Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 11

EXGSP110 – EXGSP119

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 08

EXGSP110 – FACSA, ULiège, Liège – Septembre 2006

Soit un cercle C de centre O et une corde c de ce cercle. Deux droites d_1 et d_2 sécantes à c rencontrent celle-ci en son milieu M. La droite d_1 rencontre C en deux points A_1 et B_1 ; la droite d_2 rencontre C en A_2 et B_2.

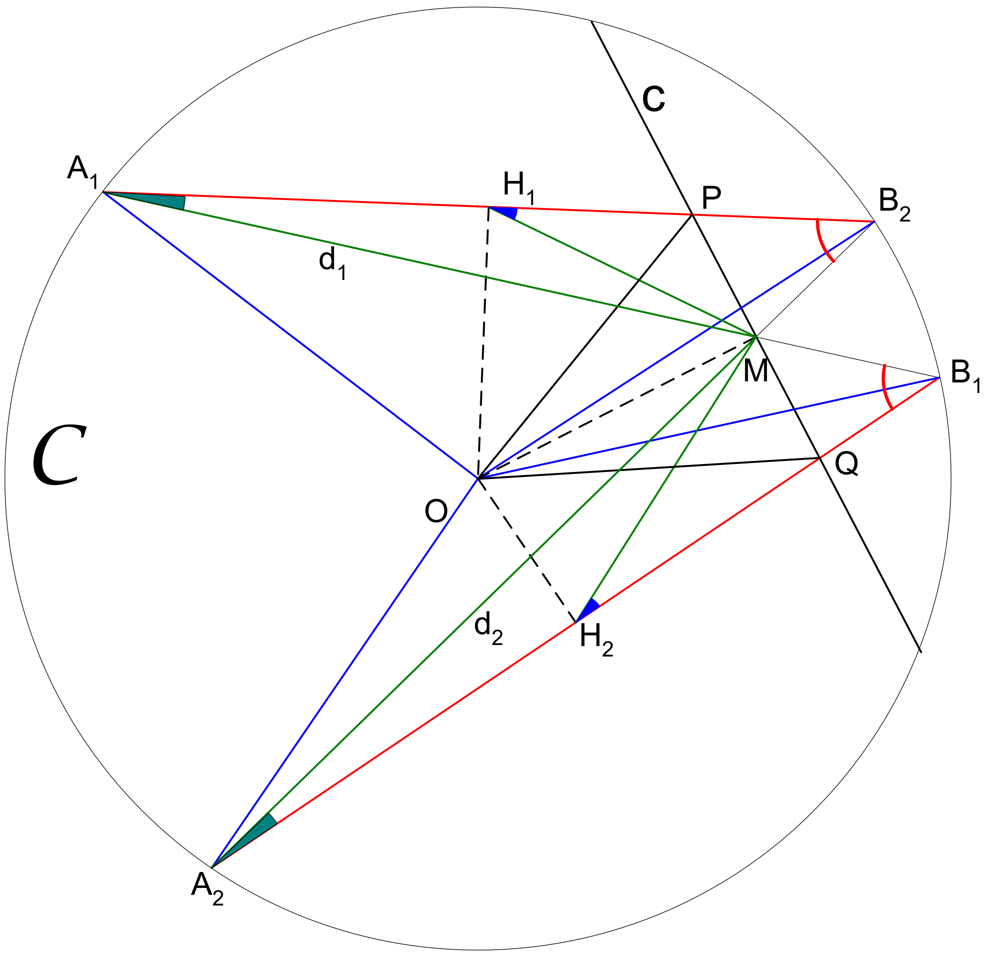
On note P l'intersection de c et de la droite A_1B_2, et Q l'intersection de c et de A_2B_1.

Le pied de la hauteur issue de O du triangle OA_1B_2 $\left(\text{resp. } OA_2B_1\right)$ est noté H_1 $\left(\text{resp. } H_2\right)$.

a) Démontrer que les triangles A_1H_1M et A_2H_2M sont semblables

b) Démontrer que les angles $\widehat{PH_1M}$, $\widehat{POM}$, $\widehat{MOQ}$, et $\widehat{MH_2Q}$ sont égaux.

c) En déduire que M est le milieu du segment $\left|P,Q\right|$



$a)\begin{cases} \widehat{B_2A_1M} = \widehat{MA_2B_1} & \text{car angles inscrits qui interceptent le même arc} \\ \widehat{A_1B_2M} = \widehat{MB_1A_2} & \text{pour la même raison.} \end{cases}$

Les triangles A_1MB_2 et A_2MB_1 sont donc semblables et on a les rapports

$$\frac{|A_1M|}{|A_2M|} = \frac{|A_1B_2|}{|A_2B_1|} \qquad (1)$$

D'autre part OH_1 étant un rayon perpendiculaire à la corde A_1B_2, H_1 est le milieu du segment $|A_1B_2|$. De même, H_2 est le milieu du segment $|A_2B_1|$

$$\rightarrow \frac{|A_1B_2|}{|A_2B_1|} = \frac{2|A_1H_1|}{2|A_2H_2|} = \frac{|A_1H_1|}{|A_2H_2|}$$

La relation (1) devient $\dfrac{|A_1M|}{|A_2M|} = \dfrac{|A_1H_1|}{|A_2H_2|}$

On constate alors que les triangles A_1H_1M et A_2H_2M ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. Ils sont donc semblables

$b)$ OM est un rayon qui coupe la corde c en son milieu. Par conséquent, OM est perpendiculaire à PQ

Considérons maintenant le quadrilatère PH_1OM. Il possédent deux angles droits opposés.

Les points P, H_1, O, M sont donc cocyliques. On en déduit que les angles $\widehat{PH_1M}$ et $\widehat{QH_2M}$ sont égaux.

On démontre de la même façon que les angles $\widehat{MOQ}$ et $\widehat{MH_2Q}$ sont égaux.

Il reste à démontrer que $\widehat{PH_1M} = \widehat{MH_2Q}$, ce qui est immédiat puisque ce sont des angles extérieurs des triangles A_1MB_2 et A_2MB_1 qui sont semblables : $\left(\widehat{PH_1M} = \widehat{H_1A_1M} + \widehat{A_1MH_1}\right)$

Conclusion : $\widehat{PH_1M} = \widehat{POM} = \widehat{MOQ} = \widehat{MH_2Q}$

$c)$ Les triangles rectangles POM et QOM ont l'hypoténuse commune et un angle égal : ils sont donc isométriques et par conséquent : $|MP| = |MQ|$

Ce qui signifie que M est le milieu du segment $|MPQ|$

Le 24 décembre 2006

EXGSP111 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2006 série 1.

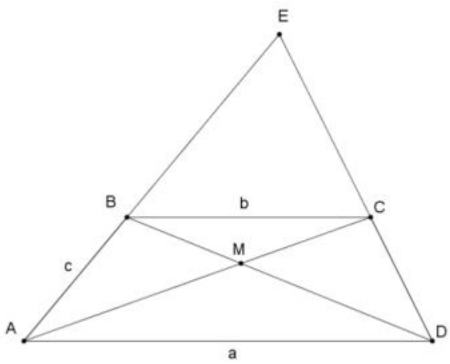
Dans un trapèze $ABCD$, la base AD, de longueur constante a, est fixe et la base BC, parallèle à AD, a une longueur constante b. Le point B est à une distance constante c du point A. On appelle E le point de concours des droites AB et CD et M le point de concours des diagonales du trapèze. On demande

a) de dessiner proprement et rigoureusement $\left(\text{ex. dessin des parallèles}\right)$ les données du problème;

b) de déterminer le lieu du point E lorsque l'on varie la position du segment BC, d'expliquer votre démarche et de construire graphiquement le lieu de E;

c) de faire de même pour le lieu du point M.

Solution proposée par Dominique Druez



b) AED et BEC sont semblables.

$$\frac{c+\overline{BE}}{a} = \frac{\overline{BE}}{b} \Longrightarrow bc + b\overline{BE} = a\overline{BE} \Longrightarrow \overline{BE} = \frac{bc}{a-b} = cte$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = c + \frac{bc}{a-b} = \frac{ac-bc+bc}{a-b} = \frac{ac}{a-b} = cte$$

Le lieu de E est le cercle de rayon $\frac{ac}{a-b}$ et de centre C_E=A

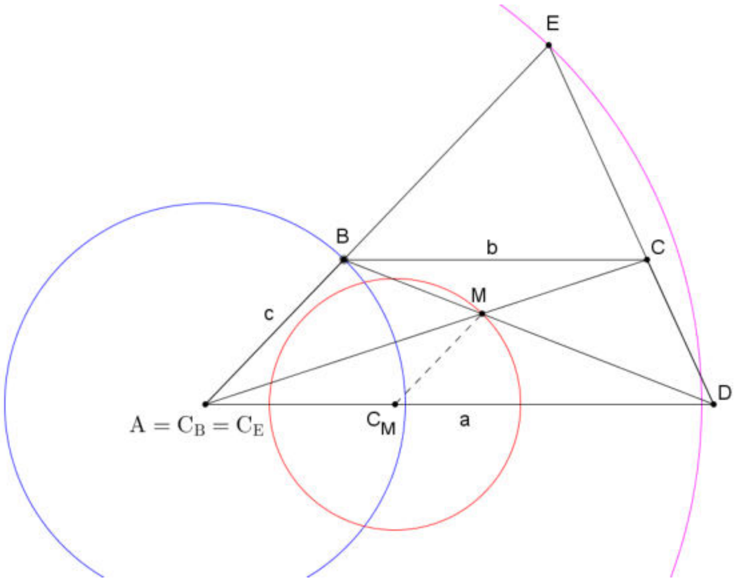
c) AMD et CMB sont semblables.

$$\frac{\overline{DM}}{a} = \frac{\overline{MB}}{b} \Longrightarrow \overline{MB} = \frac{b\overline{DM}}{a}$$

$$\overline{DB} = \overline{DM} + \overline{MB} = \overline{DM} + \frac{b\overline{DM}}{a} = \frac{a+b}{a}\overline{DM}$$

$$\overline{DM} = \frac{a}{a+b}\overline{DB}$$

Le lieu des points B étant un cercle de centre C_B=A et de rayon c, Le lieu des points M est donc une homothétie de centre D et de rapport $\frac{a}{a+b}$ du lieu des points B. Le rayon est égal à $\frac{ac}{a+b}$. Le centre C_M est trouvé en en abaissant la parallèle à la droite AE par le point M sur la droite AD (Thalès, conservation des rapports homothétiques, C_M est l'image homothétique de C_B).



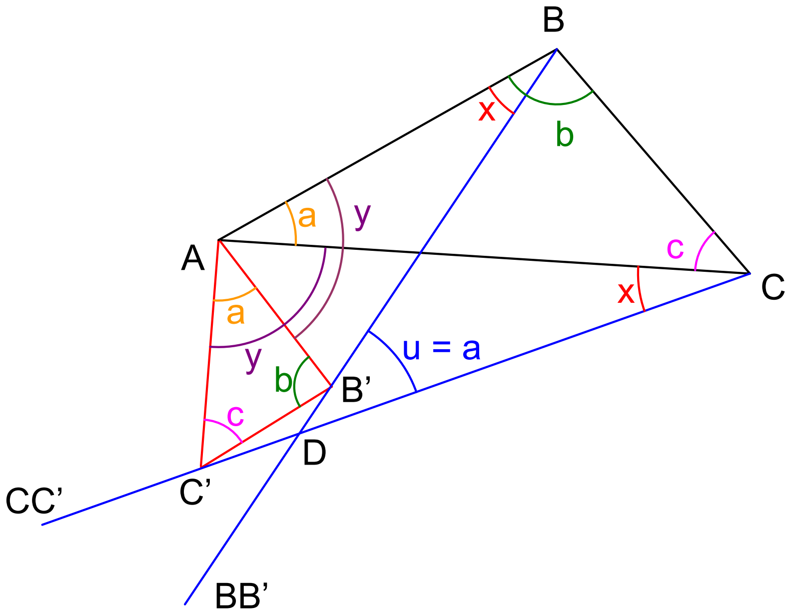
Le 5 juillet 2007. Modifié le 14 octobre 2013 (Dominique Druez)

EXGSP112 – Louvain, série 2 –juillet 2006

On donne un triangle *ABC* fixé. On considère un second triangle *AB'C'*, semblable à *ABC*, et ayant le sommet *A* en commun. Le point *D* est l'intersection entre les droites *CC'* et *BB'*.

On demande :

(1) de dessiner proprement et rigoureusement les données du problème ;
(2) de démontrer que les triangles *AB'B* et *AC'C* sont semblables ;
(3) de déterminer le lieu du point *D* lorsque l'on varie la position de *C'* et *B'* (aidez-vous de la propriété démontrée en (2)), d'expliquer votre démarche et de construire le lieu de *D*.



Solution proposée par Marc Decoux

1) Les triangles ABC et $AB'C'$ sont semblables car les angles correspondants a,b et c sont égaux 2 à 2.

Les droites BB' et CC' se coupent au point D.

2) D'une part, puisque ABC et $AB'C'$ sont semblables :

$$\rightarrow \frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{|AC|}{|AC'|} \rightarrow \frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

D'autre part, les angles $\widehat{BAB'}$ et $\widehat{CAC'}$ (les angles y sur le dessin) sont égaux car $\widehat{BAB'} = \widehat{CAC'} = a + \widehat{CAB'}$.

Les deux triangles $AB'B$ et $AC'C$ sont donc semblables (chacun possédant un angle identique adjacent à deux côtés homologues proportionnels).

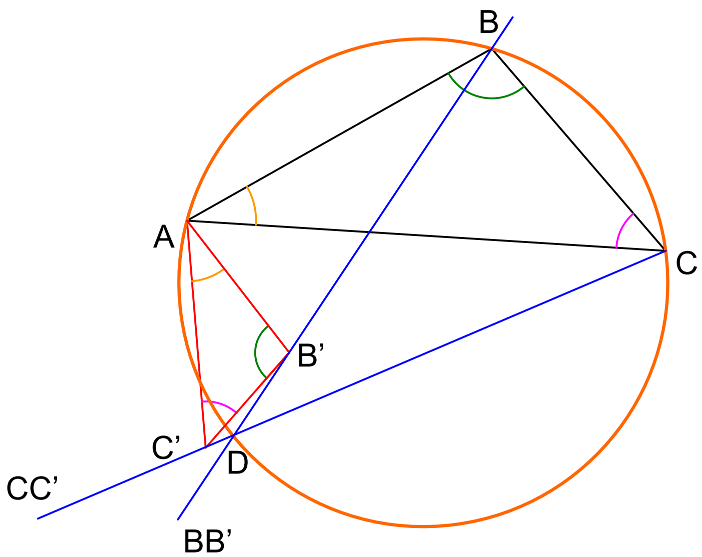
3) Les deux triangles $AB'B$ et $AC'C$ étant semblables, les angles $\widehat{ABB''}$ et $\widehat{ACC'}$ (les angles x sur le dessin) sont égaux.

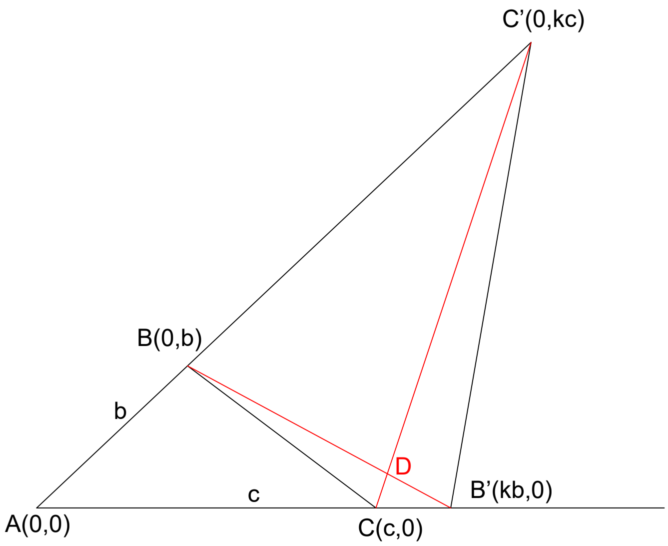
Soit u l'angle en D dans le triangle BDC.

On a : $u = 180° - (b - x) - (c + x) = 180° - b + x - c - x = 180° - b - c = a$

Le point D appartient donc à l'arc capable de l'angle a sur $[BC]$

Comme A fait partie de cet arc capable et que A est fixe et fait partie du triangle $AB'C'$, le lieu cherché est le cercle circonscrit au triangle ABC





Il faut mettre C' sur AB et B' sur BC, sinon $B'C'$ sera parallèle à BC et l'intersection D de CC' et BB' sera confondue avec le sommet A

Les triangles $AB'C$ et $AC'C$ sont semblables puisqu'ils ont un angle commun $\widehat{A}$ compris entre 2 côtés proportionnels : $\dfrac{AB'}{AB}=k$ et $\dfrac{AC'}{AC}=k$.

Dans le repère : $Ox \equiv AC$ et $Oy \equiv AB$, les équations des droites BB' et CC' sont :

$$BB' \equiv \frac{x}{kb}+\frac{y}{b}=1 \rightarrow x+ky=kb \qquad (1)$$

$$CC' \equiv \frac{x}{c}+\frac{y}{kc}=1 \rightarrow kx+y=kc \qquad (2)$$

Le lieu de D s'obtient en éliminant k entre (1) et (2)

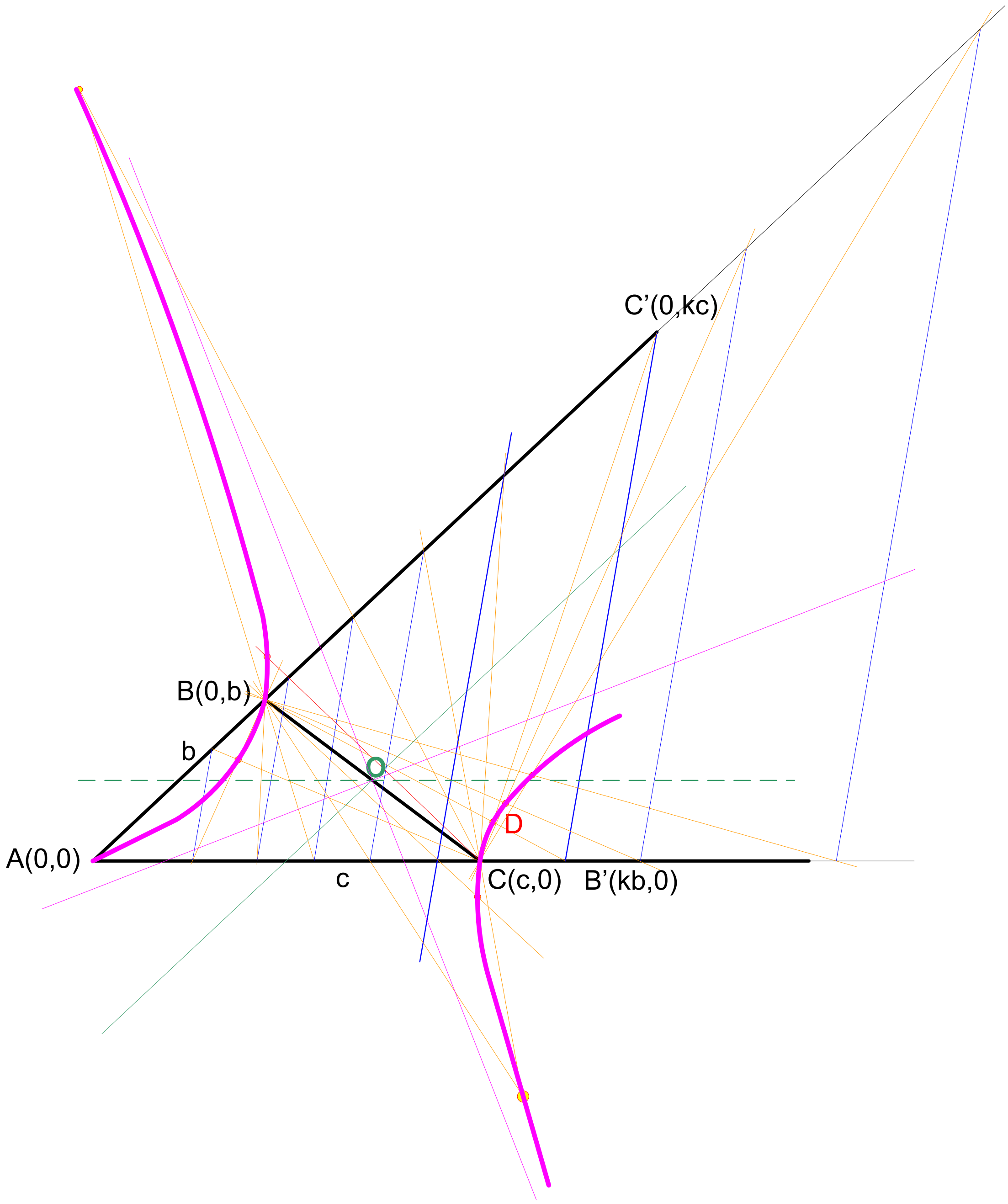
$$\rightarrow k=\frac{x}{b-y}=\frac{y}{c-x} \rightarrow x(c-x)=y(b-y) \rightarrow x^2-y^2-cx+by=0$$

C'est une conique qui passe par $A(0,0)$, $B(0,b)$ et $C(c,0)$.

Réduisons la :

$$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\left(y-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}=0 \rightarrow \boxed{\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{b^2-c^2}{4}}-\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{b^2-c^2}{4}}=1}$$

C'est donc une hyperbole équilatère de centre $O\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{b}{2}\right)$



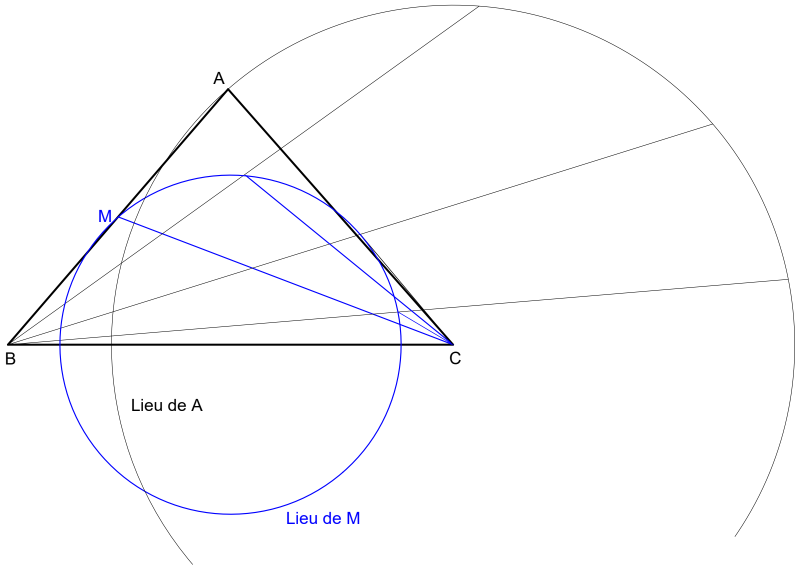
Le 5 juillet 2007

EXGSP113 – Louvain, septembre 2006

Soit un triangle ABC de base BC fixe. On demande le lieu du pied de la médiane partant du sommet C:

a) dans le cas où le côté AC a une longueur constante;
b) dans le cas où l'angle en A est constant.

Vous expliquerez votre démarche au moyen d'un ou plusieurs dessins clairs et rigoureux reprenant les données du problème et les lieux trouvés.

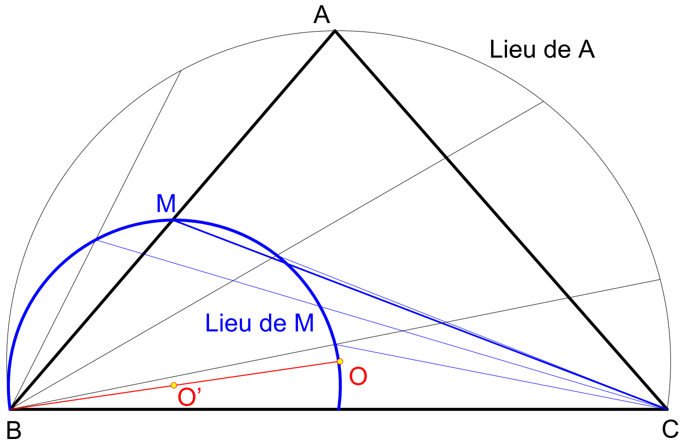


a) Si M est la pied de la médiane, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$

M est donc l'image de A selon l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$

Comme A se déplace sur un cercle de centre C et de rayon AC, le lieu de M

aussi un cercle. Ce cercle est de rayon égal à $\dfrac{AC}{2}$ et son centre est le milieu de BC



2) Si l'angle A est constant alors, le sommet A se déplace sur l'arc capable de centre O de l'angle A.

Le rapport $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. Donc M est l'image de A selon l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme M se déplace sur un cercle, le lieu de M est aussi un cercle. Ce cercle est de rayon égal à la moitié du rayon de l'arc capable de $\widehat{A}$ et son centre O' est le milieu de BO

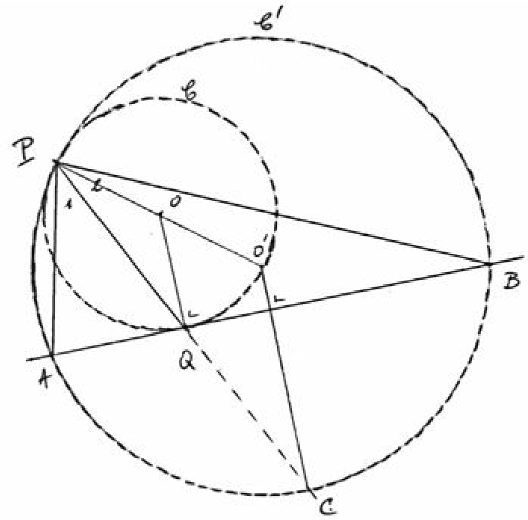
Le 5 juillet 2007

EXGSP114 – Liège, juillet 2007

Soit un cercle C tangent intérieurement à un autre cercle C'. Le point de tangence étant *P*. Par un point *Q* de C, on mène une tangente à C qui rencontre C' en deux points *A* et *B*.

Démontrer que la droite *PQ* est la bissectrice d'un des angles formés par les droites *PA* et *PB*.

Méthode proposée par Francis HOMERIN



Les points $P,\ O,\ O'$ sont alignés.

Par l'homothétie de centre P et de rapport $\dfrac{|PO'|}{|PO|}$, le cercle C a pour image le cercle C';

le point O a pour image le point O' et le point Q a pour image le point C.

Le segment $[OQ]$ est perpendiculaire à la tangente AB car toute tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.

De même, l'image $O'C$ de OQ est perpendiculaire à AB.

$O'C$ est un rayon perpendiculaire à une corde AB du cercle C', elle coupe la corde et l'arc sous-tendu en deux parties égales et C est le milieu de l'arc AB.

Ainsi, PC partage l'arc AB en deux parties isométriques et les angles inscrits APC et CPB ont même amplitude.

PQ est bien la bissectrice de l'angle formé par les droites PA et PB.

Remarque : le point O' n'appartient pas au cercle C !

Les points P, O, O' sont alignés.

Par l'homothétie de centre P et de rapport $\dfrac{|PO'|}{|PO|}$, le cercle C a pour image le cercle C' ;

le point O a pour image le point O' et le point Q a pour image le point C.

Le segment [OQ] est perpendiculaire à la tangente AB car toute tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.

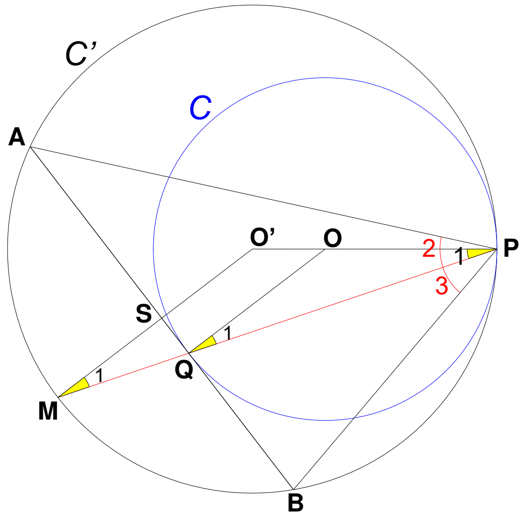
De même, l'image O'C de OQ est perpendiculaire à AB.

O'C est un rayon perpendiculaire à une corde AB du cercle C', elle coupe la corde et l'arc sous-tendu en deux parties égales et C est le milieu de l'arc AB.

Ainsi, PC partage l'arc AB en deux parties isométriques et les angles inscrits APC et CPB ont même amplitude.

PQ est bien la bissectrice de l'angle formé par les droites PA et PB.

Remarque : le point O' n'appartient pas au cercle C !



Dans le cercle C, le triangle OPQ est isocèle car les rayons OP et OQ sont égaux

$\rightarrow \widehat{Q_1} = \widehat{P_1}$ $\qquad (1)$

Par O' centre du cercle C', traçons la parallèle à OQ qui coupe AB en S et QP en M. Comme OQ est perpendiculaire à AB, puisque AB est une tangente, alors $O'S$ est aussi perpendiculaire à AB qui est aussi une corde de C'. Par conséquent, S est le milieu de AB.

$\rightarrow |AS| = |SB|$ $\qquad (2)$

$\widehat{M_1} = \widehat{Q_1}$ puisque ce sont des angles correspondants.

$\rightarrow$ En vertu de (1): $\widehat{M_1} = \widehat{P_1} \rightarrow$ Donc, le triangle $O'MP$ est isocèle

$\rightarrow |O'P| = |O'M|$. Autrement dit, $O'M$ est un rayon du cercle C' et M est situé sur C'.

En vertu de (2), nous en déduisons que M est le milieu de l'arc $\overline{AMB}$

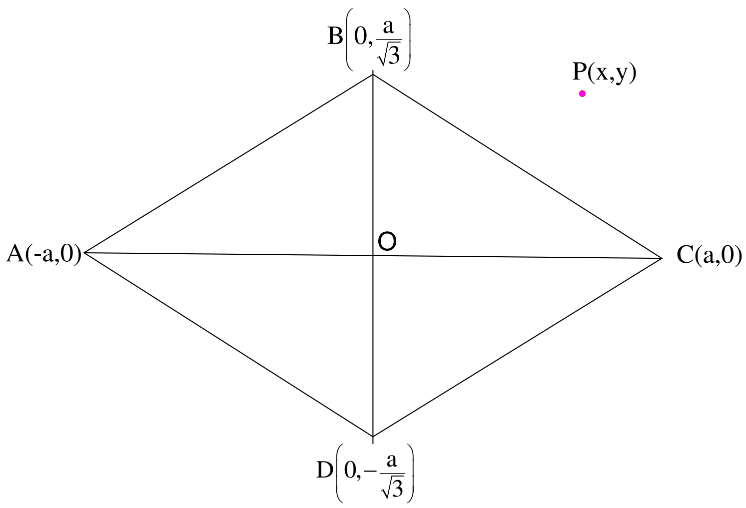
$\rightarrow$ arc $\overline{AM}$ = arc $\overline{MB} \rightarrow \widehat{P_2} = \widehat{P_3}$ car des angles inscrits qui sous-tendent des arc égaux sont égaux. $\Rightarrow$ Conclusion : PQ est la bissectrice de $\widehat{APB}$

EXGSP115 – Liège, juillet 2007

On considère un losange $ABCD$ tel que le triangle BCD est équilatéral et un point P quelconque. Démontrer que l'on a

$$|PA|^2+|PC|^2=|AB|^2+|PB|^2+|PD|^2$$

Solution proposée par David Hamoir



Soit un système d'axe $Ox \equiv OC$ et $Oy \equiv OB$.

Soit $|\ OC\ | = a$. Ce qui permet de définir les coordonnées des points A, B, C, D.

Soit le point $P(x, y)$

Calculons :

$$|\ PA\ |^2 = (x+a)^2 + (y-0)^2$$

$$|\ PC\ |^2 = (x-a)^2 + (y-0)^2$$

$$|\ AB\ |^2 = (0+a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - 0\right)^2$$

$$|\ PB\ |^2 = (x-0)^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$|\ PD\ |^2 = (x-0)^2 + \left(y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

On a alors : $|\ PA\ |^2 + |\ PC\ |^2 = x^2 \cancel{+2ax} + a^2 + y^2 + x^2 \cancel{-2ax} + a^2 + y^2$

$$= 2\left(x^2 + y^2 + a^2\right) \qquad (1)$$

Et d'autre part :

$$|\ AB\ |^2 + |\ PB\ |^2 + |\ PD\ |^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} + x^2 + y^2 - \cancel{\frac{2ay}{\sqrt{3}}} + \frac{a^2}{3} + x^2 + y^2 + \cancel{\frac{2ay}{\sqrt{3}}} + \frac{a^2}{3}$$

$$= 2\left(x^2 + y^2 + a^2\right) \qquad (2)$$

$(1) = (2) \rightarrow \boxed{|\ PA\ |^2 + |\ PC\ |^2 = |\ AB\ |^2 + |\ PB\ |^2 + |\ PD\ |^2}$

Méthode alternative

Utilisons l'analyse vectorielle

$$|\ PA\ |^2 + |\ PC\ |^2 = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = \left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{PB}^2 + 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{PD}^2 + 2\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}^2$$

Or $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\rightarrow |\ PA\ |^2 + |\ PC\ |^2 = \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{PD}^2 \underbrace{-2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2}_{E}$$

$$E = 2\overrightarrow{AB}\left(-\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right) + \overrightarrow{AB}^2 = 2\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PD}\right) + \overrightarrow{AB}^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}^2$$

Or : $\widehat{ABD} = 60°$ et $\left|\ \overrightarrow{AB}\ \right| = \left|\ \overrightarrow{BD}\ \right|$ car ABD est un triangle équilatéral

Donc : $E = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}^2 = -2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}^2 = -2\left|\ \overrightarrow{AB}\ \right|.\left|\ \overrightarrow{BD}\ \right|\cos 60 + \overrightarrow{AB}^2$

$$= -2\left|\ \overrightarrow{AB}\ \right|.\left|\ \overrightarrow{AB}\ \right|\cos 60 + \overrightarrow{AB}^2 = -\left|\ \overrightarrow{AB}\ \right|^2 + \left|\ \overrightarrow{AB}\ \right|^2 = 0$$

Conclusion : $\boxed{|\ PA\ |^2 + |\ PC\ |^2 = |\ AB\ |^2 + |\ PB\ |^2 + |\ PD\ |^2}$

Le 5 juillet 2007. Relu par Benoit Baudelet.

EXGSP116 – Liège, septembre 2007

On considère un triangle ABC. On note $\mathcal{C}$ le cercle au triangle et O le centre de ce cercle.
La bissectrice intérieure de l'angle A coupe $[B,C]$ en D et C en I.

a) Démontrer que les droites OI et BC sont perpendiculaires.

b) Démontrer la relation

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}^2 + \overline{DC}.\overline{DC}$$

où $\overline{XY}$ désigne la longueur du segment $[X,Y]$.

---

a) Puisque DI est bissectrice de A, alors les arc BI et CI sont égaux.
De même les cordes BI et CI sont égales. Autrement dit, I est situé sur la médiatrice de BC.
Comme O est aussi situé sur la médiatrice de BC, ($\overline{OB} = \overline{OC}$), OI est donc perpendiculaire à BC

Notons d'abord que les triangles ADB et CID sont semblables, car

$A_1 = C_1$ Angles inscrits qui interceptent le même arc

$D_1 = D_2$ Angles opposés par le sommet.

Donc : $$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CI}} \rightarrow \begin{cases} \overline{ID} = \dfrac{\overline{BD}.\overline{CD}}{\overline{AD}} & (1) \\ \overline{CI} = \dfrac{\overline{CD}.\overline{AB}}{\overline{AD}} & (2) \end{cases}$$

De même les triangles ADC et BDI sont semblables, car

$A_2 = B_1$ Angles inscrits qui interceptent le même arc

$D_3 = D_4$ Angles opposés par le sommet.

Donc : $$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BI}} \rightarrow \overline{BI} = \frac{\overline{BD}.\overline{AC}}{\overline{AD}} \qquad (3)$$

Mais comme $\overline{CI} = \overline{BI}$, on réarrange les égalités (2) et (3)

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{BI} = \dfrac{\overline{CD}.\overline{AB}}{\overline{AD}} & (4) \\ \overline{CI} = \dfrac{\overline{BD}.\overline{AC}}{\overline{AD}} & (5) \end{cases}$$

Utilisons maintenant le premier théorème de Ptolème.
"Le produit de la mesure des diagonales est égale à la somme du produit des mesures des cotés opposés"

Le 5 juillet 2007. Relu par Benoit Baudelet.

EXGSP117 - Bruxelles, juillet 2007

1) Déterminer le barycentre G de deux points distincts A et B de masses respectives de 2 et -1
2) Déterminer le barycentre G de trois points non-alignés A, B, C affectés de masses égales et le barycentre G' de ces mêmes points affectés de masses respectives 1, 1 et -1
3) Soit M un point quelconque du plan ABC. Exprimer, en tenant compte du résultat du 2) les sommes vectorielles suivantes : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$
4) Déterminer le lieu des points M tel que les sommes vectorielles considérées au 3) soient des vecteurs orthogonaux.

Solution proposée par Steve Tumson

1) Par définition du barycentre : $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ avec m les masses respectives des points.

On peut donc écrire :

$$m_A\left[\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X_G\\Y_G\\Z_G\end{pmatrix}\right]+m_B\left[\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X_G\\Y_G\\Z_G\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{m_A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}+m_B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}}{m_A+m_B}=\begin{pmatrix}X_G\\Y_G\\Z_G\end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$X_G=\frac{m_Ax_A+m_Bx_B}{m_A+m_B}\qquad Y_G=\frac{m_Ay_A+m_By_B}{m_A+m_B}\qquad Z_G=\frac{m_Az_A+m_Bz_B}{m_A+m_B}$$

Dans notre cas, on a donc :

$$\boxed{X_G=2x_A-x_B}\qquad\boxed{Y_G=2y_A-y_B}\qquad\boxed{Z_G=2z_A-z_B}$$

2) Même raisonnement : $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}+m_C\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$X_G=\frac{m_Ax_A+m_Bx_B+m_Cx_C}{m_A+m_B+m_C}\quad Y_G=\frac{m_Ay_A+m_By_B+m_Cy_C}{m_A+m_B+m_C}\quad Z_G=\frac{m_Az_A+m_Bz_B+m_Cz_C}{m_A+m_B+m_C}$$

Si les trois points sont de même poids m on a :

$$\boxed{X_G=\frac{\cancel{m}(x_A+x_B+x_C)}{3\cancel{m}}}\qquad\boxed{Y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}}\qquad\boxed{Z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}}$$

S'ils ont les masses données dans l'énoncé :

$$\boxed{X_{G'}=x_A+x_B-x_C}\qquad\boxed{Y_{G'}=y_A+y_B-y_C}\qquad\boxed{Z_{G'}=z_A+z_B-z_C}$$

3) On peut utiliser un petit artifice pour faire intervenir le barycentre :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$$

Ou encore rapporté à l'origine du repère :

$$\cancel{\overrightarrow{OA}}-\overrightarrow{OM}+\cancel{\overrightarrow{OB}}-\overrightarrow{OM}+\cancel{\overrightarrow{OC}}-\overrightarrow{OM}-\cancel{\overrightarrow{OA}}+\overrightarrow{OG}-\cancel{\overrightarrow{OB}}+\overrightarrow{OG}-\cancel{\overrightarrow{OC}}+\overrightarrow{OG}$$

$$\Updownarrow$$

$$-3\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{OG}$$

$$\Updownarrow$$

$$3\overrightarrow{MG}$$

Et donc

$$\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}}$$

Par le même raisonnement, on trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG'}}$$

4) On a : $\boxed{x_{MG} = X_G - x_M}$ $\boxed{y_{MG} = Y_G - y_M}$ $\boxed{z_{MG} = Z_G - z_M}$

$\boxed{x_{MG'} = X_{G'} - x_M}$ $\boxed{y_{MG'} = Y_{G'} - y_M}$ $\boxed{z_{MG'} = Z_{G'} - z_M}$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, il faut donc :

$$3\overrightarrow{MG} \bullet 3\overrightarrow{MG'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MG'} \Leftrightarrow x_{MG}x_{MG'} + y_{MG}y_{MG'} + z_{MG}z_{MG'} = 0$$

En remplaçant, on a :

$$3\overrightarrow{MG} \bullet 3\overrightarrow{MG'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MG'} \Leftrightarrow x_{MG}x_{MG'} + y_{MG}y_{MG'} + z_{MG}z_{MG'} = 0$$

Le premier terme s'écrit :

$$(X_G - x_M)(X_{G'} - x_M) = X_G X_{G'} + x_M^2 - x_M (X_G + X_{G'})$$

On s'attend bien sûr à trouver l'équation d'un cercle. Par la méthode de compensation :

$$X_G X_{G'} + x_M^2 - x_M (X_G + X_{G'}) = X_G X_{G'} + \left(x_M - \frac{1}{2}(X_G + X_{G'}) \right)^2 - \frac{1}{4}\left(X_G^2 + X_{G'}^2 + 2X_G X_{G'} \right)$$

et donc :

$$(X_G - x_M)(X_{G'} - x_M) = \left[\frac{X_G X_{G'}}{2} - \frac{1}{4}\left(X_G^2 + X_{G'}^2 \right) \right] + \left(x_M - \frac{1}{2}(X_G + X_{G'}) \right)^2$$

De la même manière, on trouve :

$$(Y_G - y_M)(Y_{G'} - y_M) = \left[\frac{Y_G Y_{G'}}{2} - \frac{1}{4}\left(Y_G^2 + Y_{G'}^2 \right) \right] + \left(y_M - \frac{1}{2}(Y_G + Y_{G'}) \right)^2$$

$$(Z_G - z_M)(Z_{G'} - z_M) = \left[\frac{Z_G Z_{G'}}{2} - \frac{1}{4}\left(Z_G^2 + Z_{G'}^2 \right) \right] + \left(z_M - \frac{1}{2}(Z_G + Z_{G'}) \right)^2$$

Notre équation devient donc :

$$(X_G - x_M)(X_{G'} - x_M) + (Y_G - y_M)(Y_{G'} - y_M) + (Z_G - z_M)(Z_{G'} - z_M) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x_M - \frac{1}{2}(X_G + X_{G'}) \right)^2 + \left(y_M - \frac{1}{2}(Y_G + Y_{G'}) \right)^2 + \left(z_M - \frac{1}{2}(Z_G + Z_{G'}) \right)^2 =$$

$$\left[\frac{1}{4}\left(X_G^2 + X_{G'}^2 \right) - \frac{X_G X_{G'}}{2} \right] + \left[\frac{1}{4}\left(Y_G^2 + Y_{G'}^2 \right) - \frac{Y_G Y_{G'}}{2} \right] + \left[\frac{1}{4}\left(Z_G^2 + Z_{G'}^2 \right) - \frac{Z_G Z_{G'}}{2} \right]$$

On encore simplement :

$$\left(x_M - \frac{1}{2}(X_G + X_{G'}) \right)^2 + \left(y_M - \frac{1}{2}(Y_G + Y_{G'}) \right)^2 + \left(z_M - \frac{1}{2}(Z_G + Z_{G'}) \right)^2 =$$

$$4\left[(X_G - X_{G'})^2 + (Y_G - Y_{G'})^2 + (Z_G - Z_{G'})^2 \right]$$

Le lieu des points M où les deux vecteurs sont orthogonaux est donc un cercle :

- De centre : $\left(\frac{1}{2}(X_G + X_{G'}); \frac{1}{2}(Y_G + Y_{G'}); \frac{1}{2}(Z_G + Z_{G'}) \right)$
- De rayon : $2\sqrt{(X_G - X_{G'})^2 + (Y_G - Y_{G'})^2 + (Z_G - Z_{G'})^2}$

Il ne faut pas être très observateur pour apercevoir qu'en fait :

- Le centre du cercle est le milieu du vecteur $\overrightarrow{GG'}$
- Le rayon du cercle est le double de la norme du vecteur $\overrightarrow{GG'}$

Solution JFC

1) Le barycentre de deux points distincts A et B, affectés de masses m_A et m_B,

dans un répère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$, est donné par $\overrightarrow{OG}=\dfrac{m_A.\overrightarrow{OA}+m_B.\overrightarrow{OB}}{m_A+m_B}$

Ici : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{2-1}=2.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\rightarrow\begin{cases}x_G=2x_A-x_B\\y_G=2y_A-y_B\end{cases}$

2) Le barycentre de trois points distincts A,B et C, affectés de masses égales m,

dans un répère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$, est donné par

$$\overrightarrow{OG}=\frac{m.\overrightarrow{OA}+m.\overrightarrow{OB}+m.\overrightarrow{OC}}{3m}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{1}{3}\left(x_A+x_B+x_C\right)\\y_G=\dfrac{1}{3}\left(y_A+y_B+y_C\right)\end{cases}$$

Le barycentre de trois points distincts A,B et C, affectés de masses égales $1,1$ et -1,

dans un répère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$, est donné par

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1.\overrightarrow{OA}+1.\overrightarrow{OB}-1.\overrightarrow{OC}}{1+1-1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\rightarrow\begin{cases}x_G=x_A+x_B-x_C\\y_G=y_A+y_B-y_C\end{cases}$$

3) a) Désignons par $\vec{S_1}$, la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

On a : $\vec{S_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$

$=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

Or $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right)=\vec{0}$$

$\rightarrow\boxed{\vec{S_1}=3\overrightarrow{MG}}$

b) Désignons par $\vec{S_2}$, la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

On a : $\vec{S_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'B}-\overrightarrow{MG'}-\overrightarrow{G'C}$

$=\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}-\overrightarrow{G'C}$

Or $\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}-\overrightarrow{G'C}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG'}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$\rightarrow\boxed{\vec{S_2}=\overrightarrow{MG'}}$

4)Il faut : $\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{S_2}=0 \rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0 \rightarrow$ Donc l'angle GMG' est un angle droit.

Le lieu de M est un cercle dont GG' est un diamètre.

On peut facilement établir l'équation de ce cercle.

$$(x_G - x_M ; y_G - y_M).(x_{G'} - x_M ; y_{G'} - y_M) = 0$$

$$\rightarrow x_G x_{G'} - (x_G + x_{G'}) x_M + x_M^2 + y_G y_{G'} - (y_G + y_{G'}) y_M + y_M^2 = 0$$

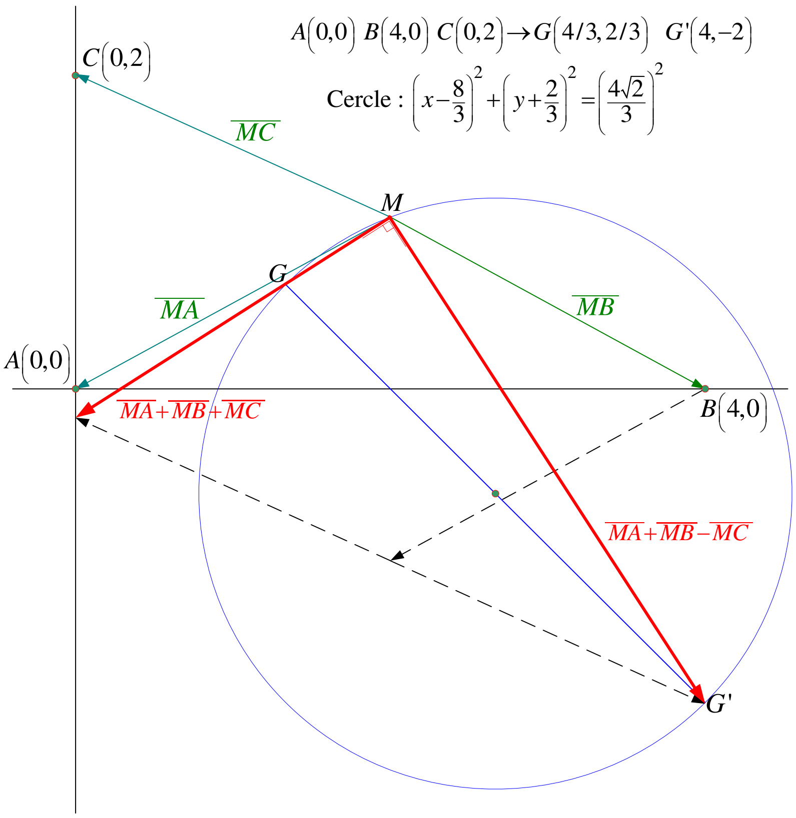
C'est bien l'équation d'un cercle :

$$\boxed{x^2 + y^2 - (x_G + x_{G'}) x - (y_G + y_{G'}) y_M + x_G x_{G'} + y_G y_{G'} = 0}$$

qui peut ce mettre sous la forme :

$$\boxed{\left(x - \frac{x_G + x_{G'}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_G + y_{G'}}{2}\right)^2 = \frac{(x_G - x_{G'})^2 + (y_G - y_{G'})^2}{4}}$$

Ce qui montre que le centre du cercle est le milieu du segment GG', et que le rayon vaut la moitié de $|GG'|$. Autrement dit GG' est bien un diamètre du cercle.



EXGSP118 – FACSA, UCL, Louvain, septembre 2007

Soit un trapèze $ABCD$ dont la base AD et BC sont de longueur fixées et constantes.
Le sommet B de ce trapèze évolue sur une circonférence donnée de rayon r et de centre I.
On vous demande de déterminer le lieu des points M de concours des côtés non parallèles du trapèze en veillant :
(1) à expliquer clairement votre démarche
(2) à être complet dans l'énonciation du lieu
(3) à construire graphiquement les données du problème et le lieu trouvé.

Solution proposée par Steve Tumson

Tout est une histoire d'homothétie !

Il est évident que le point M est le résultat d'une homothétie de centre A et de rapport AM / AB

Le point B suivant une trajectoire circulaire, le point M (aligné à B par définition de l'homothétie) suit donc aussi une trajectoire circulaire.

Pour connaître le centre et le rayon de ce cercle, il faut connaître le rapport de l'homothétie lorsque le point B est sur l'axe AI. Le centre de la circonférence se trouve sur cet axe.

Dans le cas de la figure ci-dessous, quand B est sur l'axe OI les données numériques du dessin sont :

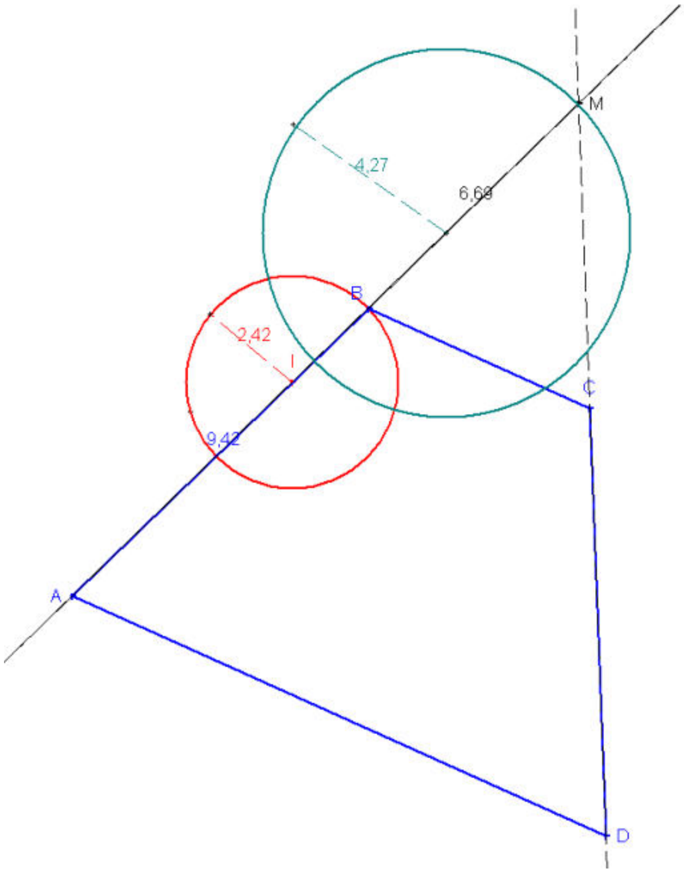
$$\begin{cases} |AM| = 16,1 \\ |AB| = 9,42 \end{cases} \Rightarrow \frac{|AM|}{|AB|} \approx 1,7$$

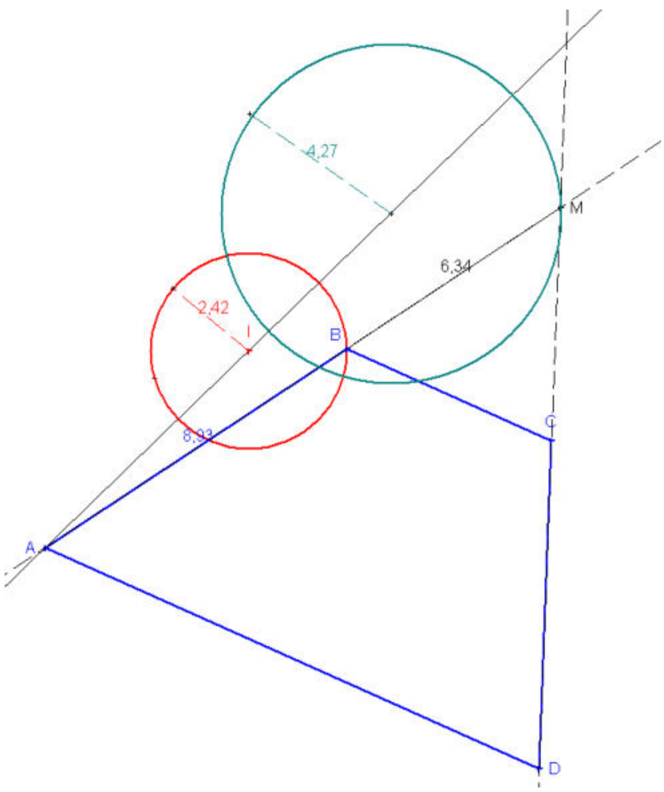
$$r = 2,42 \qquad |AI| = |AB| - r = 7$$

Le centre du cercle est donc sur l'axe AI et se situe à une longueur de :

$$\frac{|AI'|}{|AI|} = 1,7 \Leftrightarrow |AI'| = 1,7|AI| = 7*1,7 = 11,9$$

Sachant situer le centre du cercle, il reste à le faire passer par M et le tour est joué !





Le 25 septembre 2007.

EXGSP119 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2007

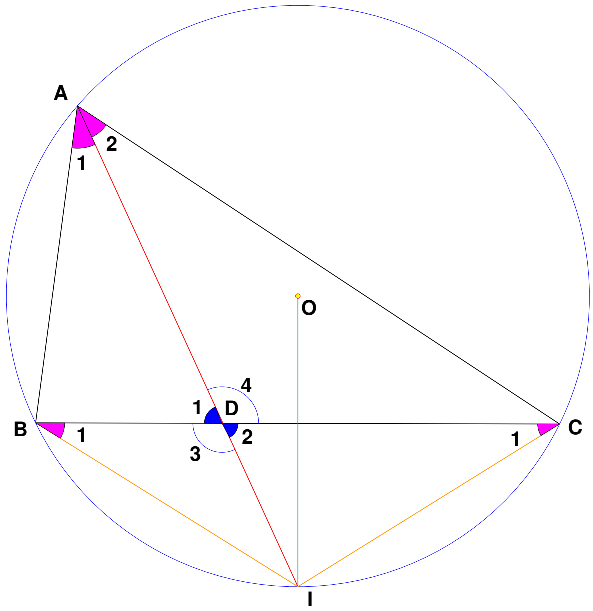
On considère un triangle ABC. On note $\mathcal{C}$ le cercle au triangle et O le centre de ce cercle.
La bissectrice intérieure de l'angle A coupe $[B,C]$ en D et $\mathcal{C}$ en I.

a) Démontrer que les droites OI et BC sont perpendiculaires.

b) Démontrer la relation

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}^2 + \overline{DC}.\overline{DC}$$

où $\overline{XY}$ désigne la longueur du segment $[X,Y]$.



a) Puisque DI est bissectrice de A, alors les arcs BI et CI sont égaux.
De même les cordes BI et CI sont égales. Autrement dit, I est situé sur la médiatrice de BC.
Comme O est aussi situé sur la médiatrice de BC, $(\overline{OB} = \overline{OC})$, OI est donc perpendiculaire à BC

Notons d'abord que les triangles ADB et CID sont semblables, car

$A_1 = C_1$ Angles inscrits qui interceptent le même arc

$D_1 = D_2$ Angles opposés par le sommet.

Donc : $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CI}} \rightarrow \begin{cases} \overline{ID} = \frac{\overline{BD}.\overline{CD}}{\overline{AD}} & (1) \\ \overline{CI} = \frac{\overline{CD}.\overline{AB}}{\overline{AD}} & (2) \end{cases}$

De même les triangles ADC et BDI sont semblables, car

$A_2 = B_1$ Angles inscrits qui interceptent le même arc

$D_3 = D_4$ Angles opposés par le sommet.

Donc : $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BI}} \rightarrow \overline{BI} = \frac{\overline{BD}.\overline{AC}}{\overline{AD}} \qquad (3)$

Mais comme $\overline{CI} = \overline{BI}$, on réarrange les égalités (2) et (3)

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{BI} = \frac{\overline{CD}.\overline{AB}}{\overline{AD}} & (4) \\ \overline{CI} = \frac{\overline{BD}.\overline{AC}}{\overline{AD}} & (5) \end{cases}$$

Utilisons maintenant le premier théorème de Ptolème. (Voir EXGSP120)
"Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle alors le produit de la mesure des diagonales est égale à la somme du produit des mesures des cotés opposés"

$\overline{AI}.\overline{BC} = \overline{AB}.\overline{CI} + \overline{AC}.\overline{BI} \rightarrow \left(\overline{AD} + \overline{DI}\right).\overline{BC} = \overline{AB}.\overline{CI} + \overline{AC}.\overline{BI}$

Remplaçons : $\overline{DI}$ par (1), $\overline{CI}$ par (5) et $\overline{BI}$ par (4)

$$\rightarrow \left(\overline{AD} + \frac{\overline{BD}.\overline{CD}}{\overline{AD}}\right).\overline{BC} = \overline{AB}.\frac{\overline{BD}.\overline{AC}}{\overline{AD}} + \overline{AC}.\frac{\overline{CD}.\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

$$\rightarrow \left(\overline{AD}^2 + \overline{BD}.\overline{CD}\right).\overline{BC} = \overline{AB}.\overline{AC}\underbrace{\left(\overline{BD} + \overline{CD}\right)}_{\overline{BC}}$$

$\rightarrow \boxed{\overline{AD}^2 + \overline{BD}.\overline{CD} = \overline{AB}.\overline{AC}}$ qui est l'expression demandée.

Le 10 octobre 2007.