Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 10

EXGSP100 – EXGSP110

http://www.matheux.be.tf

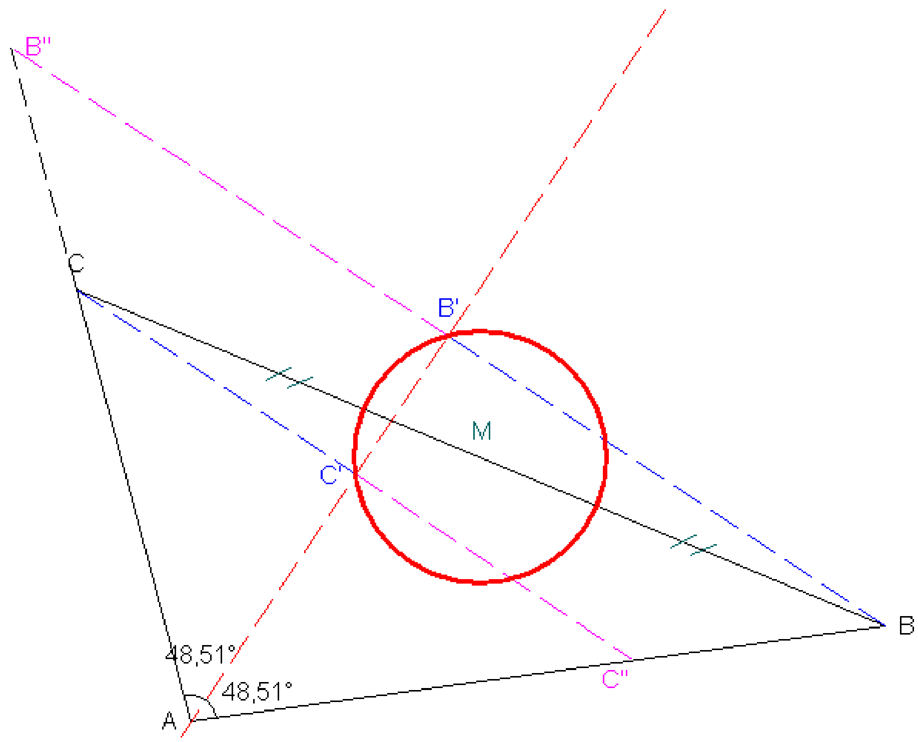
Jacques Collot

Septembre 05

EXGSP100 – Mons, juillet 2003

Soit un triangle *ABC* dont on trace la bissectrice de l'angle *BAC*. On définit les points *B'* et *C'* comme les projections respectives de *B* et *C* sur cette bissectrice. Les points *C''* et *B''* son définis respectivement comme les intersections des droites *BB'* et *CC'* avec les côtés (ou leur prolongement) *AC* et *AB*.

a. Que peut on dire du quadrilatère *BB''CC''* ?
b. Supposons à présent que *BC* soit fixe, *A* étant variable tout en vérifiant que la différence des longueurs des côtés *AB* et *AC* soit constante. Quel est le lieu de *B'* et de *C'* quand *A* varie ?



Tout d'abord, il faut remarquer qu'il y a symétrie complète par rapport à la bissectrice. En effet, les triangles $AC'C$ et $AC'C''$ sont isométriques par construction (un angle droit, un côté commun AC' et un angle égal par définition de la bissectrice) si bien que $C'C'' = C'C$.
Il en est de même pour les triangles $AB'B''$ et $AB'B$, si bien que $B'B'' = B'B$.

a) On déduit immédiatement que le quadrilatère $BB''CC''$ est un trapèze isocèle (deux côtés parallèles CC'' et BB'' car perpendiculaires à la bissectrice et deux côtés latéraux égaux par symétrie).

b) La différence des longueurs des côtés est matérialisée par les segments $B''C$ et BC'', de longueurs égales. Si la différence des longueurs des côtés est constante et vaut par exemple d, la longueur de ces segments est constante, si bien que B'' et C'' décrivent chacun un cercle respectivement de centre C et B et de rayon d. Comme les points B' et C' sont milieux des segments CC'' et BB'' et que B et C sont fixes, ils décrivent tous les deux un cercle de centre M, milieu de BC et de rayon $d/2$.

Le 12 septembre 2005. Steve Tumson

EXGSP101 – Mons, juillet 2003

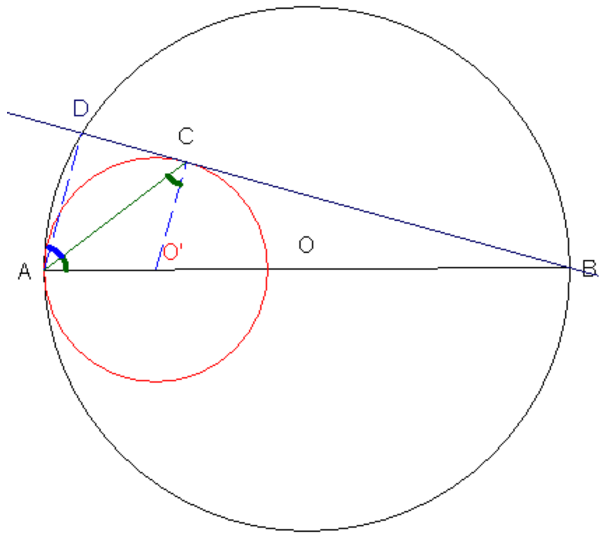
Soit une circonférence de diamètre *AB* et de centre *O*. Soit une seconde circonférence, tangente intérieurement à la première en *A* et de centre *O'*. On mène relativement à la première circonférence une corde *BD* tangente en *C* au plus petit des deux cercles.

a. Démontrer que *AC* est bissectrice de l'angle *BAD*
b. Calculer la longueur du segment *AC* pour les valeurs suivantes : *AB* = 100mm et *O'A* = 20mm

---

a) AD est perpendiculaire à DB puisque AB est diamètre. $O'C$ est perpendiculaire à BD puisque DB est tangent au cercle de centre O'. On en déduit que AD est parallèle à $O'C$, si bien que les angles alternes internes $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACO'}$ sont égaux. Le triangle $AO'C$ est isocèle puisque $O'A$ et $O'C$ sont égaux au rayon. Il s'ensuit que $\widehat{CAO'}$ est égal à $\widehat{ACO'}$.

On a donc $\widehat{DAC} = \widehat{CAO'}$ et AC est bien la bissectrice de $\widehat{DAB}$.



b) Des données, on déduit immédiatement que $O'B$ = 80mm et que $O'C = O'A =$ 20mm (rayon du petit cercle). Il est clair que les triangles DAB et $CO'B$ sont semblables,

on peut donc écrire : $\frac{AD}{AB} = \frac{O'C}{O'B} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} \to \frac{AB}{4} = \frac{100}{4} = 25\ mm$

Dans le triangle rectangle ADB, on peut déduire la longueur du segment BD

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{100^2 - 25^2} = 25\sqrt{16-1} = 25\sqrt{15}\ mm$

Par Thalès entre $AO'B$ et DCB, on peut déterminer la longueur du segment DC

$\frac{DC}{BD} = \frac{AO'}{AB} = \frac{1}{5} \to DC = \frac{25\sqrt{15}}{5} = 5\sqrt{15}\ mm$

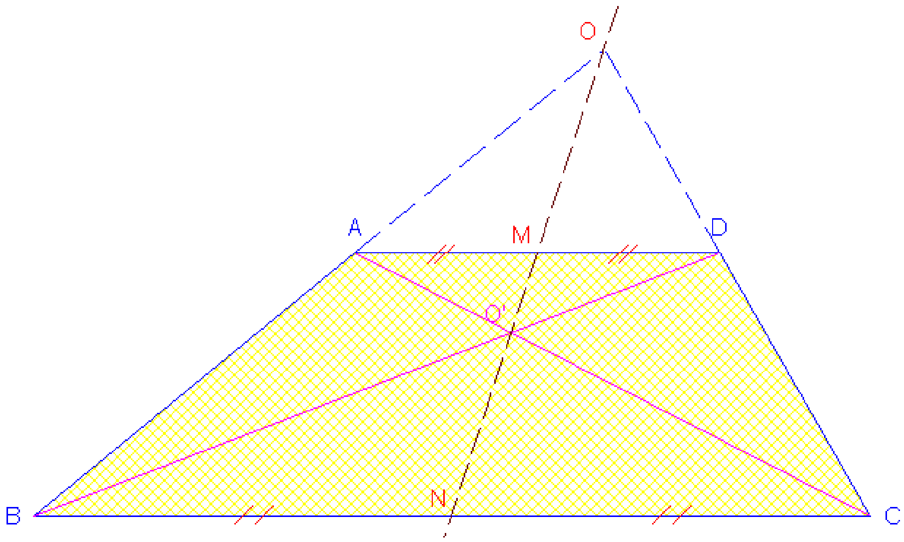
On trouve finalement la longueur de AC dans le triangle rectangle CDA

$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{25^2 + 25\times 15} = \sqrt{25\left(25+15\right)} = 5\sqrt{40} = 10\sqrt{10} = 31.62\ mm$

Le 12 septembre 2005. Steve Tumson

EXGSP102 – Mons, juillet 2003

Soit un trapèze *ABCD*. L'intersection des côtés non parallèles *AB* et *CD* est appelée *O*. L'intersection des diagonales du trapèze est appelée *O'*. Le milieu de *AD* est appelé *M* et le milieu de *BC* est appelé *N*. Montrer que *O, O'*, *M* et *N* sont alignés.



Considérons l'homothétie h de centre O qui envoie A sur B.

De façon évidente on peut aussi écrire $h\,(D) = C$ et $h\,(M) = N$ (car h conserve le milieu) $\rightarrow$ M et N sont donc alignés avec O.

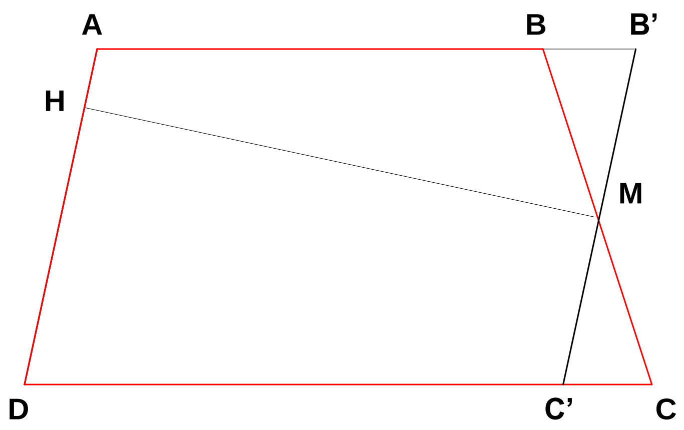
Considérons maintenant l'homothétie h' de centre O' qui envoie A sur C et B sur D.

De façon toute aussi évidente, on peut aussi écrire $h'\,(M) = N$
$\rightarrow$ M et N alignés avec O'
Au final O, O', M et N sont donc alignés.

Le 12 septembre 2005. Steve Tumson

EXGSP103 – Bruxelles, juillet 2005

Soit un quadrilatère convexe dont deux côtés opposés, appelés bases, sont parallèles (trapèze). Montrer que l'aire de ce quadrilatère est égale au produit de la longueur d'un côté qui n'est pas une base, par la distance entre la droite qui porte ce côté et le milieu du côté opposé.



Soit M le milieu de BC.

Traçons par M la parallèle à AD qui rencontre AB en B' et DC en C'.

On obtient ainsi le parallélogramme $AB'C'D$

Abaissons la hauteur MH sur AD.

M est aussi le milieu de $C'B' \rightarrow$ les triangles MBB' et MCC' sont égaux.

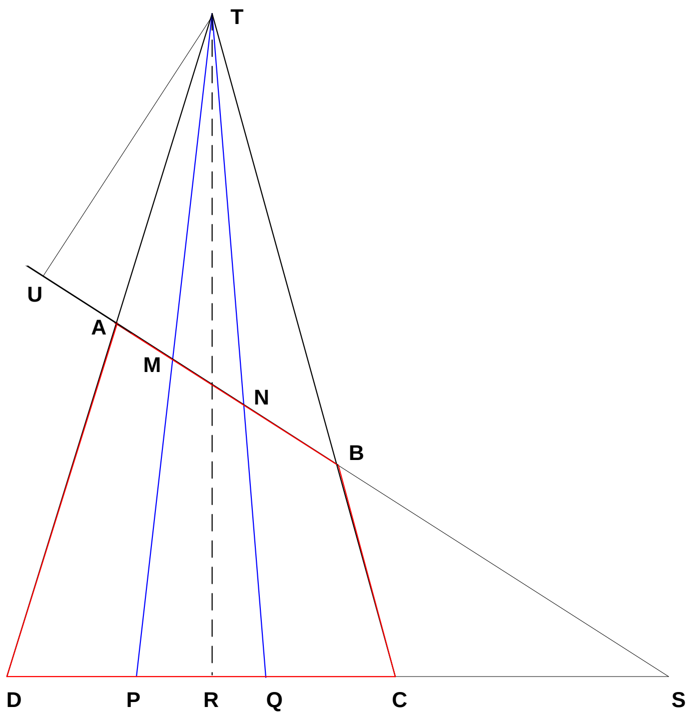
On a alors $A_{ABCD} = A_{AB'C'D}$

Or $A_{AB'C'D} = |MH|.|AD| \rightarrow A_{ABCD} = |MH|.|AD|$

Le 28 février 2006.

EXGSP104 – Bruxelles, septembre 2005

Soit un quadrilatère convexe *ABCD*. On appelle *M* et *N* les points [*A*,*B*] qui partagent ce segment en trois parties égales. De même, *P* et *Q* partagent [*D*,*C*], côté opposé à *AB*, en trois segments égaux. Montrer que la somme des aires des quadrilatères *AMPD* et *BCQN* vaut le double de l'aire du quadrilatère *MNQP*.



DA, PM, QN et CB relient des segments homologues proportionnels.

$\rightarrow$ Les droites DA, PM, QN, CB sont concourantes en un point T.

(C'est la version projective du théorème de Thalès)

Abaissons de T la hauteur TU sur AB et TR sur DC

Les aires des triangles AMT, MNT et NBT sont égales (même hauteur TU et bases égales : $|AM| = |MN| = |NB|$

De même, les aires des triangles DPT, PQT et QCT sont égales (même hauteur TR et bases égales)

On a alors

$$A_{MNPQ} = A_{PQT} - A_{MNT} = \frac{A_{DPT} + A_{QCt}}{2} - \frac{A_{AMT} + A_{NBT}}{2}$$

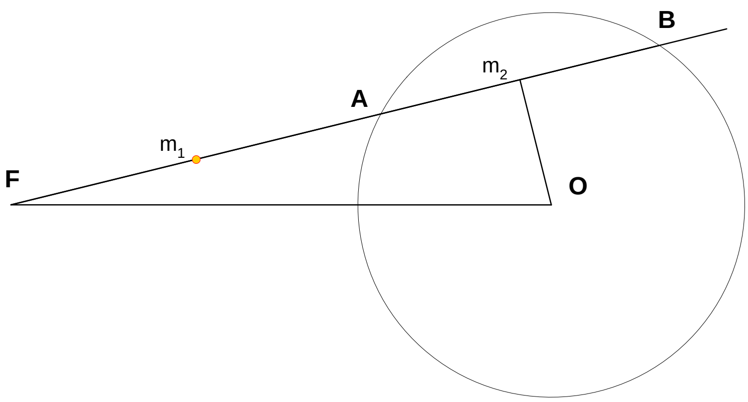
$$= \frac{1}{2}\left[\left(A_{ADP} - A_{AMT}\right) + \left(A_{QCT} - A_{NBT}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(A_{AMPD} + A_{NBQC}\right)$$

Le 12 janvier 2005.

EXGSP105 – Louvain, juillet 2005, première série.

On donne dans le même plan, un point fixe F, et un cercle fixe de centre O et de rayon R. Par F, on mène une droite qui intersecte le cercle en deux points A et B. Cette droite pivote autour du point F. On vous demande :

1. Le lieu du point m_1 milieu du segment AF.
2. Le lieu du point m_2 milieu du segment AB.
3. Un (ou plusieurs) dessin(s) clairs(s) du problème et la représentation précise de chacun des deux lieux (envisagez différents cas si nécessaire et essayez, en vous aidant du compas, de dessiner un maximum sans utiliser les graduations de la latte)



Lieu de m_1

Puisque m_1 est le milieu de FA, m_1 est l'image de A selon l'homothétie de centre F et de rapport 1/2. Comme l'homothétie d'un cercle est un cercle, le lieu de m_1 est un cercle de rayon $R/2$.

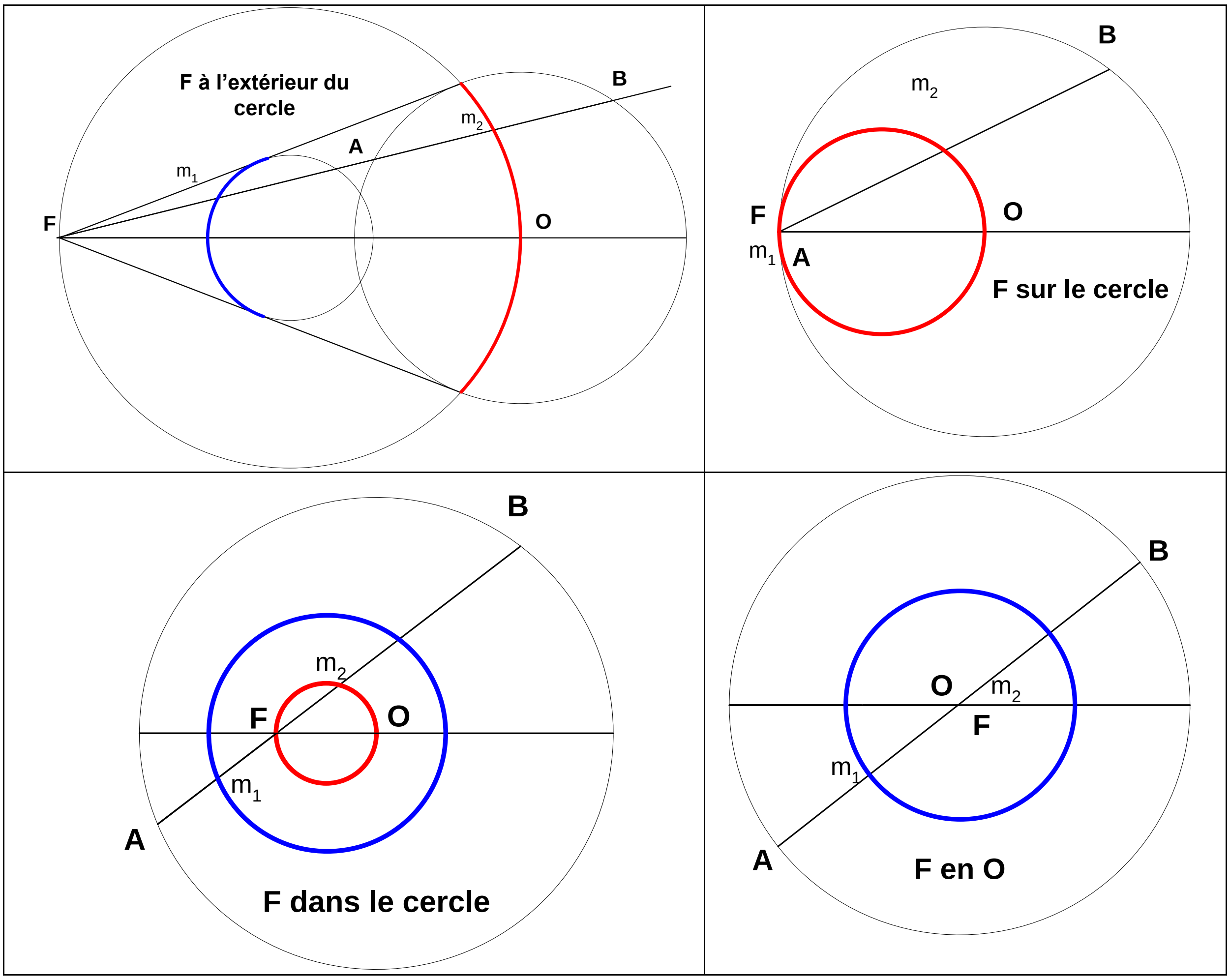
- Si F est à l'extérieur du cercle, seule une portion du cercle est à considérer. Les extrémités de l'arc correspondent aux tangentes au cercle donné issues de F
- Si F est sur le cercle, A est confondu avec F.
- Si F est dans le cercle ou confondu avec O, le lieu est un cercle complet.

Lieu de m_2

Notons que m_2O est perpendiculaire à AB car un rayon qui passe par le milieu d'une corde est perpendiculaire à cette corde.

Le lieu de m_2 est un cercle de diamètre FO.

- Si F est à l'extérieur du cercle, seule une portion du cercle est à considérer. Les extrémités de l'arc correspondent aux tangentes au cercle donné issues de F
- Si F est sur le cercle, le lieu est un cercle complet tangent au cercle donné en F
- Si F est dans le cercle, le lieu est un cercle complet.
- Si F est confondu avec O, m_2 est aussi en O. le lieu se réduit à un point.



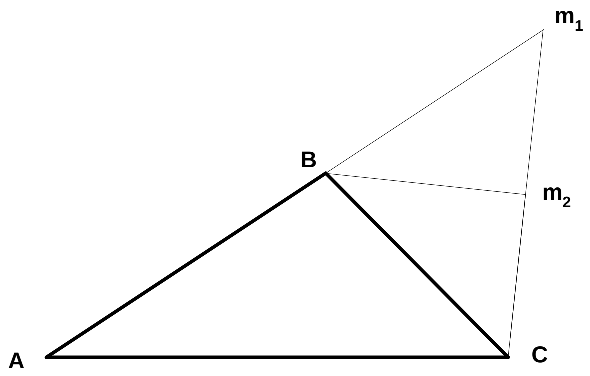
Le 4 avril 2006.

EXGSP106 – Louvain, juillet 2005, deuxième série.

Soit un triangle ABC dont le côté BC est fixe et dont la comme des longueurs des côtés AB et AC est constante : $\overline{AB}+\overline{AC}=k$. On prolonge le côté AB au delà du sommet A et on construit la bissectrice extérieure à l'angle $\hat{A}$ (correspondant au sommet A du triangle). On construit ensuite la perpendiculaire à cette bissectrice abaissée de C. Cette perpendiculaire intersecte le prolongement de AB en m_1 et la bissectrice en m_2. On vous demande

1. de décrire le lieu du point m_1
2. de décrire le lieu du point m_2

Vous veillerez à justifier vos raisonnements, ainsi qu'à construire les données du problème et à représenter précisément chacun des lieux en utilisant au maximum votre compas et votre règle (càd en évitant autant que possible le recours aux graduations de longueur et d'angle.



Si Bm_2 est bissectrice, alors $CBm_2 = m_2Bm_1 \rightarrow$ Les 2 triangles rectangles CBm_2 et m_1Bm_2 sont égaux. Donc

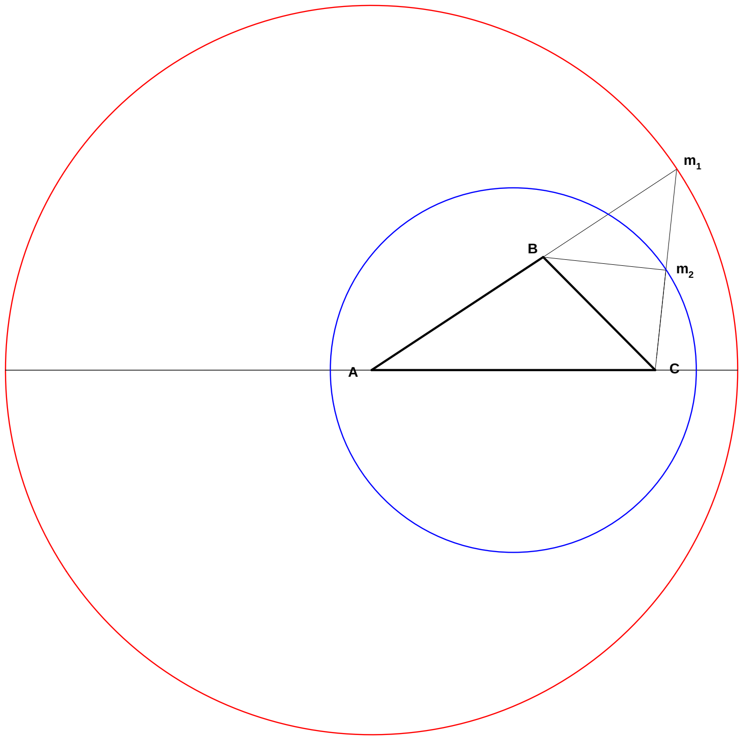
1) $\overline{Bm_1} = \overline{BC} \rightarrow \overline{AB} + \overline{Bm_1} = k \rightarrow$ Le lieu de m_1 est un cercle de centre A et de rayon k

2) $\overline{Cm_2} = \overline{m_2m_1} \rightarrow m_2$ est le milieu de $Cm_1 \rightarrow m_2$ est l'image de m_1 selon l'homothétie de centre C et de rapport 1/2. Comme l'homothétie d'un cercle est un cercle, le lieu de m_2 est un cercle de rayon $k/2$. On détermine facilement le centre de ce cercle en considérant deux positions particulière de m_1 dans le prolongement de AC.

Note

Cet exercice est directement inspiré d'une méthode de contruction d'une ellipse.

B décrit une ellipse de foyers A et C. Bm_2 est la tangente à l'ellipse en B.

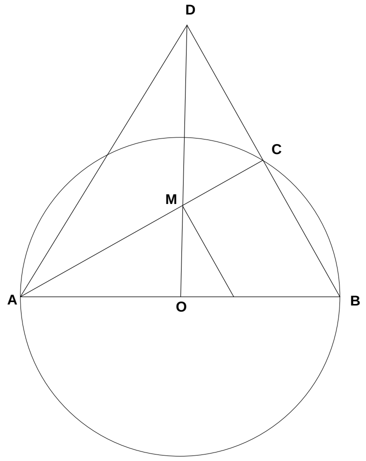


Le 3 mars 06

EXGSP106 – Louvain, septembre 2005.

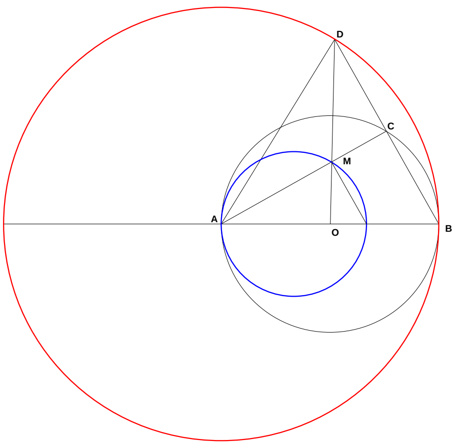
Soit un diamètre fixe AB d'un cercle de centre O, et un point mobile C sur la circonférence de ce cercle. On construit D en prolongeant le segment BC tel que $DC = BC$. On vous demande de déterminer.

1. Le lieu du point D
2. Le lieu du point M, intersection des droites AC et OD.
3. De justifiez votre réponse sur base d'une représentation du problème et d'une représentation précise de chacun des deux lieux. Les dessins seront effectués en utilisant au maximum le compas et la règle (càd sans utiliser les graduations de distance et d'angles).



1) D est l'image de C selon l'homothétie de centre B et de rapport 2. Comme C se déplace sur un cercle, le lieu de D est un cercle de rayon $= |AB| = 2R$ et de centre A

2) AC et DO sont deux médianes du triangle ADB. Donc, M est l'image de D selon l'homthétie de centre O et de rapport 1/3. Le rayon de ce cercle vaut donc 3/2 R.
Le diamètre du lieu se détermine facilement puisque si D est dans le prolongement de AB du côté A, alors M est en A, et si D est en B alors M est au tiers de OB.

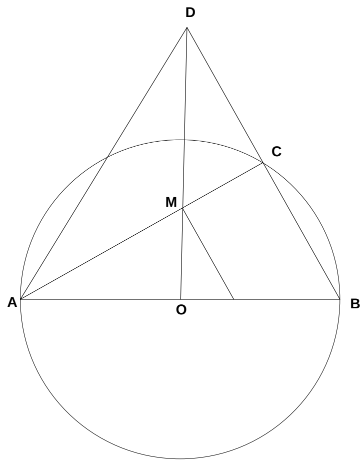


Le 3 mars 06

EXGSP107 – Louvain, septembre 2005.

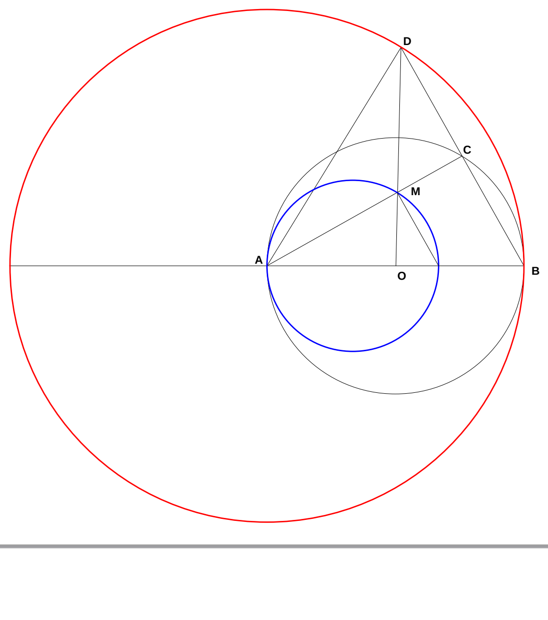
Soit un diamètre fixe AB d'un cercle de centre O, et un point mobile C sur la circonférence de ce cercle. On construit D en prolongeant le segment BC tel que $DC = BC$. On vous demande de déterminer.

4. Le lieu du point D
5. Le lieu du point M, intersection des droites AC et OD.
6. De justifiez votre réponse sur base d'une représentation du problème et d'une représentation précise de chacun des deux lieux. Les dessins seront effectués en utilisant au maximum le compas et la règle (càd sans utiliser les graduations de distance et d'angles).



1) D est l'image de C selon l'homothétie de centre B et de rapport 2. Comme C se déplace sur un cercle, le lieu de D est un cercle de rayon = $|AB| = 2R$ et de centre A

2) AC et DO sont deux médianes du triangle ADB. Donc, M est l'image de D selon l'homthétie de centre O et de rapport 1/3. Le rayon de ce cercle vaut donc $2R/3$.
Le diamètre du lieu se détermine facilement puisque si D est dans le prolongement de AB du côté A, alors M est en A, et si D est en B alors M est au tiers de OB.



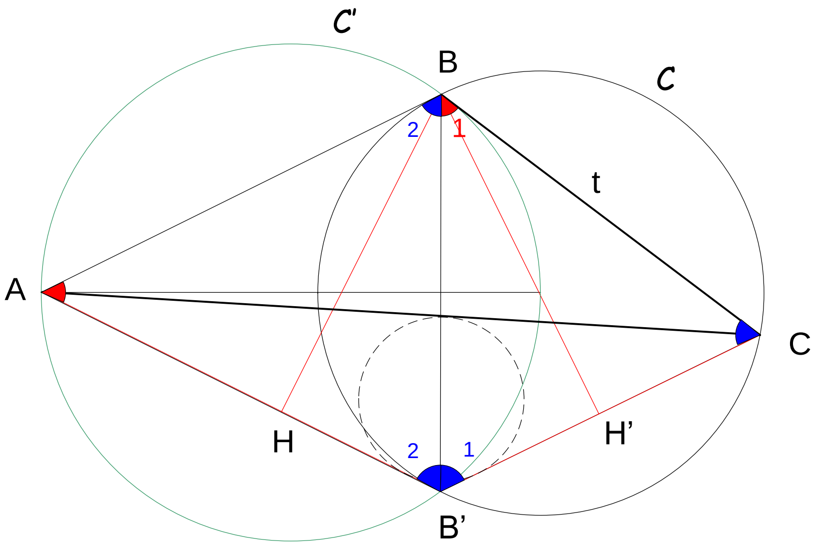
Le 3 mars 06

EXGSP108 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2006.

Par un point *A* extérieur à un cercle $\mathcal{C}$, on mène les tangentes à celui-ci, qui rencontrent $\mathcal{C}$ aux deux points *B* et *B*'.

Soient $\mathcal{C}$' le cercle circonscrit au triangle *ABB*' et *t* la tangente à $\mathcal{C}$' issue de *B* et en un deuxième point $\mathcal{C}$.

- Démontrer que le triangle *CBB*' est isocèle.
- Démontrer que les hauteurs issues de *B* dans les triangles *AB*'*C* et *CBB*' ont la même longueur.
- Démontrer que le centre du cercle inscrit au triangle *AB*'*C* est situé sur la droite *BB*'.



On repère immédiatement une série d'angles égaux :

- $B_1 = A$ Car un angle tangentiel et un angle inscrit qui interceptent le même arc
- $B_2 = B'_2$ Car deux angles inscrits qui interceptent des arcs égaux. En effet, les tangentes AB et AB' ont même longueur.
- $\widehat{B_2} = \widehat{C}$ Car un angle tangentiel et un angle inscrit qui interceptent le même arc

On en déduit

$$\begin{cases} \Delta ABB' : \widehat{A} + \widehat{B_2} + \widehat{B'_2} = 180° & (1) \\ \Delta CBB' : \widehat{C} + \widehat{B_1} + \widehat{B'_1} = 180° & (2) \end{cases} \rightarrow (1)-(2) \rightarrow \widehat{B'_2} - \widehat{B'_1} = 0 \rightarrow \widehat{B'_2} = \widehat{B'_1} = \widehat{B_2} = \widehat{C}$$

Autrement dit :

* Le triangle CBB' est isocèle

* BB' est bissectrice de l'angle $\widehat{AB'C}$. Donc, le centre du cercle inscrit au triangle $AB'C$ se trouve sur BB'

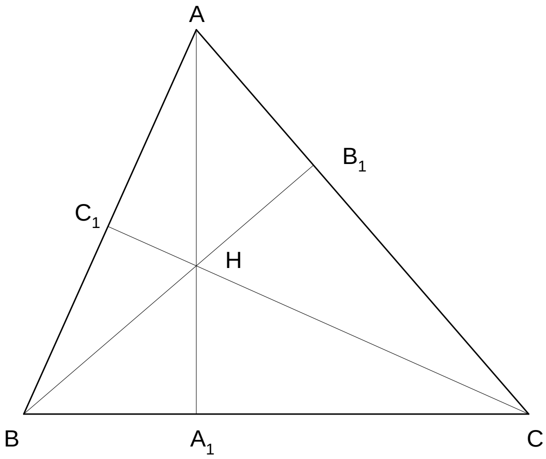
Pour démontrer que les hauteurs sont égales, il suffit de remarquer que les deux triangles rectangles BHB' et $BH'B'$ ont l'hypoténuse commune et un angle égal. Ils sont donc égaux $\rightarrow |BH| = |BH'|$

Le 12,juillet 06

EXGSP109 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2006.

Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note respectivement A_1, B_1, et C_1 les pieds des hauteurs issues de A, B et C. On note $\left| \overrightarrow{XY} \right|$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{XY}$. Démontrer la relation :

$$\frac{1}{2}\left(\left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 \right) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1}$$



Partons du deuxième membre :

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1}$$
$$= \left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1H} \right).\overrightarrow{AA_1} + \left(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1H} \right).\overrightarrow{BB_1} + \left(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1H} \right).\overrightarrow{CC_1}$$
$$= \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{A_1H}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}^2 + \overrightarrow{B_1H}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}^2 + \overrightarrow{C_1H}.\overrightarrow{CC_1}$$

Or par Pythagore, on a : $\overrightarrow{AA_1}^2 = \left| \overrightarrow{AA_1} \right|^2 = \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 - \left| \overrightarrow{BA_1} \right|^2$

$$= \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 - \left| \overrightarrow{BH} \right|^2 + \left| \overrightarrow{HA_1} \right|^2 = \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 - \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{HA_1}^2$$

De même : $\overrightarrow{BB_1}^2 = \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 - \overrightarrow{CH}^2 + \overrightarrow{HB_1}^2$ et $\overrightarrow{CC_1}^2 = \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 - \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HC_1}^2$

On remplace et on réarrange :

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1}$$
$$= \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 - \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{HA_1}^2 + \overrightarrow{A_1H}.\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{CH}^2 + \overrightarrow{HB_1}^2 + \overrightarrow{B_1H}.\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HC_1}^2 + \overrightarrow{C_1H}.\overrightarrow{CC_1}$$
$$= \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 - \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{HA_1}\left(\overrightarrow{HA_1} + .\overrightarrow{A_1A} \right) - \overrightarrow{CH}^2 + \overrightarrow{HB_1}\left(\overrightarrow{HB_1} + .\overrightarrow{B_1B} \right) - \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HC_1}\left(\overrightarrow{HC_1} + .\overrightarrow{CC_1} \right)$$
$$= \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 - \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{CH}^2 + \overrightarrow{HB_1}\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HC_1}.\overrightarrow{HC}$$
$$= \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 - \overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB_1} \right) - \overrightarrow{BH}.\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HB_1} \right) - \overrightarrow{CH}.\left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CB_1} \right)$$
$$= \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 - \left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1} \right)$$

Et donc

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + \left| \overrightarrow{BC} \right|^2 + \left| \overrightarrow{CA} \right|^2 \right)$$

Le 12,juillet 06