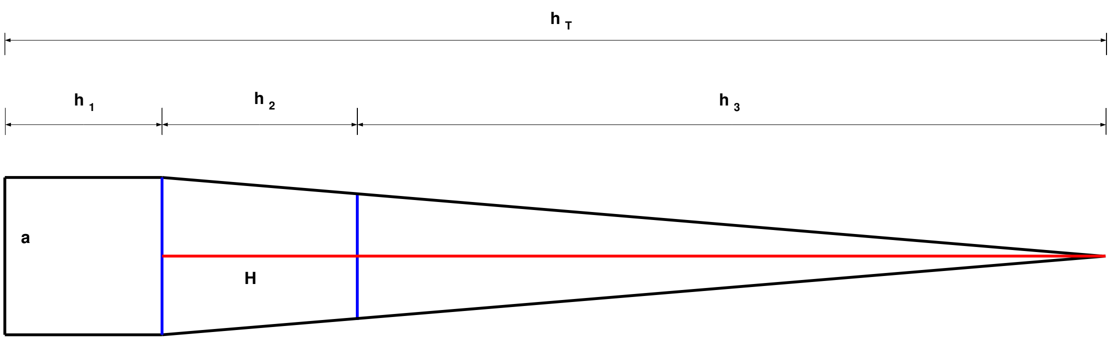


Figure 2
H = 6 a

Il nous faut donc traiter les cas

1) $\underline{0 \le H \le \frac{3}{2}a}$ $\rightarrow$ $h_1 + h_2 \le a$

$$V_1 = V_2 = h_1 a^2 = \frac{1}{3}V_T = \frac{1}{3}a^2\left(a + \frac{H}{3}\right) \rightarrow \boxed{h_1 = h_2 = \frac{1}{9}(3a + H)}$$

2) $\underline{\frac{3}{2}a \le H \le 6a}$ $\rightarrow$ $h_1 \le a$ et $h_1 + h_2 \ge a$

$$V_1 = h_1 a^2 = \frac{1}{3}V_T = \frac{1}{3}a^2\left(a + \frac{H}{3}\right) \rightarrow \boxed{h_1 = \frac{1}{9}(3a + H)}$$

$V_3 = \frac{1}{3}c_3^{\,2}h_3$ ($c_3 =$ côté de la basse carrée de la pyramide au niveau 3)

Or $c_3 = \frac{h_3 a}{H}$ $\rightarrow$ $V_3 = \frac{1}{3}\frac{h_3^{\,3}a^2}{H^2} = \frac{1}{3}a^2\left(a + \frac{H}{3}\right)$ $\rightarrow$ $h_3 = \sqrt[3]{H^2\left(\frac{H}{3} + a\right)}$

$\rightarrow$ $h_2 = a + H - h_1 - h_3$

3) $\underline{6a \le H}$ $\rightarrow$ $h_1 \ge a$

$\rightarrow V_3 = \frac{1}{3}\frac{h_3^{\,3}a^2}{H^2} = \frac{1}{3}a^2\left(a + \frac{H}{3}\right)$ $\rightarrow$ $h_3 = \sqrt[3]{H^2\left(\frac{H}{3} + a\right)}$

$V_2 + V_3 = \frac{1}{3}c_2^{\,2}h_3$ ($c_3 =$ côté de la basse carrée de la pyramide au niveau 2)

Or $c_2 = \frac{(h_2 + h_3)a}{H}$ $\rightarrow$ $V_2 + V_3 = \frac{1}{3}\frac{(h_2 + h_3)^3 a^2}{H^2}$

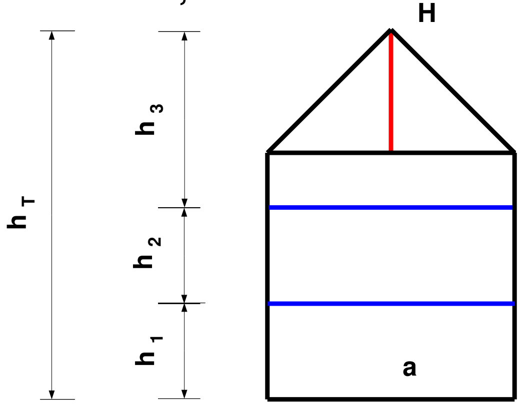
$$V_1 = \frac{1}{3}V_T = \frac{1}{3}a^2\left(a + \frac{H}{3}\right) = V_T - (V_2 + V_3) = a^2\left(a + \frac{H}{3}\right) - \frac{1}{3}\frac{(h_2 + h_3)^3 a^2}{H^2}$$

$$\rightarrow h_2 = \sqrt[3]{2H^2\left(\frac{H}{3} + a\right)} - h_1 = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\sqrt[3]{H^2\left(\frac{H}{3} + a\right)}$$

$$\rightarrow \boxed{h_1 = a + H - (h_2 + h_3) = a + H - \sqrt[3]{2H^2\left(\frac{H}{3} + a\right)}}$$

Figure 3

a = 1 , H = 1 / 2



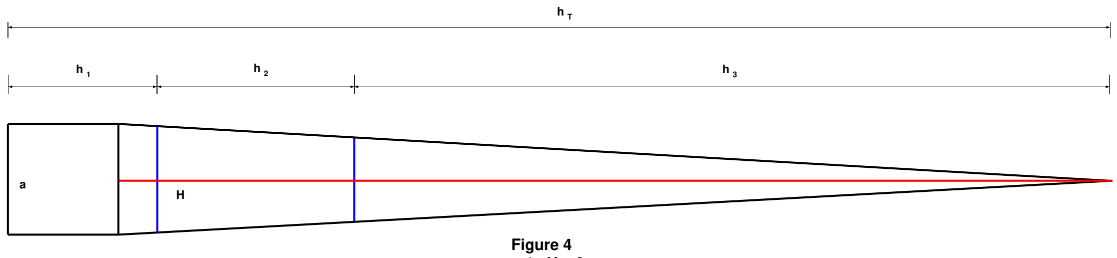


Figure 4

a = 1 , H = 9

Applications

i) $a=1, \quad H=\frac{1}{2}$

Nous sommes dans le premier cas :

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{9}\left(3+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{18} \simeq 0.3889$$

$$h_3 = 0.7222$$

ii) $a=1, \quad H=9$

Nous sommes dans le troisième cas :

$$h_3 = \sqrt[3]{9^2\left(\frac{9}{3}+1\right)} = 6.8683$$

$$h_2 = \left(\sqrt[3]{2}-1\right)\sqrt[3]{9^2\left(\frac{9}{3}+1\right)} = 1.78521$$

$$h_1 = 1+9-6.8683-1.78521 = 1.3465$$

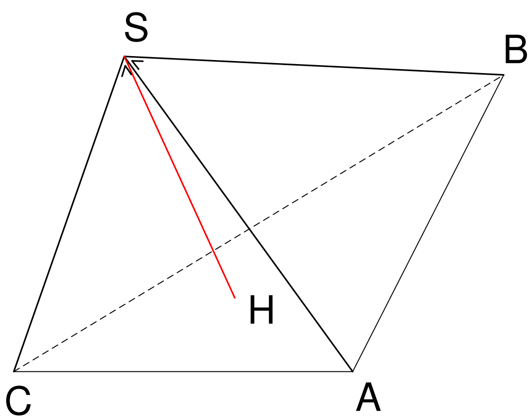
Résolu le 24 juin 2004

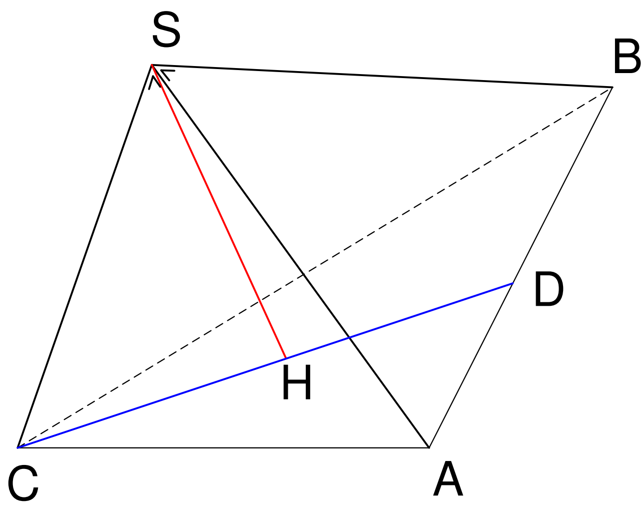
EXGSE058– FACSA, ULiège, Liège, juillet 2004 .

On considère un tétraèdre $SABC$ tel que les droites SA, SB et SC soient perpendiculaires deux à deux. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan ABC.

a) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

b) Si on note a_{XYZ} l'aire dutriangle XYZ, montrer que $\frac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \frac{a_{ASB}}{a_{AHB}}$





a) Montrons que SC est perpendiculaire à BA

$SC \perp SB$ et $SA \Rightarrow SC \perp$ au plan $SBA \Rightarrow SC \perp AB$

$SH \perp$ au plan $ABC \Rightarrow SH \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp SC$ et $SH \Rightarrow AB \perp$ au plan $SCH \Rightarrow AB \perp CH$

$\Rightarrow AB$ et CH sont coplanaires, on a $AB \perp CH$

On recommence pour BH. Conclusion : H est l'orthocentre du triangle ABC

b) Soit D le pied de la hauteur de CH dans ABC, c'est aussi le pied de la hauteur issue de S dans ABS.

On peut écrire : $\dfrac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \dfrac{a_{ASB}}{a_{AHB}} \rightarrow \dfrac{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{SD}||\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{SD}||\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{HD}||\overrightarrow{AB}|}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{HD}| = |\overrightarrow{SD}|^2$ qu'il suffit de démontrer

Or le triangle SCD est rectangle $\Rightarrow$ les triangles CSD et SHD sont semblables puisqu'ils sont rectangles et ont l'angle $\widehat{D}$ en commun.

$\Rightarrow \dfrac{|\overrightarrow{SD}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{|\overrightarrow{HD}|}{|\overrightarrow{SD}|} \Rightarrow |\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{HD}| = |\overrightarrow{SD}|^2$

Publié le novembre 2004

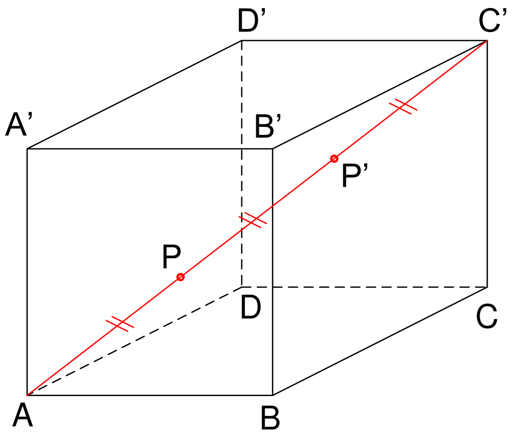
EXGSE059– FACSA, ULiège, Liège, juillet 2004 .

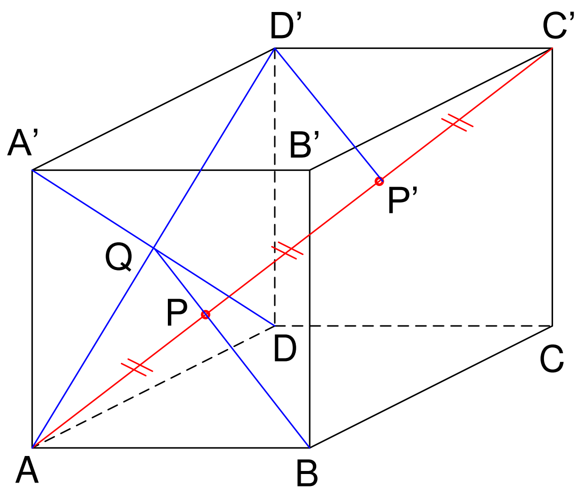
On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$. Sur la diagonale AC', on définit les points P et P' par $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'C}$

a) Montrer que les droites PB et $D'P'$ sont parallèles.

b) Montrer que PB et $A'D$ ont un point Q en commun.

c) Montrer que PQ est la perpendiculaire commune aux droites AC' et $A'D$.





Première méthode

a) $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'P'} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'P'}$

$\Rightarrow$ BP et $D'P'$ sont parallèles.

b) BP et $D'P'$ sont dans le plan $ABD'C'$ qui coupe perpendiculairement la face $ADD'A'$ selon AD'. Dans le triangle $AP'D'$, P est le milieu de AP'.

$\Rightarrow Q$ est le milieu de AD'. Mais Q appartient aussi à la diagonale $A'D$

$\Rightarrow \ Q = PB \cap A'D$

c) $A'D \perp$ plan $ABC'D'$

donc 1) $BQ \perp A'D$

2) plan $A'DB \perp$ plan $ABC'D' \Rightarrow AC' \perp$ plan $A'DB \Rightarrow AC' \perp BQ$

Donc PQ est la perpendiculaire commune aux droites AC' et $A'D$

Deuxième méthode

a) Soit un repère place en A, d'axes AB, AD et AA'. On prend l'arète du cube comme longueur unitaire. $\Rightarrow B:(1,0,0);\ D:(0,1,0);\ A':(0,0,1)$

$\Rightarrow D':(0,1,1)$ et $C':(1,1,1)$

Comme $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}\ \Rightarrow\ P:\frac{1}{3}(1,1,1)$ et $P':\frac{2}{3}(1,1,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PB}=(1,0,0)-\frac{1}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{D'P'}=\frac{2}{3}(1,1,1)-(0,1,1)=\frac{1}{3}(2,-1,-1) \end{cases} \rightarrow PB \parallel D'P'$$

b) Calculons l'équation de PB de vecteur directeur $(2,-1,-1)$

$$\Rightarrow PB \equiv \frac{x-1}{2}=-y=-z$$

La droite $A'D$ contient les points $A':(0,0,1)$ et $D:(0,1,0) \Rightarrow A'D \equiv \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$

$$PB \cap A'D \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ y=z \\ x=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \text{une seule solution } Q:\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

c) $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(0,1,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$

$\overrightarrow{AC'}=(1,1,1)$ et $\overrightarrow{A'D}=(0,1,0)-(0,0,1)=(0,1,-1)$

On vérifie : $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AC'}=0$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{A'D}=0$

$\Rightarrow PQ$ est la perpendiculaire commune à AC' et $A'D$

Publié le 12 novembre 2004.