

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique dans l'espace**

**GSE 7**

**EXGSE070 – EXGSE079**

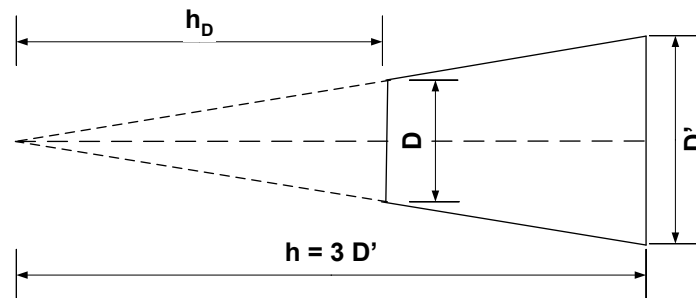
<http://www.matheux.be.tf>

**Jacques Collot  
Benoît Baudalet – Steve Tumson**

Septembre 08

## EXGSE070 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Un diabolo est conçu à partir d'un cylindre plein de diamètre  $D$  et de hauteur  $L = 2D$ , et de deux cônes pleins de diamètre de base  $D'$  et de hauteur  $h = 3D'$ . Le cylindre et les deux cônes sont constitués de la même matière. Pour réaliser ce diabolo, on coupe la tête des deux cônes afin de pouvoir les ajuster parfaitement aux deux extrémités du cylindre. Les trois pièces sont collées bout-à-bout. Afin d'obtenir un bon diabolo, il convient que la masse du cylindre central soit égale à  $1/8$  de la masse totale du diabolo. Sachant que l'on dispose de cônes dont le diamètre est  $D' = 4$ , on demande d'évaluer le diamètre du cylindre qu'il faut choisir pour réaliser le diabolo.



Evaluons le volume du tronc de cône tel que définit ci-dessus.

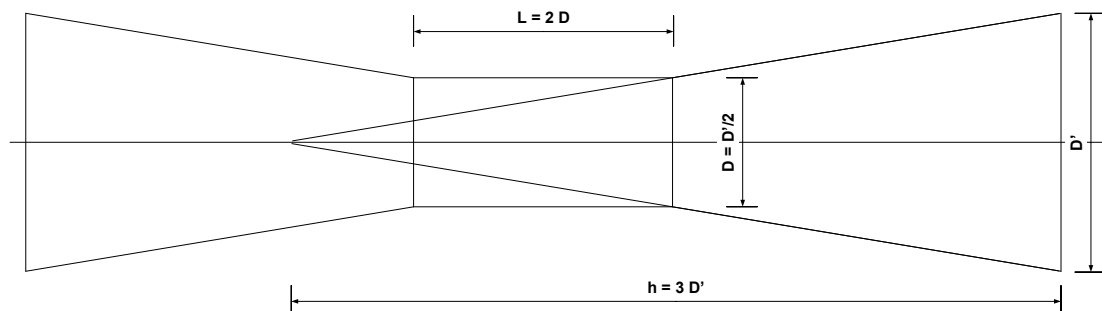
$$\text{On a immédiatement : } \frac{h_D}{h} = \frac{D}{D'} \rightarrow \frac{h_D}{3D'} = \frac{D}{D'} \rightarrow h_D = 3D$$

$$\rightarrow V_{TC} = \frac{\pi}{12} (D'^2 h - D^2 h_D) = \frac{\pi}{12} (3D'^3 - 3D^3) = \frac{\pi}{4} (D'^3 - D^3)$$

$$\text{Le volume du cylindre est : } V_{cy} = \frac{\pi}{4} D^2 L = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot 2D = \frac{\pi}{2} D^3$$

Le volume du cylindre doit être le  $1/8$  du volume total du diabolo

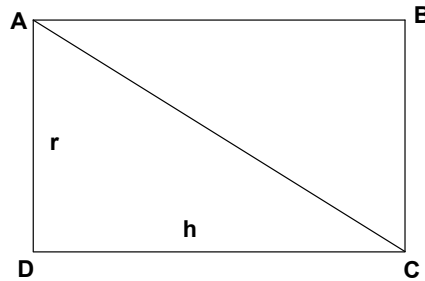
$$\rightarrow 8 \times \frac{\pi}{2} D^3 = 2 \times \frac{\pi}{4} (D'^3 - D^3) + \frac{\pi}{2} D^3 \rightarrow \boxed{D = \frac{D'}{2}}$$



Le 9 mars 05

## EXGSE071 – Louvain, septembre 2005.

Un triangle quelconque tourne autour de la droite qui joint les milieux de deux de ses côtés. Les deux parties du triangle, situées de part et d'autre de la droite, engendrent chacune un volume. On vous demande de déterminer le rapport de ces deux volumes en expliquant votre démarche au moyen d'un dessin précis.

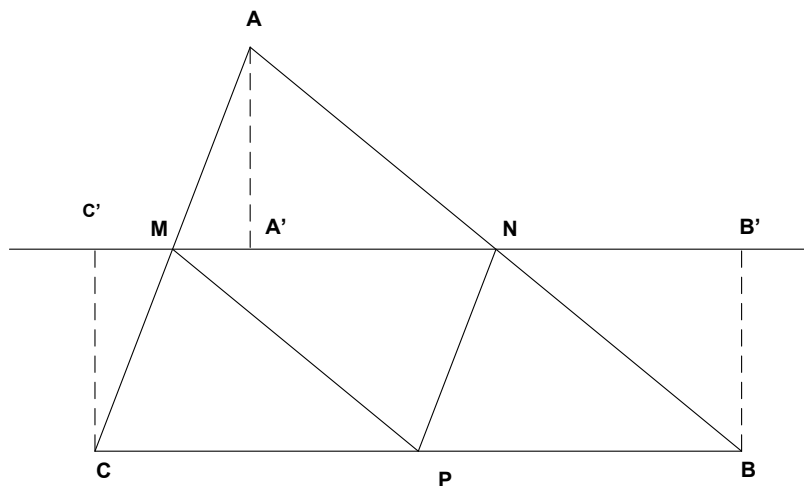


### Préambule

Soit un rectangle  $ABCD$ . Il engendre un cylindre de volume  $\pi r^2 h$  en tournant autour de  $DC$ . De même le triangle  $ADC$  engendre un cône de volume  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

On en déduit que le triangle  $ABC$  engendre en tournant autour de  $DC$  un

volume :  $\frac{2}{3} \pi r^2 h$



### Méthode 1

Soit  $MP$  qui joint le milieu de  $AC$  et  $CB$ , et  $NP$  qui joint le milieu de  $AB$  et  $CB$

Il est immédiat que l'on détermine ainsi 4 triangles égaux. (même base et même hauteur)

Le triangle  $MNP$  engendre un volume égal à celui engendré par le triangle  $AMN$

Les triangles  $CMP$  et  $PNB$  engendrent eux des volumes doubles (voir préambule)

On conclut : 
$$\frac{\text{Vol engendré par } CMNB}{\text{Vol engendré par } MAN} = 5$$

### Méthode 2

De  $A, B$  et  $C$  on abaisse les perpendiculaires sur l'axe  $MN$

Les triangles  $MA'A$  et  $CC'M$  sont égaux. De même les triangles  $NAA'$  et  $NB'N$  sont aussi égaux.

$CB'BC$  est un rectangle qui engendre un volume :  $\pi \cdot |CC'|^2 \cdot |MN|$

Le triangle  $AMN$  engendre un cône de volume :  $\frac{1}{3} \pi \cdot |AA'|^2 \cdot |MN|$

Et comme  $|CC'| = |AA'|$ , on déduit

$$\frac{\text{Vol engendré par } CB'BC - \text{Vol engendré par } CMC' \text{ et } MB'B}{\text{Vol engendré par } AMN} = 5$$

---

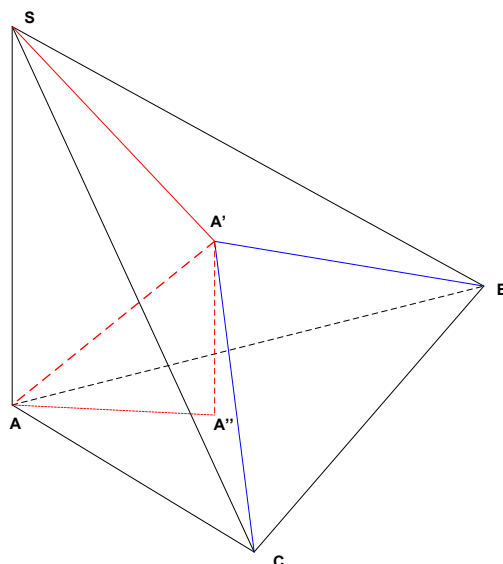
Le 9 mars 05

## EXGSE072 – Liège, juillet 2005.

Soit  $SABC$  un tétraèdre tel que  $SA$  soit perpendiculaire à  $ABC$ . On note  $A'$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $SBC$ . Démontrer la relation

$$\frac{A(SBC)}{A(ABC)} = \frac{A(ABC)}{A(A'BC)}$$

Où  $A(XYZ)$  désigne l'aire du triangle  $XYZ$ .



Exprimons le volume du tétraèdre  $SABC$  de deux façons différentes :

$$\begin{cases} V_{SABC} = |SA| \cdot A(ABC) \\ V_{SABC} = |AA'| \cdot A(SBC) \end{cases} \rightarrow \frac{A(SBC)}{A(ABC)} = \frac{|SA|}{|AA'|} \quad (1)$$

Soit  $A''$  la projection orthogonale de  $A'$  sur le plan  $ABC$

Exprimons le volume du tétraèdre  $AA'BC$  de deux façons différentes :

$$\begin{cases} V_{AA'BC} = |AA'| \cdot A(A'BC) \\ V_{AA'BC} = |A'A''| \cdot A(ABC) \end{cases} \rightarrow \frac{A(ABC)}{A(A'BC)} = \frac{|AA'|}{|A'A''|} \quad (2)$$

D'autre part,  $AA'$  et  $SA$  sont parallèles puisque perpendiculaires au même plan  $ABC$

Les angles  $\overline{SAA'}$  et  $\overline{AA'A''}$  sont donc des angles alternes-internes, et ils sont égaux.

→ Les triangles rectangles  $SA'A$  et  $AA''A'$  sont semblables →  $\frac{|SA|}{|AA'|} = \frac{|A'A|}{|A''A'|}$

$$\text{Ce qui signifie que } (1) = (2) \rightarrow \frac{A(SBC)}{A(ABC)} = \frac{A(ABC)}{A(A'BC)}$$

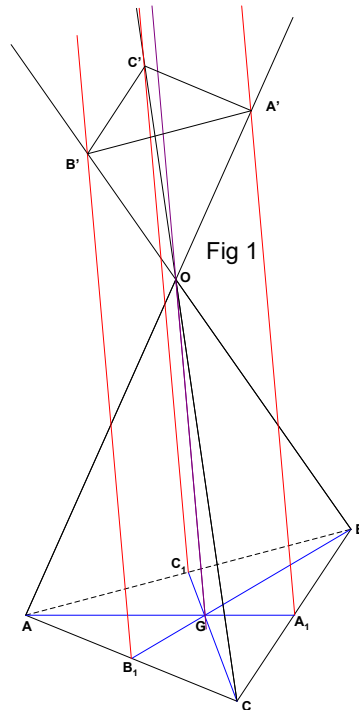
Le 19 juillet 2006

## EXGSE073 – Liège, juillet 2005.

On considère un tétraèdre  $OABC$  et on note  $G$  le centre de gravité de la face  $ABC$ . On note respectivement  $A_1, B_1, C_1$  les milieux de  $[B,C], [C,A], [A,B]$ .

Un plan  $\pi$  parallèle à  $ABC$  coupe  $OA, OB$  et  $OC$  en respectivement  $A', B', C'$

1. Démontrer qu'il existe une unique position de  $\pi$  pour laquelle les droites  $A'A_1, B'B_1$  et  $C'C_1$  sont parallèles à  $OG$
2. Démontrer que pour toutes les autres positions, ces droites sont concourantes en un point  $P$  de la droite  $OG$



Dans le plan  $OAG$ , on ne peut tracer qu'une et une seule parallèle à  $OG$  par  $A_1$ .

Cette parallèle coupe  $AO$  en  $A'$ . De même, on trouve  $B'$  et  $C'$  (Voir fig 1)

Montrons que  $A'B'C'$  déterminent un plan parallèle à  $ABC$ .

Les triangles  $AA'A_1$  et  $AOG$  sont semblables  $\rightarrow \frac{|A'A_1|}{|OG|} = \frac{|AA_1|}{|AG|} \rightarrow |A'A_1| = \frac{3}{2}|OG|$

puisque  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$

De même :  $|B'B_1| = |C'C_1| = \frac{3}{2}|OG|$

$\rightarrow B'A'A_1B_1$  est un parallélogramme  $\rightarrow B'A'$  est parallèle à  $B_1A_1$

De même :  $B'C' // B_1C_1$  et  $C'A' // C_1A_1$

Le plan  $A'B'C'$  est donc le plan  $\pi$  cherché et comme les points  $A', B', C'$  sont uniques le plan  $\pi$  est unique

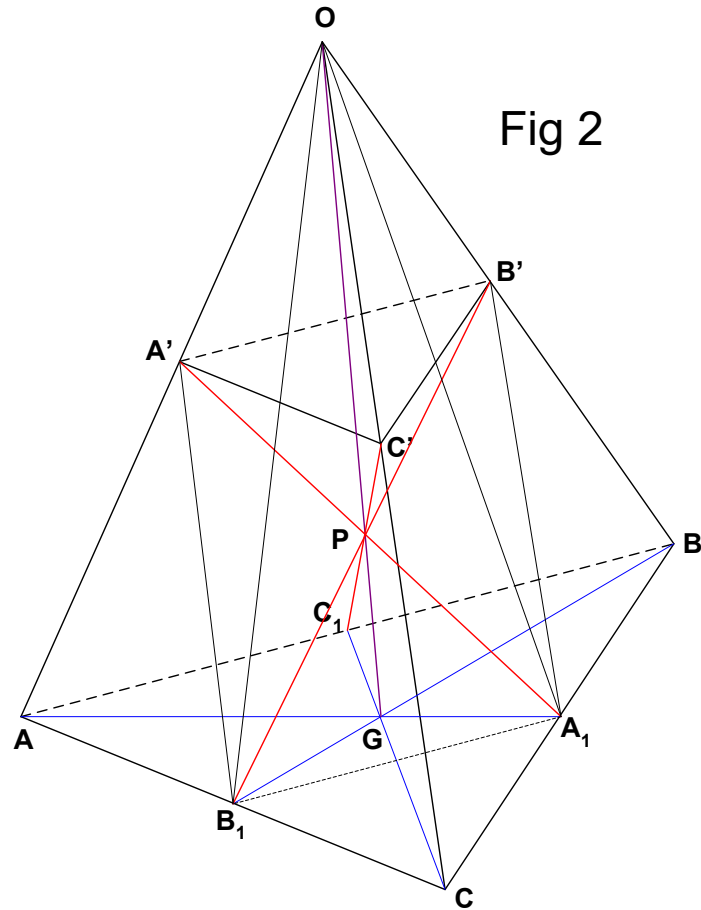


Fig 2

Les médianes  $AA_1$ ,  $BB_1$  et  $CC_1$  se coupent au point  $G$ .

Considérons les plans  $AA_1O$  et  $BB_1O$ . Ils ont les points  $O$  et  $G$  en commun

→ leur intersection est  $OG$

$B_1A_1$  est parallèle à  $AB$  puisque  $B_1$  et  $A_1$  sont milieux de leurs segments respectifs.

$A'B'$  est parallèle à  $AB$  puisque le plan  $OAB$  est coupé par deux plans parallèles.

→  $A'B'A_1B_1$  est un parallélogramme dont les diagonales  $A'A_1$  et  $B'B_1$  se coupent en un point  $P$ .

Ce point  $P$  appartient à  $OG$  puisque  $A'A_1 \subset \text{plan } AA_1O$  et puisque  $B'B_1 \subset \text{plan } BB_1O$  c'est-à-dire que  $P$  est situé sur l'intersection des plans  $AA_1O$  et  $BB_1O$

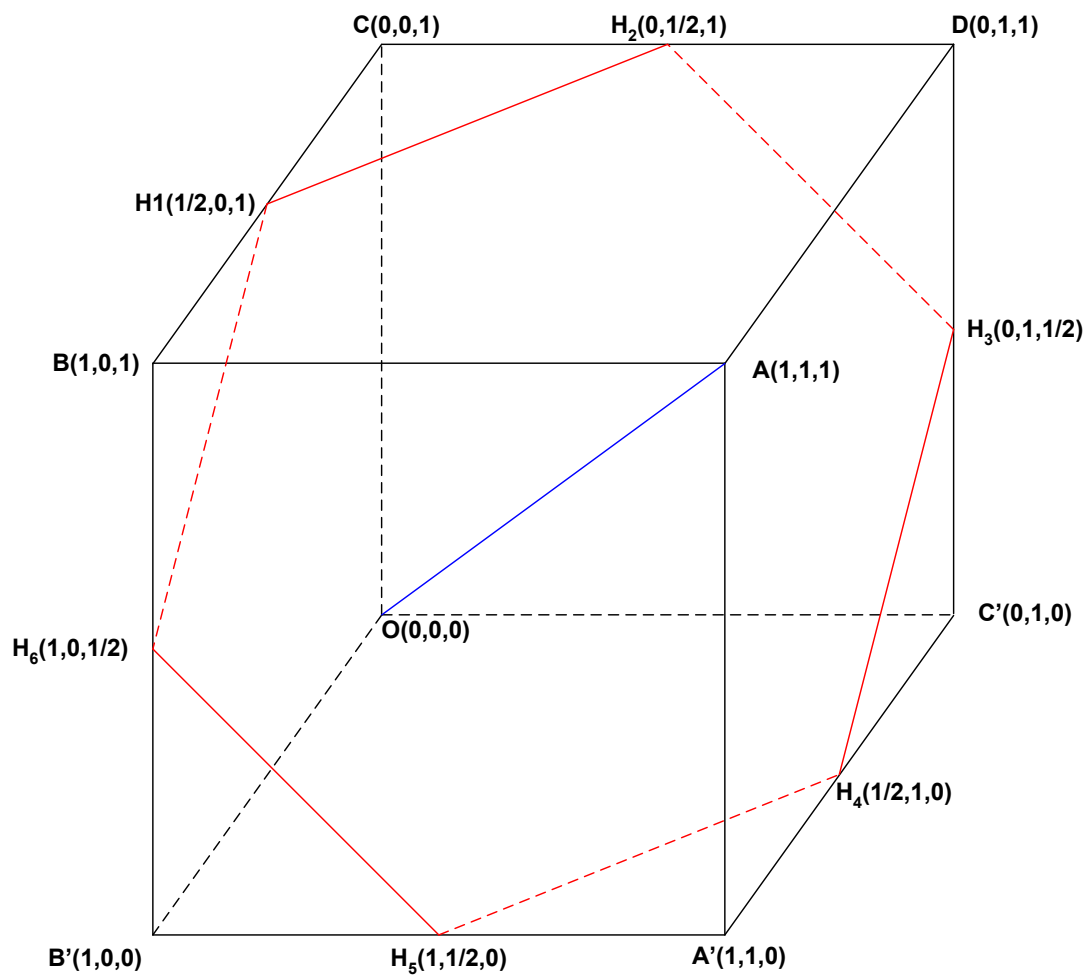
On recommence le même raisonnement en prenant les plans  $OAA_1$  et  $OCC_1$ .

On arrive alors au parallélogramme  $A'C'A_1C_1$ , dont les diagonales  $A'A_1$  et  $C'C_1$  se coupent au même point  $P$ .

Conclusion : les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes en un point  $P$  situé sur  $OG$

## EXGSE074 - Bruxelles – Juillet 2006

Dans l'espace euclidien rapporté à un trièdre orthonormé  $O$  et d'axes  $x, y$  et  $z$ , on donne le point  $A(1,1,1)$ . Soit  $\Gamma$  le cube de côté 1 dont une face est dans le plan  $Oxy$  et dont  $O$  et  $A$  sont deux sommets. On demande de déterminer un plan qui sépare le cube en deux parties de même volume et dont l'intersection avec le cube est un hexagone régulier. Formez une équation cartésienne de ce plan et déterminez les coordonnées des points d'intersection entre ce plan et les arêtes du cube





## Hexagone

Le cube est représenté à la figure ci dessus. On choisit un repère :  $O$  étant l'origine, et  $A(1,1,1)$

Soit  $OA$  une des diagonales du cube. Considérons le plan médiateur  $\pi$  du segment  $[OA]$

Ce plan  $\pi$  coupe le cube en deux volumes égaux vu la symétrie du cube.

De plus  $\pi$  coupe  $BC$  en  $H_1$  qui est donc équidistant de  $O$  et  $A$ .

Dés lors les triangles rectangles  $H_1CO$  et  $H_1BA$  sont égaux  $\rightarrow |H_1C| = |H_1B|$

Autrement dit,  $H_1$  est le milieu de  $CB$ .

On recommence le même raisonnement pour les points  $H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$

Considérons les triangles rectangles  $BH_1H_6$  et  $CH_1H_2$ . Ils sont égaux  $\rightarrow |H_6H_1| = |H_1H_2|$

On déduit de la même façon que :  $|H_6H_1| = |H_1H_2| = |H_2H_3| = |H_3H_4| = |H_4H_5| = |H_5H_6|$

Finalement,  $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$  est un hexagone qui est régulier vu la symétrie du cube.

## Equation du plan $\pi$

Les coordonnées de tous les points sont indiqués sur la figure.

### Méthode 1

le plan  $\pi$  étant médiateur de  $[OA] \rightarrow \vec{n}_\pi : (1,1,1) \rightarrow \pi \equiv x + y + z + d = 0$

$$H_6 \in \pi \rightarrow 1 + 0 + \frac{1}{2} + d = 0 \rightarrow d = -\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$$

### Méthode 2

Si on connaît trois points  $A, B, C$  du plan, son équation est donnée par :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & x_B & x_C & 1 \\ y_A & y_B & y_C & 1 \\ z_A & z_B & z_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Prenons, par exemple, les points  $H_6, H_1$  et  $H_2$

$$\pi = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$$

---

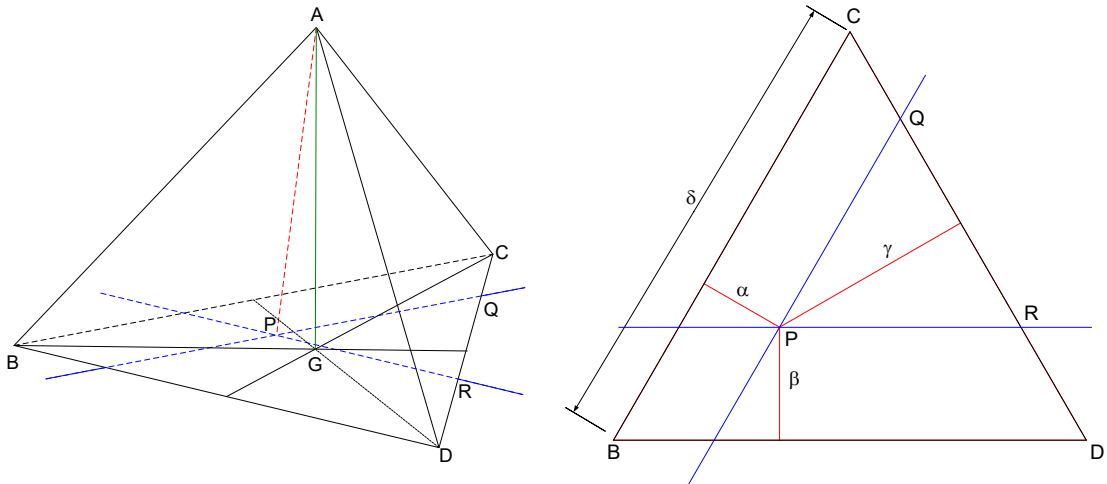
28 décembre 2006

## EXGSE075 - Liège – septembre 2006

On considère un tétraèdre  $ABCD$  dont la base  $BCD$  est équilatérale, et tel que la droite déterminée par  $A$  et le centre de gravité de cette base est perpendiculaire au plan  $BCD$ .

Soit  $P$  un point intérieur au triangle  $BCD$ , et  $\pi$  et  $\pi'$  deux plans s'appuyant sur la droite  $AP$  et respectivement parallèles aux droites  $BC$  et  $BD$ . Les plans  $\pi$  et  $\pi'$  rencontrent l'arête  $[C,D]$  en deux points respectifs  $Q$  et  $R$ . Les distances du point  $P$  aux arêtes  $[B,C]$ ,  $[B,D]$  et  $[C,D]$  sont respectivement dénotées  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . La longueur de l'arête  $[B,C]$  est dénotée  $\delta$ .

- Montrer que le triangle  $PQR$  est équilatéral
- Exprimer la longueur d'un côté du triangle  $PQR$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .
- Montrer que la valeur  $\alpha + \beta + \gamma$  ne dépend pas de la position de  $P$ .
- En déduire que la somme des distances de  $P$  aux quatre faces du tétraèdre  $ABCD$  est indépendante de  $P$ .



a) Le schéma de la base est repris séparément

$PR \parallel BD \rightarrow \angle QPR = \angle CBD = 60^\circ$  car angles correspondants

$PQ \parallel BC \rightarrow \angle PQR = \angle BCD = 60^\circ$  car angles correspondants.

Le triangle  $PQR$  est donc équilatéral car ces trois angles valent  $60^\circ$ .

$$b) |QR| = |CD| - |CQ| - |RD| = \delta - \frac{\alpha}{\sin 60^\circ} - \frac{\beta}{\sin 60^\circ} = \delta - \frac{2\sqrt{3}}{3}(\alpha + \beta)$$

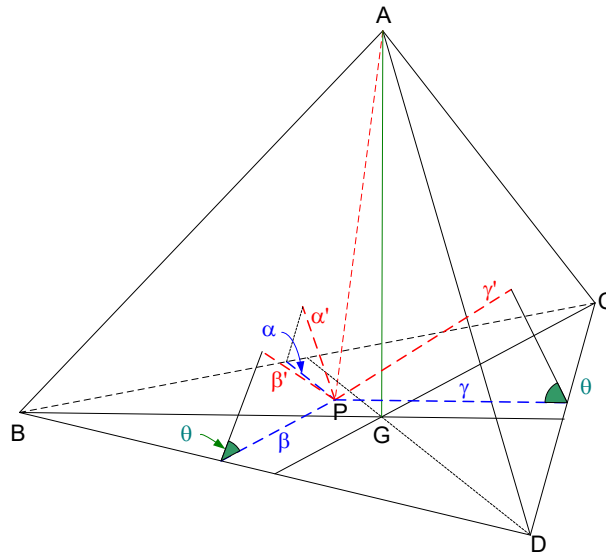
c) Dans le triangle  $PQR \rightarrow \gamma^2 = |PQ|^2 - \left(\frac{|QR|}{2}\right)^2 = \frac{3|QR|^2}{4}$

$$\rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} |QR| \rightarrow |QR| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \gamma$$

On remplace dans l'expression trouvée au point b)

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \gamma = \delta - \frac{2\sqrt{3}}{3} (\alpha + \beta) \rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta}$$

Cette expression qui est indépendante de la position de  $P$



d) Puisque la droite passant par  $A$  et le centre de gravité  $G$  la base est perpendiculaire au plan  $BCD$ , le tétraèdre possède  $GA$  comme axe de symétrie.

De plus, les angles des dièdres formés par les trois faces du tétraèdre et la base sont tous égaux. Soit  $\theta$  cet angle.

La distance du point  $P$  à la base est nulle, puisque que  $P$  appartient à cette base.

Soit  $\alpha'$ ,  $\beta'$  et  $\gamma'$ , les distances de  $P$  aux trois autres faces du tétraèdre.

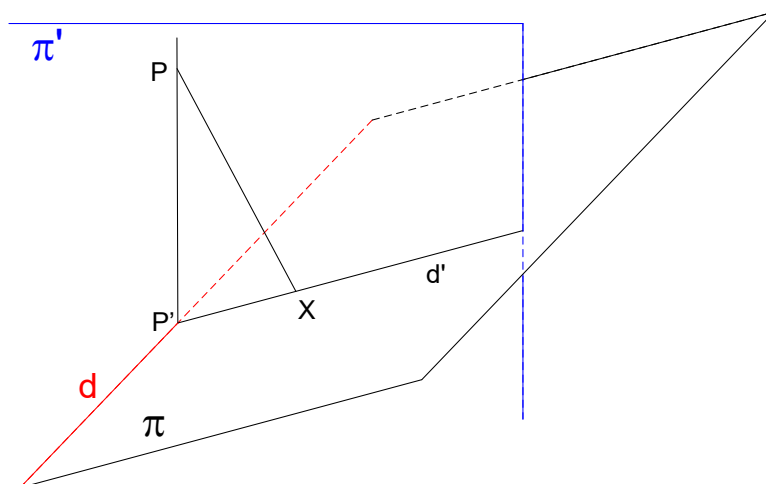
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha \sin \theta + \beta \sin \theta + \gamma \sin \theta = \sin \theta (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta \sin \theta$$

Expression qui est aussi indépendante de la position de  $P$ .

## EXGSE076 - Liège – septembre 2006

On considère une droite  $d$  de l'espace et un point  $P$  n'appartenant pas à  $d$ . Pour tout plan  $\pi$  contenant  $d$ , on note  $X$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $\pi$ . Déterminer le lieu géométrique décrit par le point  $X$  quand  $\pi$  varie.

Suggestion : si on procède par géométrie analytique, on choisira un système d'axes où  $d$  est l'un des axes.



Soit le plan  $\pi'$  passant par  $P$  et perpendiculaire à  $d$ .

Soit  $P'$  le point de percée de  $d$  dans  $\pi'$ .

Les plans  $\pi$  et  $\pi'$  se coupent selon la droite  $d'$  qui passe par  $P'$ .

La projection orthogonale  $X$  de  $P$  sur  $\pi$  se trouve sur la droite  $d'$  et donc dans le plan  $\pi'$ .

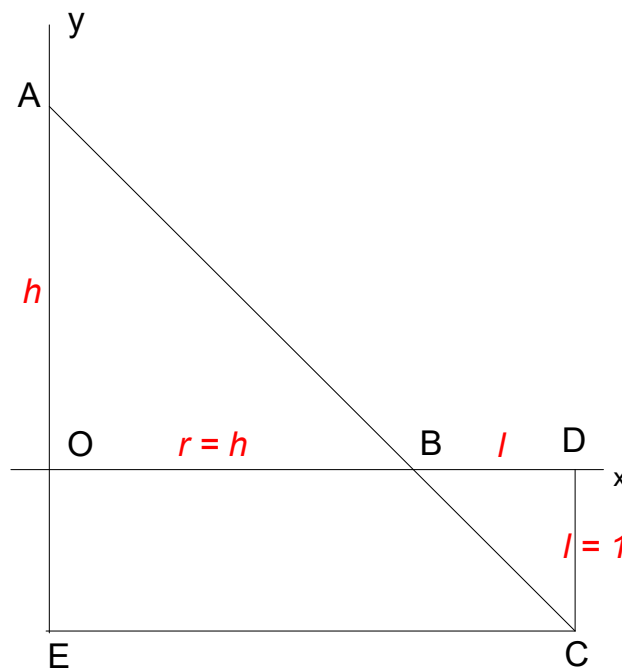
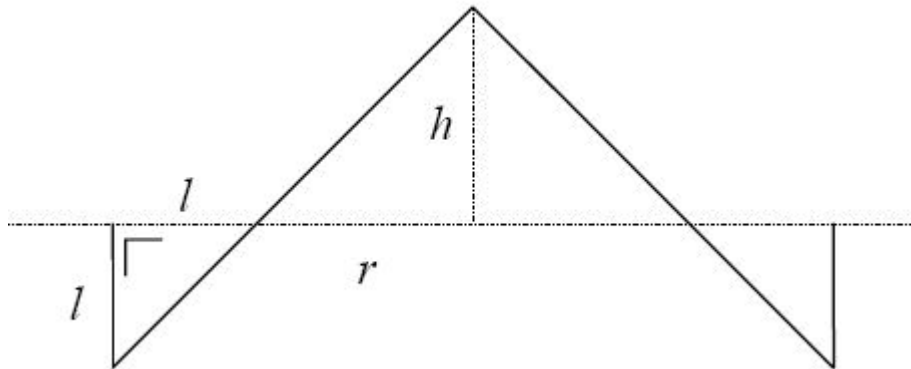
Quand la position de  $\pi$  varie,  $X$  reste dans le plan  $\pi'$  et l'angle  $\overline{PXP'} = 90^\circ$ .

Conclusion : Le lieu de  $X$  est le cercle situé dans le plan  $\pi'$  et de diamètre  $PP'$ .

26 décembre 2006

## EXGSE077 - Louvain, série 1 – juillet 2006

Des enfants réalisent un château de sable de forme conique de hauteur  $h$  et de rayon  $r = h$ , voir figure. Pour ce faire, ils creusent autour du château une tranchée de profondeur  $l$  et de largeur  $l$ , dont la section est également représentée sur la figure. Le sable constituant le château est intégralement prélevé de la tranchée. On vous demande de calculer la hauteur du château de sable pour une tranchée de profondeur  $l = 1$ . (Note : les longueurs des segments sur la figure ne correspondent pas à la solution du problème !)



### Méthode 1

Volume du cylindre engendré par la rotation du rectangle  $ODCE$  autour de l'axe  $OA$  :

$$V_C = \pi(h+l)^2 l = \pi(h+1)^2$$

Volume du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze  $OBCE$  autour de l'axe  $OA$  :

$$\begin{aligned} V_{TC} &= \frac{\pi l}{3} (h^2 + h(h+l) + (h+l)^2) = \frac{\pi}{3} (h^2 + h(h+1) + (h+1)^2) \\ &= \frac{\pi}{3} (3h^2 + 3h + 1) \end{aligned}$$

Volume engendré par la rotation du triangle  $BDC$  autour de l'axe  $OA$  :

$$\begin{aligned} V_T &= V_C - V_{TC} = \pi(h+1)^2 - \frac{\pi}{3} (3h^2 + 3h + 1) = \frac{\pi}{3} (3h^2 + 6h + 3 - 3h^2 - 3h - 1) \\ &= \frac{\pi}{3} (3h + 2) \end{aligned}$$

Ce dernier volume doit être égal au volume du cône engendré par le triangle  $OAB$

$$\rightarrow \frac{\pi}{3} h^3 = \frac{\pi}{3} (3h + 2) \rightarrow h^3 - 3h - 2 = 0$$

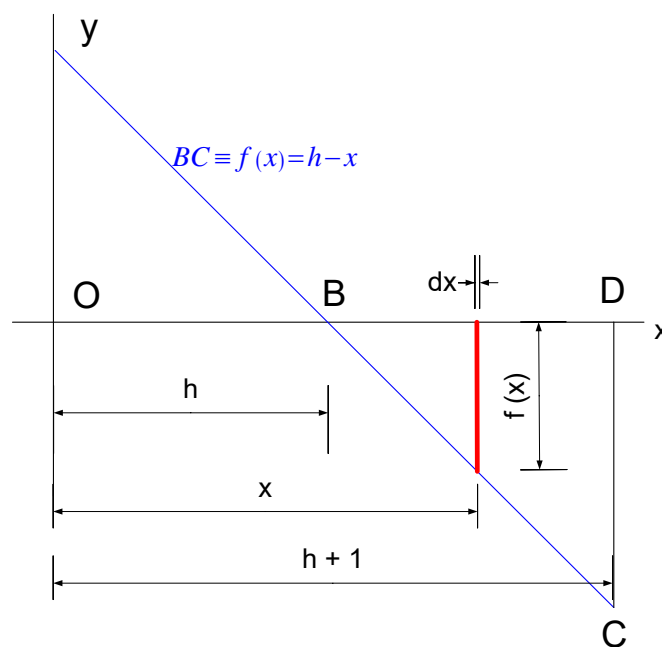
On factorise par Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & -2 & \\ -1 & & -1 & +1 & +2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow h^3 - 3h - 2 = 0 \rightarrow (h+1)(h^2 - h - 2) = (h+1)^2 (h-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} h = -1 < 0 & \text{à rejeter} \\ h = 2 \end{cases}$$

Conclusion  $\boxed{h=2}$



## Méthode 2

Méthode alternative pour le calcul de  $V_T$

La droite  $BC$  a pour équation :  $BC \equiv f(x) = h - x$

Considérons un élément de largeur  $dx$  et de hauteur  $f(x)$ . Ce rectangle engendre par rotation un volume  $dV_T$  assimilable à celui d'un parallélépipède rectangle :

$$\rightarrow dV_T = \underbrace{2\pi x}_{\text{La longueur}} \cdot \underbrace{(h-x)}_{\text{La hauteur}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{La largeur}}$$

Il reste à intégrer de  $h$  à  $h+1$ . On prendra la valeur absolue de l'intégrale puisque la surface  $BDC$  est en dessous de l'axe des  $x$ .

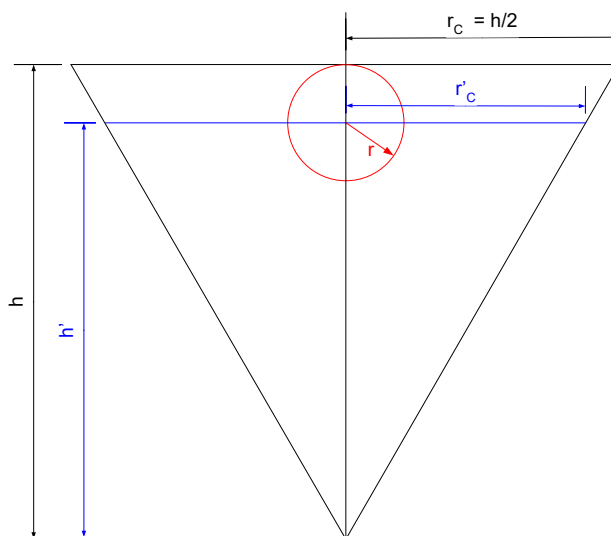
$$\begin{aligned} V_T &= -2\pi \int_h^{h+1} x(h-x) dx = 2\pi \left( \int_h^{h+1} x^2 dx - h \int_h^{h+1} x dx \right) \\ &= 2\pi \left( \left[ \frac{x^3}{3} \right]_h^{h+1} - h \left[ \frac{x^2}{2} \right]_h^{h+1} \right) = 2\pi \left( \frac{1}{3} \left( (h+1)^3 - h^3 \right) - \frac{h}{2} \left( (h+1)^2 - h^2 \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( 2 \left( \cancel{h^3} + 3h^2 + 3h + 1 - \cancel{h^3} \right) - 3h \left( \cancel{h^2} + 2h + 1 - \cancel{h^2} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( \cancel{6h^2} + 6h + 2 - \cancel{6h^2} - 3h \right) = \frac{\pi}{3} (3h + 2) \end{aligned}$$

---

30 juin 2007

## EXGSE078 - Louvain, série 2 – juillet 2006

On demande à des ingénieurs de concevoir un réservoir fermé destiné à contenir un liquide dangereux. Le réservoir conique est creusé dans le sol avec le sommet en bas et la base en haut. La hauteur du réservoir est notée  $h$ , et le rayon de la base est  $r_c = h/2$ . Pour pouvoir contrôler que la contenance de ce réservoir ne dépasse jamais un certain niveau critique, les ingénieurs ont imaginé le système de contrôle suivant. Un ballon sphérique de rayon  $r = r_c/5$  et de densité égale à la moitié de la densité du liquide est introduit dans le réservoir (le ballon s'enfonce donc de moitié dans le liquide). Grâce à un système de capteurs, le remplissage s'arrête lorsque le ballon entre en contact avec la plaque supérieure du réservoir. On vous demande d'estimer la fraction volumique de liquide dans le réservoir, c'est-à-dire le rapport du volume de liquide sur le volume total du réservoir.





Soit  $V_C$  la capacité totale du réservoir :  $V_C = \frac{\pi}{3} \underset{\text{Sa hauteur}}{h} \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{12} h^3$  (1)

Quand le réservoir est rempli à son maximum, la hauteur de liquide est alors  $h'$

$$h' = h - r = h - \frac{r_C}{5} = h - \frac{h}{10} = \frac{9}{10} h$$

Soit  $V_C'$  la capacité du cône correspondant à la hauteur  $h'$  :  $V_C' = \frac{\pi}{3} h' r_C'$  (2)

Or :  $\frac{r_C'}{r_C} = \frac{h'}{h} \rightarrow r_C' = r_C \frac{h'}{h} = \frac{h}{2} \frac{\frac{9}{10} h}{h} = \frac{9}{20} h$

Donc : (2)  $\rightarrow V_C' = \frac{\pi}{3} \frac{9h}{10} \left( \frac{9h}{20} \right)^2 = \frac{\pi}{12} \frac{9^3 h^3}{10^3}$  (3)

Le volume de la sphère est :  $V_S = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{h}{10} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{h^3}{10^3}$  (4)

Le volume de liquide dans le réservoir est alors :

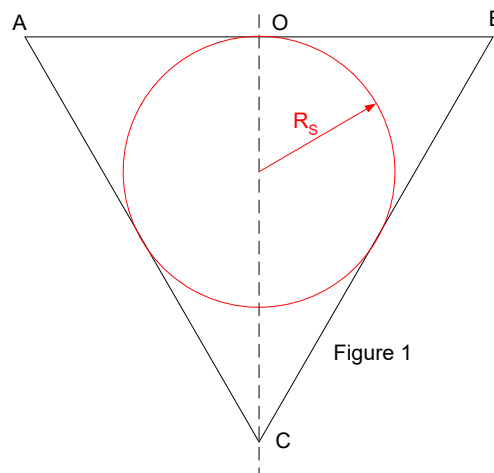
De (3) et (4)  $\rightarrow V_L = V_C' - \frac{V_S}{2} = \frac{\pi}{12} \frac{9^3 h^3}{10^3} - \frac{4\pi}{6} \frac{h^3}{10^3} = \frac{\pi h^3}{12 \cdot 10^3} (9^3 - 8)$  (5)

La fraction volumique de liquide dans le réservoir est finalement

De (1) et (5)  $\rightarrow \frac{V_L}{V_C} = \frac{\frac{\pi h^3}{12 \cdot 10^3} (9^3 - 8)}{\frac{\pi}{12} h^3} = \frac{9^3 - 8}{1000} = \frac{729 - 8}{1000} = \boxed{0.721}$

## EXGSE079 - Louvain, septembre 2006

Un producteur de liqueurs traditionnelles vend des carafes coniques contenant non seulement la liqueur mais également un fruit, ce dernier conférant deux avantages : un aspect esthétique apprécié des clients et une économie sur la quantité de liquide à y introduire. La technique consiste à faire grandir le fruit dans la carafe. Le fruit grandit en gardant toujours la même forme et atteint sa taille finale lorsque les parois de la carafe l'empêchent de grandir davantage. Le producteur cherche à savoir s'il doit préférer des fruits de forme sphérique ou de forme cubique\* pour optimiser son gain. Les carafes ont le diamètre de la base de longueur égale à la génératrice du cône. La question revient donc à comparer les volumes des deux fruits. (Sans calculatrice, il vous sera nécessaire de réaliser un calcul approximatif pour décider.)

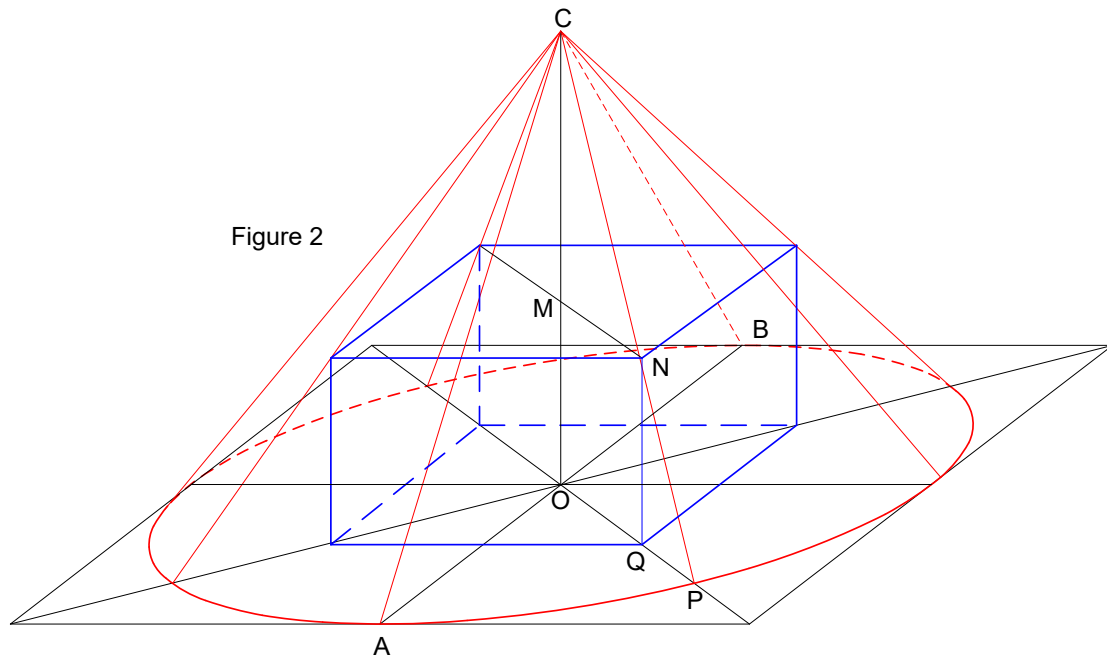


Le rayon de la sphère inscrite est égal au tiers de la hauteur du cône.

En effet, la section du cône par un plan vertical est un triangle équilatéral puisque le diamètre de la base est égale à la génératrice du cône, et, dans un triangle équilatéral la hauteur est en même temps bissectrice, médiatrice et médiane.

$$\rightarrow R_s = \frac{\sqrt{3}}{6} d$$

$$\rightarrow \text{Le volume de la sphère : } V_s = \frac{4}{3} \pi R_s^3 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{6} d \right)^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{54} d^3 \cong 0.1d^3$$

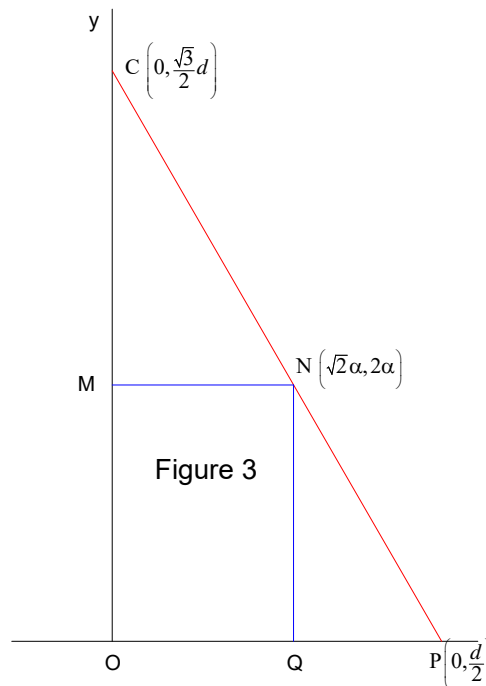


Le cas du cube est plus compliqué car comme le montre la figure 2, le cube touche le cône aux quatre sommets.

La longueur limitante sera la diagonale d'une des faces du cube.

Considérons le plan  $CMOQPN$  et soit  $2\alpha$  la longueur de l'arête du cube.

Prenons comme axes  $OP \equiv Ox$  et  $OC \equiv Oy$ . Voir figure 3



Dans ce repère,  $CP \equiv \frac{x}{\frac{d}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{3}d}{2}} = 1 \rightarrow CP \equiv 2x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y = d$

Le sommet du cube  $N(\sqrt{2}\alpha, 2\alpha)$  appartient à  $CP$

$$\rightarrow 2\sqrt{2}\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{3}2\alpha = d \rightarrow \alpha = \frac{3d}{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}} = 0.195d$$

Le volume du cube est alors :  $V_C = (2 \times 0.195d)^3 = 0.059d^3$

Il nous reste à faire le rapport des volumes :

$$\rightarrow \frac{V_S}{V_C} = \frac{0.1d^3}{0.059d^3} \cong 1.7$$

La sphère est donc manifestement la forme qui permet d'économiser le plus de liquide.

---

30 juin 2007