Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 8

EXGSE080 – EXGSE089

http://www.matheux.be.tf

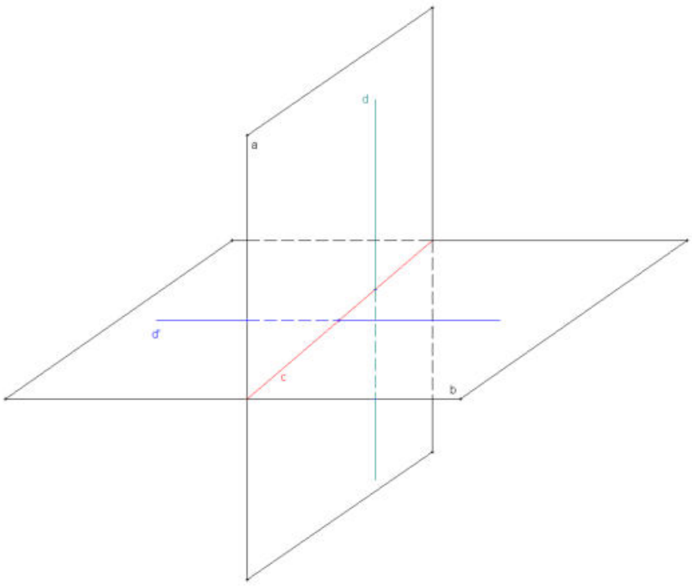
Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 08

EXGSE080 - FACSA, Liège, juillet 2007

Soient α et β deux plans perpendiculaires. Soient d et d' deux droites orthogonales entre elles telles que $d \subset \alpha$, $d' \subset \beta$. Démontrer que d ou d' est perpendiculaire à $\alpha \cap \beta$

Solution proposée par Steve Tumson



- L'intersection de deux plans sécants est une droite c commune : $\alpha \cap \beta = c$

- Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
  Donc, par exemple, si d' est perpendiculaire à α, elle est orthogonale à toutes les droites de α, y compris la droite c.

- L'énoncé nous dit que d et d' sont orthogonales. Or une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient orthogonales est que l'une soit incluse dans un plan perpendiculaire à l'autre (C'est le critère d'orthogonalité de deux droites).

- On a donc soit

$$* \ \underline{1^{er}\ \text{cas}} : \begin{cases} d \subset \alpha \\ d' \subset \beta \\ d \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d \perp \text{à toutes les droites du plan } \beta. \\ \text{En particulier à } c = \alpha \cap \beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{d \perp c}$$

$$* \ \underline{2^{ème}\ \text{cas}} : \begin{cases} d \subset \alpha \\ d' \subset \beta \\ d' \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d' \perp \text{à toutes les droites du plan } \alpha. \\ \text{En particulier à } c = \alpha \cap \beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{d' \perp c}$$

---

23 juillet 2007

EXGSE081 - Liège, juillet 2007

Une sphère opaque de rayon r et de centre C posée sur un sol plan est éclairée par une source lumineuse O située à une distance $2r$ de C et à la même hauteur que C.

1. Déterminer le lieu des points de la sphère où les rayons lumineux sont tangents à cette sphère.
   Suggestion : Utiliser la symétrie du problème par rapport à l'axe OC
2. Caractériser la forme de l'ombre portée par cette sphère sur le sol.

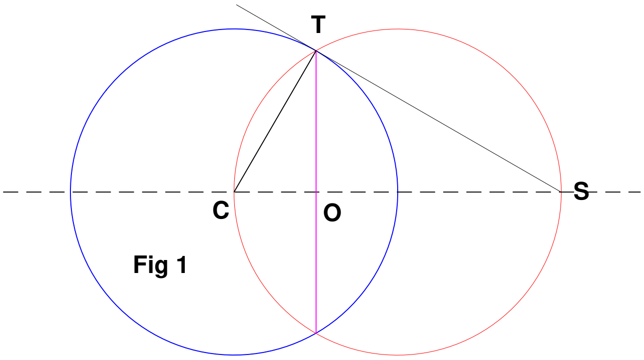


Fig 1

1) Comme le suggère l'énoncé, profitons de la symétrie du problème.
Soit un plan α quelconque passant par l'axe de symétrie CS.
L'intersection de la sphère est un cercle de centre C et de rayon r (Fig 1).
Traçons la tangente TS. Il est immédiat que $CT \perp TS$.
De T, abaissons la perpendiculaire sur CS qui détemine le point O.

Calculons $|OT|$.

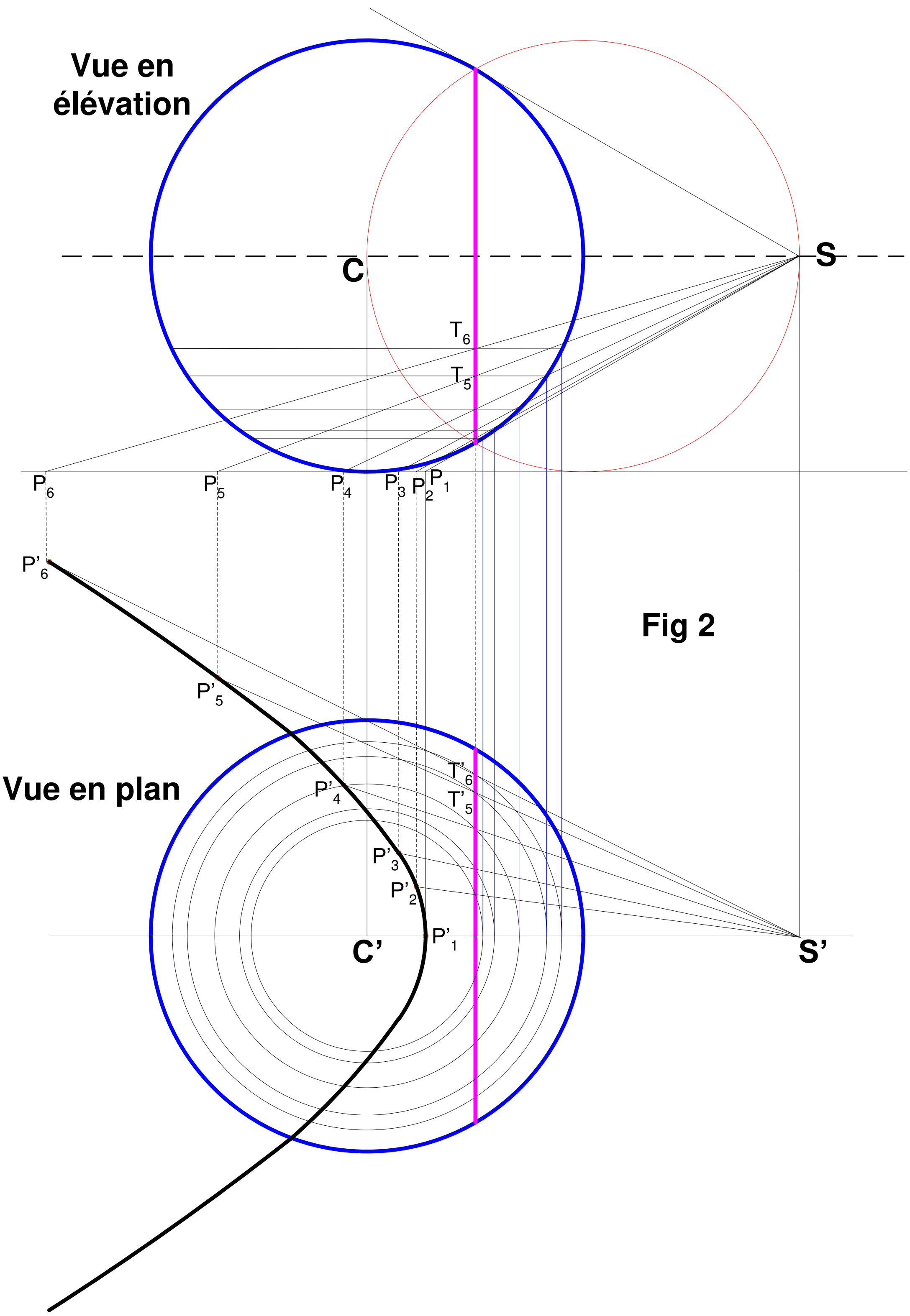
Il est immédiat que $|CO| = \dfrac{r}{2} \rightarrow |OT| = \sqrt{|CT|^2 - |CO|^2} = \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r$

Puisque α est un plan quelconque, nous en déduisons que le lieu des points de tangence T est un cercle de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2} r$, de centre $O \in CS$ et situé entre C et S.

Le cercle se trouve dans un plan perpendiculaire à CS et est situé à une distance $|OC| = \dfrac{r}{2}$

2) L'ensemble des rayons TS forment un cône de sommet S et d'axe CS.
Pour déterminer l'ombre portée sur le sol, il suffit de couper le cône par le plan du sol.
Le plan du sol étant parallèle à l'axe du cône, l'intersection est une branche d'hyperbole.
Il n'est pas demandé de déterminer l'équation de cette hyperbole.
A la figure 2, la parabole a été déterminé par les méthodes classiques de la géométrie descriptive.
Note : Si la source lumineuse est à une hauteur

- $h = r$ $\rightarrow$ l'ombre est une hyperbole
- $h = 2r$ $\rightarrow$ l'ombre est une parabole
- $h > 2r$ $\rightarrow$ l'ombre est une ellipse
- Et si la source est à la verticale de C $\rightarrow$ l'ombre est un cercle



Vue en
élévation
C
S
T
6
T
5
P
6
P
5
P
4
P
3
P
2
P
1
P'
6
P'
5
Fig 2
Vue en plan
T'
6
T'
5
P'
4
P'
3
P'
2
P'
1
C'
S'

EXGSE082 - Louvain, juillet 2007, série 1

Un jeu de « poupées russes » est constitué de cubes et de sphères de différentes tailles qui s'emboîtent les uns dans les autres dans l'ordre suivant : cube dans une sphère qui elle-même entre dans un cube ….. pour terminer par une sphère. Les sphères et les cubes sont tous dimensionnés de façon à avoir une taille maximale leur permettant d'entrer tout juste dans le volume plus grand (on néglige l'épaisseur des parois du cube et de la sphère). On demande :

1. Le rapport existant entre deux volumes de sphères successives (càd uniquement avec un cube intercalé).
2. Le rapport entre le volume de la plus grande sphère et le volume du plus petit cube dans le cas d'un jeu de 5 cubes.

Soit $2a$ l'arête d'un cube. La diagonale de ce cube est $2a\sqrt{3}$.

La sphère circonscrite passe par les sommets du cube.

Par conséquent, le rayon de la sphère circonscrite à ce cube est $a\sqrt{3}$

Soit b le rayon d'une sphère.

La sphère est tangente aux milieux des faces du cube circonscrit.

L'arête du cube circonscrit vaut donc $2b$.

Sur cette base, nous construisons le tableau suivant.

		Arête	Rayon	Volume
C_1	Cube	$2a$		$V_{C_1} = 8a^3 = 8a^3\left(\sqrt{3}\right)^0$
S_1	Sphère		$a\sqrt{3}$	$V_{S_1} = \frac{4\pi}{3}a^3\left(\sqrt{3}\right)^3$
C_2	Cube	$2a\sqrt{3}$		$V_{C_2} = 8a^3\left(\sqrt{3}\right)^3$
S_2	Sphère		$a\left(\sqrt{3}\right)^2$	$V_{S_1} = \frac{4\pi}{3}a^3\left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^2$
C_3	Cube	$2a\left(\sqrt{3}\right)^2$		$V_{C_3} = 8a^3\left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^2$
S_3	Sphère		$a\left(\sqrt{3}\right)^3$	$V_{S_3} = \frac{4\pi}{3}a^3\left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^3$
C_4	Cube	$2a\left(\sqrt{3}\right)^3$		$V_{C_3} = 8a^3\left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^3$
S_4	Sphère		$a\left(\sqrt{3}\right)^4$	$V_{S_4} = \frac{4\pi}{3}a^3\left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^4$
...	...	...	...	...
C_n	Cube	$2a\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$		$V_{C_n} = 8a^3\left(\sqrt{3}\right)^{3n-3}$
S_n	Sphère		$a\left(\sqrt{3}\right)^n$	$V_{S_4} = \frac{4\pi}{3}a^3\left(\sqrt{3}\right)^{3n}$

La réponse aux deux questions est maintenant simple :

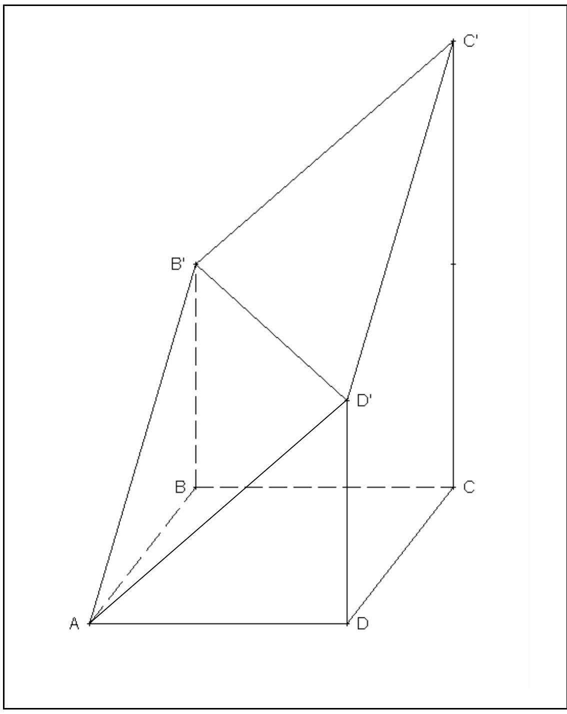
1) $\frac{V_{S_n}}{V_{S_{n-1}}} = \frac{\frac{4\pi}{3}a^3\left(\sqrt{3}\right)^{3n}}{\frac{4\pi}{3}a^3\left(\sqrt{3}\right)^{3(n-1)}} = \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3} \cong 5.2$

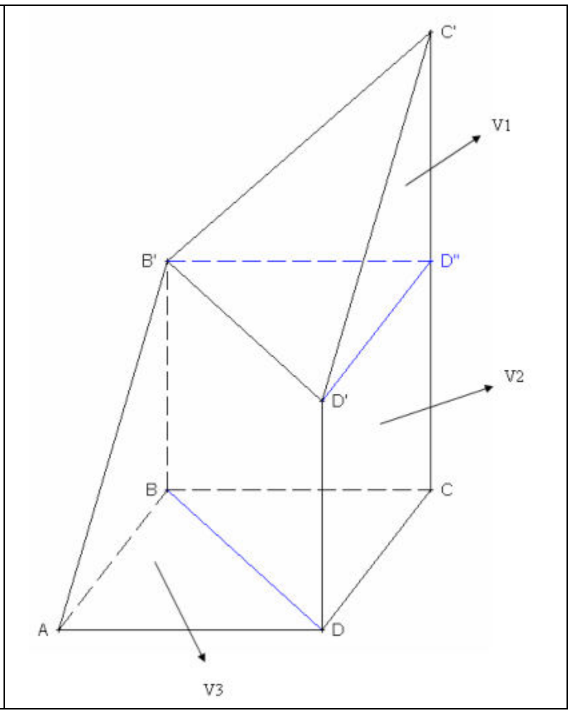
2) $\frac{S_5}{C_1} = \frac{\frac{4\pi}{3}a^3\left(\sqrt{3}\right)^{15}}{8a^3} = \frac{\pi\left(\sqrt{3}\right)^{15}}{6} = \frac{\pi}{2}3^{\frac{13}{2}} \cong 1983$

Ou bien $\frac{V_{S_n}}{V_{C_{n-5}}} = \left(\frac{V_{S_n}}{V_{S_{n-1}}}\right)^4 \frac{V_{S_{n-5}}}{V_{C_{n-5}}} = \left(3\sqrt{3}\right)^4 \frac{\pi\left(\sqrt{3}\right)^3}{6} = \frac{\pi}{2}3^{\frac{13}{2}}$

EXGSE083 - FSA, UCL, Louvain, septembre 2007.

Soit un carré $ABCD$ de côté k. On élève perpendiculairement au plan contenant le carré un segment de longueur L_1 à partir su sommet B, un segment de longueur L_2 à partir de C et un segment de longueur L_1 à partir de D. Les points extrêmes de ces segments sont notés respectivement B', C' et D'. Ils sont situés du même côté du plan contenant le carré.
On demande de calculer le volume du solide dont les 7 faces sont $ABCD$, ABB', $BCC'B'$, $CC'D'D$, ADD', $AB'D'$ et $B'C'D'$ dans le cas où $k = 1$, $L_1 = k$ et $L_2 = 3L_1$

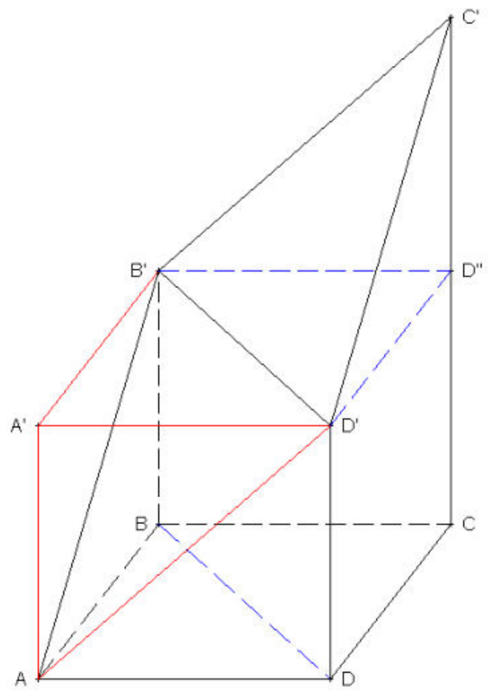




Il suffit de décomposer ce volume en volumes plus simples et bien connus : en l'occurrence un tétraèdre droit, un prisme droit à base triangulaire et un troisième volume laissé de côté pour le moment.

$$V_1 = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{2}|B'D''||D'D''|}_{S}\underbrace{|C'D''|}_{H}$$

$$V_2 = \underbrace{\frac{1}{2}|B'D''||D'D''|}_{S}\underbrace{|CD'|}_{H}$$



Le troisième volume doit être considéré comme le volume du demi cube $ABCDA'B'C'D'$ diminué du volume d'un tétraèdre régulier $AA'B'D'$:

$$V_3 = \underbrace{\frac{1}{2}|B'D''||D'D''|}_{S}\underbrace{|CD''|}_{H} - \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{2}|AA'||A'B'|}_{S}\underbrace{|A'D''|}_{H}$$

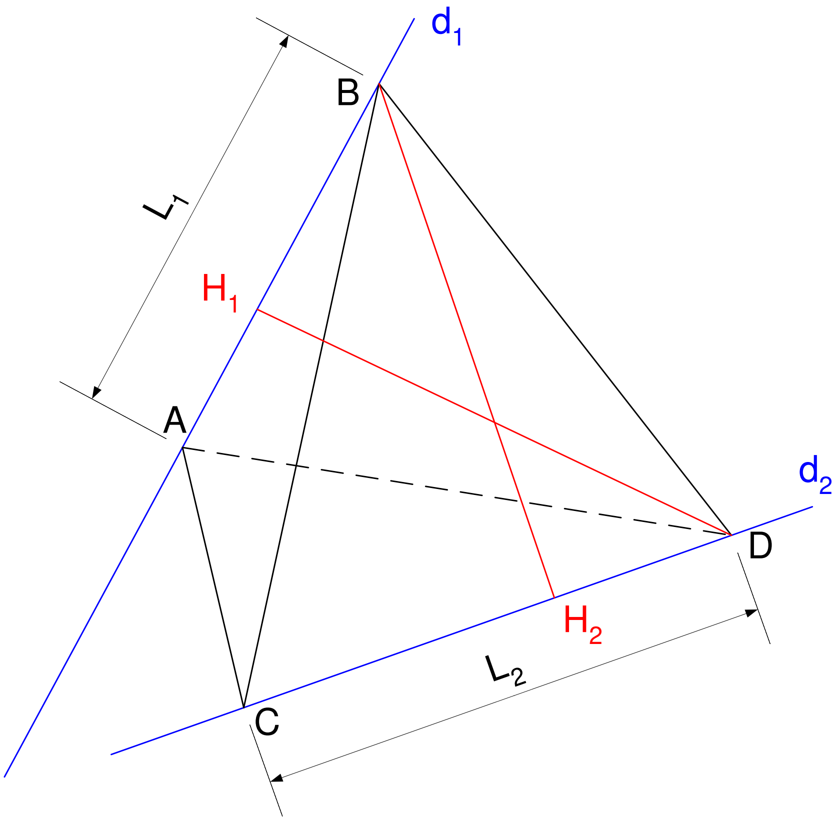
Avec les valeurs données :

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3} \\ V_2 = \dfrac{1}{2} \\ V_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \boxed{V_{TOTAL} = \frac{7}{6}u.v} \qquad u.v = \text{unités de volume}$$

24 septembre 2007

EXGSE084 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2007.

Etant données deux droites gauches d_1 et d_2 dans l'espace euclidien et deux nombres positifs l_1 et l_2, on place un segment $[A,B]$ de longueur l_1 sur d_1, et un segment $[C,D]$ de longueur l_2 sur d_2. Démontrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est indépendant de la position des segments $[A,B]$ et $[C,D]$ sur leurs droites respectives.



Fixons $[C,D]$ sur d_2. Soit DH_1 la hauteur du triangle ADB.

L'aire du triangle ADB est : $A_{ADB} = \dfrac{\overline{AB}.\overline{H_1D}}{2} = \dfrac{l_1.\overline{H_1D}}{2} = \text{constante}$

En effet, ABD défini un plan et dans ce plan, quelque soit la position de $[A,B]$,

$\overline{H_1D}$ est la même.

Chaque position de $[A,B]$ définit un tétraèdre particulier $ABCD$.

Le volume de tous ces tétraèdres $ABCD$ est $V_{ABCD} = \dfrac{A_{ADB}.h_1}{6}$

où h_1 est la longueur de la hauteur issue de C sur le plan ABD. Cette hauteur h_1 est

indépendante de la position de $[A,B]$. Autrement dit : $V_{ABCD} = \dfrac{A_{ADB}.h_1}{6} =$ constante (1)

On refait le même raisonnement.

Fixons $[A,B]$ sur d_1. Ce qui correspond à un tétraèdre $ABCD$ dont le volume est égal à (1)

Soit BH_2 la hauteur du triangle BCD.

L'aire du triangle BCD est : $A_{BCD} = \dfrac{\overline{CD}.\overline{H_2B}}{2} = \dfrac{l_2.\overline{H_2B}}{2} = \text{constante}$

En effet, BCD défini un plan et dans ce plan, quelque soit la position de $[C,D]$,

$\overline{H_2B}$ est la même.

Chaque position de $[C,D]$ définit un tétraèdre particulier $ABCD$.

Le volume de tous ces tétraèdres $ABCD$ est $V_{ABCD} = \dfrac{A_{BCD}.h_2}{6}$

où h_2 est la longueur de la hauteur issue de A sur le plan BCD. Cette hauteur h_2 est

indépendante de la position de $[C,D]$. Autrement dit : $V_{ABCD} = \dfrac{A_{BCD}.h_2}{6} =$ constante (2)

Les valeurs données par les expressions (1) et (2) sont évidemment égales.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est donc indépendant de la position de $[A,B]$ et $[C,D]$

EXGSE085 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2008.

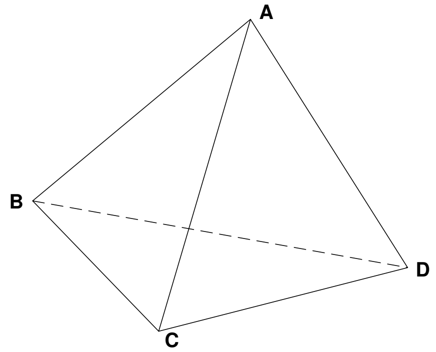
Soit un tétraèdre $ABCD$ de l'espace.

(a) Démontrer les relations

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{DA}\right|^2=2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{DA}\right|^2=2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

(b) En déduire que les arêtes opposées d'un tétraèdre sont orthogonales si et seulement si les sommes des carrés des longueurs de chacune de ses paires d'arêtes opposées sont égales.



$$a) \left| AB \right|^2 + \left| CD \right|^2 - \left| BC \right|^2 - \left| DA \right|^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\rightarrow \left| AB \right|^2 - \left| BC \right|^2 + \left| CD \right|^2 - \left| DA \right|^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\rightarrow \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\rightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\right)\right)=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AC}.\left(\underline{\overrightarrow{AB}}+\underline{\underline{\overrightarrow{CB}}}+\underline{\underline{\overrightarrow{DC}}}+\underline{\overrightarrow{DA}}\right)=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AC}.2\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} \qquad \text{OK}$$

$$\left| AC \right|^2 - \left| DA \right|^2 + \left| BD \right|^2 - \left| BC \right|^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

$$\rightarrow \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

$$\rightarrow \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{DC}.\left(\underline{\overrightarrow{AC}}+\underline{\underline{\overrightarrow{AD}}}+\underline{\underline{\overrightarrow{DB}}}+\underline{\overrightarrow{CB}}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} \qquad \text{OK}$$

$$b) \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0$$

$$\Leftrightarrow \left| AB \right|^2 + \left| CD \right|^2 - \left| BC \right|^2 - \left| DA \right|^2 = 0 \Leftrightarrow \left| AB \right|^2 + \left| CD \right|^2 = \left| BC \right|^2 + \left| DA \right|^2$$

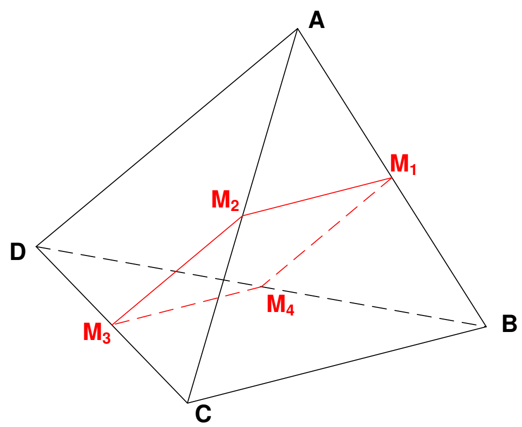
Idem avec $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$

21 juillet 2008

EXGSE086 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2008.

Dans l'espace, on considère un tétraèdre *ABCD* dont les arêtes opposées sont deux à deux de même longueur. Démontrer que les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées sont perpendiculaires deux à deux. (Suggestion : démontrer d'abord qu'elles sont sécantes).

Solution proposée par Frédéric Garcet



M_1 milieu de $[A,B]$

M_2 milieu de $[A,C]$

M_3 milieu de $[C,D]$

M_4 milieu de $[B,D]$

$|AB| = |CD| \qquad |BC| = |AD| \qquad |DB| = |AC|$

$\Delta ABC : M_1M_2 // CB$ et $|M_1M_2| = \frac{1}{2}|BC|$

$\Delta BCD : M_3M_4 // CB$ et $|M_3M_4| = \frac{1}{2}|BC|$

$\Delta ABD : M_1M_4 // AD$ et $|M_1M_4| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|BC|$

$\Delta ACD : M_2M_3 // AD$ et $|M_2M_3| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|BC|$

Au total, $M_1M_2M_3M_4$ est un losange

$\rightarrow$ Ses diagonales M_1M_3 et M_2M_4 sont perpendiculaires CQFD

EXGSE087 - FSA, UCL, Louvain, juillet 2008, série 1.

Soit un cube d'arête c. On choisit un sommet et les 3 arêtes qui lui sont liées.
On fait passer par les points milieux de ces 3 arêtes un plan.
La coupe effectuée par ce plan dans le cube définit un tétraèdre
(tétraèdre = " pyramide à base triangulaire ").
On enlève ce tétraèdre. L'opération est répétée pour chaque sommet. Il en résulte un nouveau solide, appelé solide 1. Le même processus est répété une seconde fois. On choisit un sommet du solide 1 et les arêtes qui lui sont liées. On fait passer par les milieux de ces arêtes un plan. La coupe effectuée par ce plan définit une pyramide. On enlève cette pyramide.
On répète l'opération pour chaque sommet. Il en résulte un nouveau solide, appelé solide 2.
On demande

1. d'exprimer, en fonction de c, le volume du solide 1 ;
2. d'exprimer, en fonction de c, le volume du solide 2.

Solution proposée par Steve Tumson

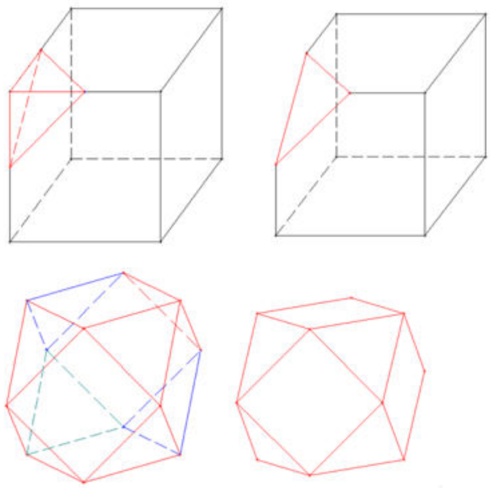
1) Le volume d'un de ces tétraèdres droits est (prenons judicieusement, sur le premier dessin de la première figure, la face latérale gauche du cube pour la base du tétraèdre correspondant):

$$V = \frac{1}{3}(B)(h) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times\frac{c}{2}\times\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^3}{48}$$

Il y a 8 sommets au cube, on enlève donc 8 tétraèdres et puisque ceux-ci ne s'inter-coupent pas, on en déduit :

$$V_1 = c^3 - 8\times\frac{c^3}{48} \Leftrightarrow \boxed{V_1 = \frac{5}{6}c^3}$$

Pour les curieux, ce premier volume est un polyèdre semi-régulier appelé Cuboctaèdre :)



2) Le cuboctaèdre (volume 1) a 14 faces régulières, dont huit sont des triangles équilatéraux et six sont des carrés. Il comporte

- 12 sommets identiques, chacun joignant deux triangles et deux carrés opposés deux à deux
- 24 arrêtes identiques, chacune commune à un triangle et un carré

La taille de chaque arête vaut $a = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$ puisque chacune d'entre elle relie les milieux des côtés du carré de côté c.

Les arêtes de sections coupant les triangles ont pour valeur $\frac{a}{2}$ (par les triangles semblables)

Les arêtes des sections coupant les carrés se calculent par Pythagore (car les triangles sont rectangles) et valent $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

La figure ci-dessus illustre la portion pyramidale enlevée à chaque sommet du cuboctaèdre.
Nous avons tous les éléments nécessaires au calcul de son volume :

$$|MN| = \frac{a}{4} \qquad |HM| = \frac{a}{2\sqrt{2}} \qquad |AN| = a$$

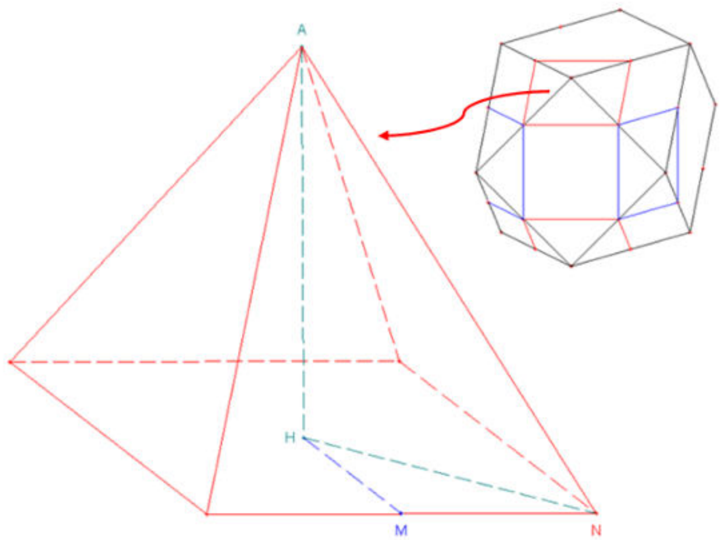
$$\Rightarrow |HN| = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$\Rightarrow |AH| = \sqrt{a^2 - \frac{3}{16}a^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}a$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{13}}{4}a \Leftrightarrow V = \frac{\sqrt{13}}{24\sqrt{2}}a^3 = \frac{\sqrt{13}}{96}c^3$$

Il y a 12 sommets à notre cuboctaèdre, il faut donc retrancher 12 fois le volume trouvé précédemment au volume de premier volume pour trouver le volume final du deuxième solide engendré :

$$V_2 = V_1 - 12 \times \frac{\sqrt{13}}{96}c^3 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = \left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{13}}{8}\right)c^3}$$



23 juillet 2008. (Relu par Benoit Baudelet)

EXGSE088 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2008, série A.

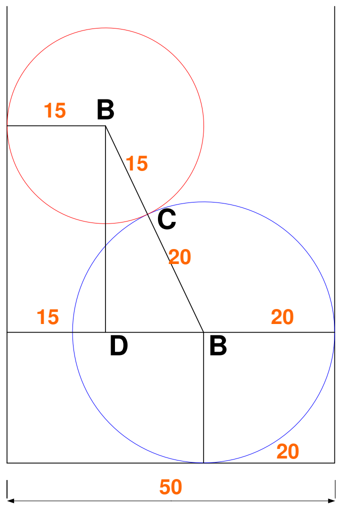
Dans un récipient de forme cylindrique à section horizontale circulaire (Rayon = 25 mm) et de hauteur 70 mm, on introduit d'abord une sphère d'acier de 40 mm de diamètre et ensuite, une autre sphère d'acier de 30 mm de diamètre.

(a) Dans la position où ces 2 sphères touchent la paroi intérieure du récipient, la première par 2 points de contact (l'un sur la base du récipient, l'autre sur la paroi latérale de ce récipient), la seconde par un seul point de contact sur la paroi latérale du récipient (son autre point d'appui étant sur la première sphère) et où ces points de contact sur la paroi latérale du récipient appartiennent à un plan vertical passant par l'axe du cylindre et ne sont pas l'un au-dessus de l'autre, **déterminer à quelle hauteur se situe alors le centre de la seconde sphère par rapport au fond horizontal du récipient.**

(b) Si, une fois les 2 sphères introduites dans le récipient, celui-ci est rempli à ras bord d'eau, **déterminer le volume d'eau qu'il a fallu introduire pour ce remplissage.**

Ce volume d'eau est transvasé dans le récipient cylindrique à partir d'un récipient conique, lui aussi rempli à ras bord. Si la surface du col de ce récipient conique est un cercle d'aire 20 cm^2, **que doit valoir sa hauteur** ?

Solution proposée par Fabienne ZOETARD



La figure représente une coupe selon le plan passant par les deux centres.
Le point de contact C appartient à ce plan. A, B et C sont alignés.

a) $|AD| = 50 - 15 - 20 = 15$ mm

$|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = 35^2 - 15^2 = 1000 \to |BD| = 31.62\ mm$

Hauteur de $B : 20 + 31.62 = 51.62\ mm$

b) $Vol_{eau} = V_{cyl} - V_{sphère\ A} - V_{sphère\ B} = \pi \times 25^2 \times 70 - \frac{4}{3} \times \pi \times 20^3 - \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3$

$= 89797.2\ mm^3$

c) $V_{cône} = \frac{1}{3} h.B = 89797.2\ mm^3 \to h = \frac{3 \times 89797.2}{2000} \simeq 135\ mm$

25 juillet 2008.

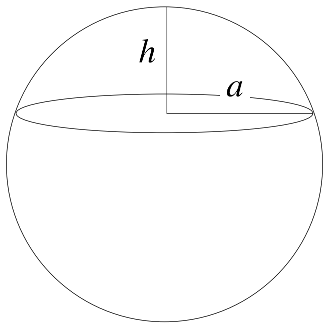
EXGSE089 - FSA, UCL, Louvain, juillet 08, série 2.

Un récipient conique de hauteur H et de génératrice $L = 2H$ est posé sur sa pointe. Ce récipient, creux, dont l'épaisseur est négligeable, est rempli de liquide. Une sphère de rayon r, plus dense que le liquide, est plongée dans ce récipient et coule jusqu'à être bloquée par les parois. Une partie du liquide est donc emprisonnée sous la sphère.

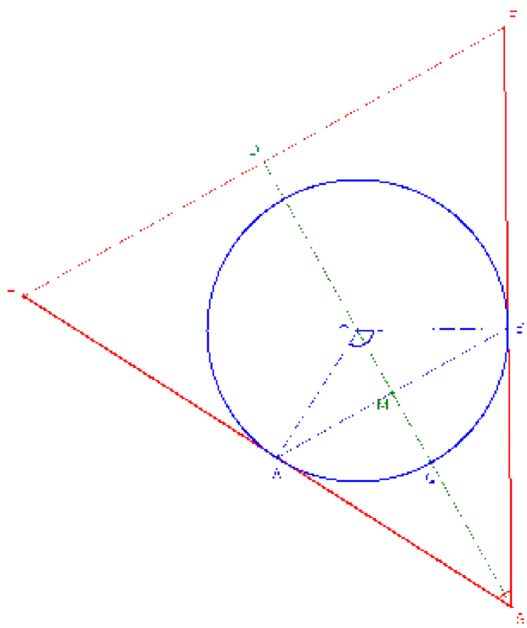
On demande d'exprimer le volume de liquide emprisonné sous la sphère en fonction de r.

Pour vous aidez dans la résolution de cet exercice, sachez que le volume d'une calotte sphérique s'exprime comme :

$$V = \frac{\pi}{6} h\left(3a^2 + h^2\right)$$



Solution proposée par Steve TUMSON



Les deux solides étant de révolution, une coupe définit le problème très clairement : voir figure.

Le volume enfermé est en fait le volume du cône ABS diminué de la calotte sphérique ABQ :

$$V = V_{Cône} - V_{Calotte}$$

Ces deux volumes s'expriment comme suit :

$$V_{Cône} = \frac{\pi}{3}\underbrace{|AM|^2}_{rayon}\underbrace{|MS|}_{hauteur} \qquad V_{Calotte} = \frac{\pi}{6}|MQ|\left(3|AM|^2 + |MQ|^2\right)$$

Vu que dans le plan de coupe, le cercle doit être tangent au triangle, on a les triangles ΔCBS et ΔCAS rectangles respectivement en B et A. Or ils ont deux côtés respectivement de même longueur (rayon du cercle et côté commun). Ces deux triangles sont donc isométriques ! Il en va donc de même pour les triangles ΔAMS et ΔBMS vu qu'ils ont 3 côtés respectivement égaux, et donc de même pour ΔEDS et ΔFDS puisqu'ils sont semblables à ΔAMS et ΔBMS.

On démontre donc ici que le problème est totalement symétrique par rapport à la droite SD : c'est en fait l'axe de révolution du problème ! Le point D est donc le milieu de $\overline{EF}$, et le point M le milieu de $\overline{AB}$.

Ceci étant démontré, la suite est purement calculatoire : Il reste à exprimer les longueurs $|AM|, |MS|$ et $|MQ|$ en fonction de r.

$$*|AM| = |AC|\sin\left(\widehat{ACM}\right) = r\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

$\widehat{C} + \widehat{S} = 180°$ (Somme des angles dans le quadrilatère $ACBS$ comprenant deux angles droits)

$$\cos\left(\frac{\widehat{S}}{2}\right) = \frac{|DS|}{|FS|} = \frac{H}{2H} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\widehat{S}}{2} = 60° \Leftrightarrow \widehat{S} = 120° \Rightarrow \widehat{C} = 60°$$

$$\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{S}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{S}}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{|AM| = \frac{1}{2}r}$$

(Le triangle ΔABC est donc en fait équilatéral !)

$$*\tan\left(\frac{\widehat{S}}{2}\right) = \tan(60°) = \sqrt{3} = \frac{|AM|}{|MS|} \Rightarrow \boxed{|MS| = \frac{1}{2\sqrt{3}}r}$$

$$*|MQ| = |CQ| - |CM| = r - |AC|\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = r - r\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{|MQ| = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r}$$

On peut donc trouver le volume demandé :

$$V_{Cône} = \frac{\pi}{3}|AM|^2|MS| = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}r\right)^2\frac{1}{2\sqrt{3}}r = \frac{\pi r^3}{24\sqrt{3}}$$

$$V_{Calotte} = \frac{\pi}{6}|MQ|\left(3|AM|^2 + |MQ|^2\right) = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r\left(3\left(\frac{1}{2}r\right)^2 + \left(\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r\right)^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r\left(\frac{3r^2}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 r^2\right) = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)r^3 = \frac{\pi}{6}\left(4 - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)r^3$$

$$\Rightarrow \boxed{V = V_{Cône} - V_{Calotte} = \left(\frac{\pi}{24\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\left(4 - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)\right)r^3 \simeq 0{,}0217r^3}$$

30 juillet 2008. (Relu par Benoit Baudelet)