Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 13

EXGSP120 – EXGSP129

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Décembre 08

EXGSP130 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2009

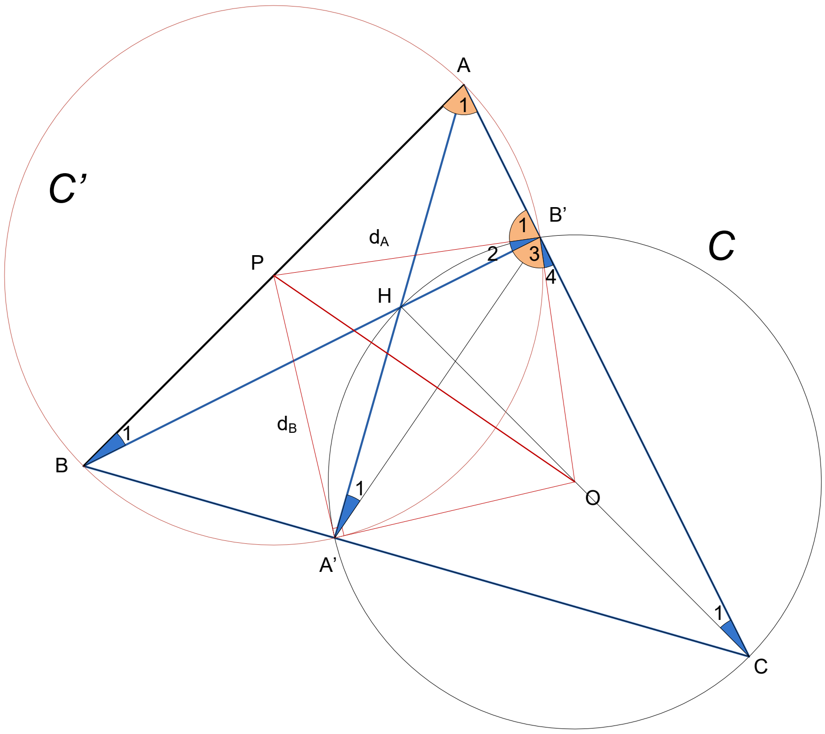
Dans un triangle ABC, on note respectivement A' et B' les pieds des hauteurs issues des sommets A et B. On note H le point d'intersection de ces hauteurs. On trace le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $A'B'C$ et, par les points A'et B', on mène respectivement les tangentes d_A et d_B à ce cercle.

(a) Démontrer que $[CH]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$

(b) On note P l'intersection des droites AB et d_A. Démontrer que le triangle $PA'B$ est isocèle.

(c) En déduire que le point P est situé au milieu du côté $[AB]$

(d) En déduire que la droite d_B passe par P.



Les angles $HB'C$ et $HA'C$ sont droits car AA' et BB' sont des hauteurs.
Les points $HB'CA'$ sont donc cocycliques et $[HC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

Les angles $BB'A$ et $AA'B$ sont droits. Les points $AB'A'B$ sont cocycliques.
Soit $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au quadrilatère définit par ces points. $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}'$.
Les angles $\widehat{B_1}$ et $\widehat{A'_1}$ sont égaux car ce sont des angles inscrits dans $\mathcal{C}'$ qui interceptent le même arc. Dans $\mathcal{C}$, l'angle inscrit $\widehat{A'_1}$ intercepte le même arc que l'angle tangentiel $\widehat{B'_2}$.
Ils sont donc égaux. Il en résulte que $\widehat{B_1} = \widehat{B'_2}$, c'est-à-dire que le triangle PBB' est isocèle et $\overline{PB} = \overline{PB'}$

$\widehat{B'_1}$ et $\widehat{B'_2}$ sont complémentaires puisque BB' est une hauteur. $\widehat{B_1}$ et $\widehat{A_1}$ sont complémentaires puisque $BB'A$ est un triangle rectangle et comme $\widehat{B_1} = \widehat{B'_2}$ nous avons $\widehat{B'_1} = \widehat{A_1}$, c'est-à-dire que le triangle APB' est isocèle et $\overline{PA} = \overline{PB'}$.

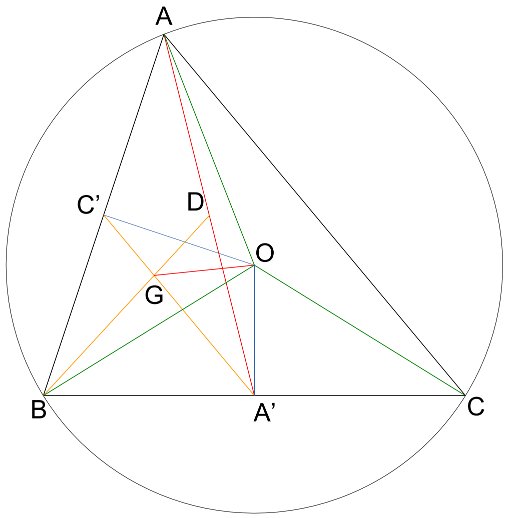
Dès lors, $\overline{PA} = \overline{PB}$ et P est le milieu de $[AB]$. (C'est le centre de $\mathcal{C}'$) et $[PA']$ est une médiane du triangle rectangle $AA'B$, donc $\overline{PA'} = \overline{PB}$ et le triangle $PA'B$ est isocèle.

Soit O le centre de $\mathcal{C}$. PB' est une tangente à $\mathcal{C}$ et le triangle $PB'O$ est rectangle.
Or les triangles $PB'O$ et $PA'O$ sont égaux puisqu'ils ont un côté commun, que $\overline{OA'} = \overline{OB'}$ et que $\overline{PB'} = \overline{PA'}$. Les angles $\widehat{PA'O}$ et $\widehat{PB'O}$ sont égaux et droits. Nous concluons que $A'P \equiv d_B$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en A' et qu'elle passe par P.

Le 16 aout 2009.

EXGSP131– FACSA, ULG, Liège, Juillet 2009

On note O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, et A' le pied de la médiane issue de A de ce triangle. On note G le centre de gravité du triangle $AA'B$.
Démontrer que les droites AA' et OG sont perpendiculaires si et seulement si le triangle ABC est isocèle en $B.\left(Suggestion:\text{Calculer } \vec{AA'}.\vec{OG}\right)$



Soit C' le milieu de AB. Joignons $C'O$ qui est une médiatrice de AB.
Pour avoir une condition nécessaire et suffisante, il suffit de vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.
Pour alléger l'écriture, tous les couples de points ci-dessous désignent des vecteurs. Nous n'indiquons pas la flèche au dessus de ces couples.

$$OG=OC'+C'B+BG=OC'+C'B+\underbrace{\frac{2}{3}BD}_{\text{car } G \text{ est le centre de gravité du triangle } ABA'}$$

$$=OC'+C'B+\underbrace{\frac{2}{3}BA+\frac{2}{3}AD}_{\text{car } BD=BA+AD}=OC'+C'B+\frac{2}{3}BA+\frac{2}{3}.\underbrace{\left(\frac{1}{2}AA'\right)}_{\text{car } D \text{ est le milieu de } AA'}$$

$$=OC'+C'B+\frac{2}{3}BA+\underbrace{\frac{1}{3}AB+\frac{1}{3}BA'}_{\text{car } AA'=AB+BA'}=OC'+C'B-\frac{1}{3}AB+\frac{1}{3}BA'$$

$$AA'.OG=\left(AB+BA'\right).\left(OC'+C'B-\frac{1}{3}AB+\frac{1}{3}BA'\right)$$

$$=\underbrace{AB.OC'}_{=0 \text{ car } \perp}+BA'.OC'+\underbrace{AB\quad .C'B}_{AB=2C'B}+BA'.C'B-\frac{1}{3}\underbrace{AB\quad^{2}}_{AB=2C'B}\cancel{-\frac{1}{3}AB.BA'}+\cancel{\frac{1}{3}AB.BA'}+\frac{1}{3}BA'^{2}$$

$$=BA'\left(OA'+A'B+BC'\right)+2C'B^{2}+BA'.C'B-\frac{4}{3}C'B^{2}+\frac{1}{3}BA'^{2}$$

$$=\underbrace{BA'.OA'}_{=0 \text{ car } \perp}+\underbrace{BA'.A'B}_{=-A'B^{2}}+\cancel{BA'.BC'}+\underline{2C'B^{2}}+\cancel{BA'.C'B}\underline{-\frac{4}{3}C'B^{2}}+\frac{1}{3}BA'^{2}$$

$$=-A'B^{2}+\frac{2}{3}C'B^{2}+\frac{1}{3}\underbrace{BA'^{2}}_{=A'B^{2}}=\frac{2}{3}\left(C'B^{2}-A'B^{2}\right)$$

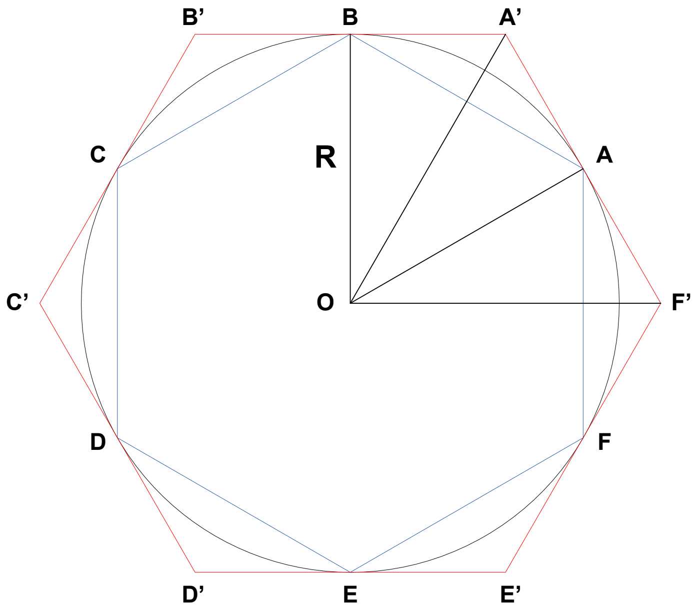
La relation est vérifiée si : $C'B^{2}-A'B^{2}=0\rightarrow C'B^{2}=A'B^{2}\rightarrow\left|C'B\right|^{2}=\left|A'B\right|^{2}\rightarrow\left|C'B\right|=\left|A'B\right|$
$\rightarrow\left|BA\right|=\left|BC\right|$ et donc le triangle ABC est isocèle;

Le 16 aout 2009.

EXGSP132 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R. Un hexagone régulier est un hexagone dont tous les côtés ont la même longueur. On considère deux hexagones réguliers, le premier inscrit dans $\mathcal{C}$ et l'autre circonscrit à $\mathcal{C}$.

1) On demande de calculer les périmètres de ces deux hexagones.
2) On demande ensuite de déduire des résultats du point 1) deux approximations du nombre π, l'un par défaut, l'autre par excès.



Le périmètre de l'hexagone inscrit est simplement égal à $6R$.

L'angle $A'OA$ vaut $30° \rightarrow AA' = R.\tan 30 = \dfrac{R\sqrt{3}}{3} \rightarrow A'F' = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

Le périmètre de l'hexagone circonscrit est donc : $4R\sqrt{3}$

La longueur de la circonférence du cercle est comprise entre les périmètres des deux hexagones :

$$6R < 2\pi R < 4R\sqrt{3} \rightarrow 3 < \pi > 2\sqrt{3} \simeq 3.46$$

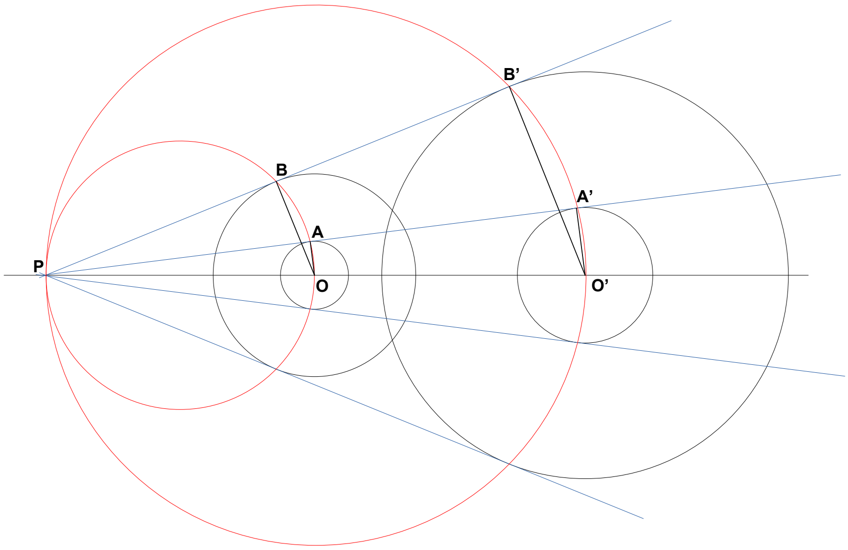
Le 16 aout 2009.

EXGSP133 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

On donne deux circonférences de centres fixes et choisies de telle manière que le rapport de leurs rayons soit constant.

1) Trouvez les lieux décrits par les points de contact des tangentes communes.

2) Expliquez votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Soit $k = \dfrac{R'}{R}$ le rapport des rayons des deux cercles.

La tangente AA' coupe l'axe OO' en un point P. Les triangles rectangles PAO et $PA'O'$ sont semblables et on a : $\dfrac{PO'}{PO} = \dfrac{OA'}{OA} = k \qquad (1)$

La tangente BB' coupe l'axe OO' en un point P'. Les triangles rectangles $P'BO$ et $P'B'O'$ sont semblables et on a : $\dfrac{P'O'}{P'O} = \dfrac{OB'}{OB} = k \qquad (2)$

$$(1) = (2) \to \frac{PO'}{PO} = \frac{P'O'}{P'O} \to \frac{PO + OO'}{PO} = \frac{P'O + OO'}{P'O} \to 1 + \frac{OO'}{PO} = 1 + \frac{OO'}{P'O} \to PO = P'O$$

Les points P et P' sont donc confondus.

On en déduit que toutes les tangentes sont concourantes en P

Le quadrilatère $PBOA$ est inscriptible dans un cercle de diamètre PO puisque $PBO = PAO = 90°$
Le lieu des points de tangence au petit cercle est donc un cercle de diamètre PO.
Le quadrilatère $PB'O'A'$ est inscriptible dans un cercle de diamètre PO' puisque $\overline{PB'O'} = \overline{PA'O'} = 90°$
Le lieu des points de tangence au grand cercle est donc un cercle de diamètre PO'.

Calculons les diamètres de ces cercles en fonction du rapport k et de la distance OO'.

$$\frac{PO'}{PO} = k \rightarrow PO = \frac{1}{k} PO'$$

$$PO' = PO + OO' = \frac{1}{k} PO' + OO' \rightarrow PO' - \frac{1}{k} PO' = OO' \rightarrow PO' = OO'.\frac{k}{k-1} \rightarrow PO = OO'.\frac{1}{k-1}$$

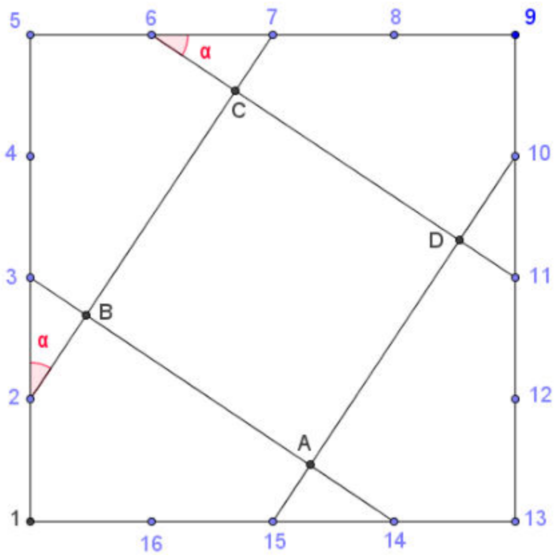
Le 16 aout 2009.

EXGSP134 – FACS, ULB, Bruxelles – juillet 2009.

Les côtés d'un carré sont divisés en quatre segments de même longueur. On numérote de 1 à 16 les points des subdivisions en commençant par un des sommets du carré et en tournant dans le sens horlogique. On relie le point 2 au point 7, le point 6 au point 11, le point 10 au point 15 et le point 14 au point 3. Les quatre droites ainsi obtenues déterminent un quadrilatère.

a) Quelle est la nature de ce quadrilatère?

b) Combien de fois l'aire du quadrilatère est-elle comprise dans celle du carré initial?



1) Les triangles rectangles $(2)(5)(7)$ et $(6)(9)(11)$ sont isométriques car les côtés de l'angle droit sont de même mesure. Les angles correspondant sont donc de même amplitude.

Les triangles $(3)B(2)$ et $(6)C(7)$ sont isométriques (un côté de même mesure compris entre deux angles de même amplitude), et, comme les angles $\widehat{(3)(2)B}$ et $\widehat{(2)(3)(B)}$ sont complémentaires, les triangles sont de plus rectangles.

Finalement, on en déduit que les quatre triangles $(3)B(2),(6)C(7),(10)D(11)$ et $(14)A(15)$ sont tous isométriques.

$\rightarrow |BC| = |(2)(7)| - |(2)B| - |C(7)| = |(6)(11)| - |(6)C| - |D(11)| = |CD|$

On démontre de la même façon que : $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

En conclusion, le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

2) On a $\tan\alpha = \frac{2}{3} \to \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{4}{9}} = \frac{9}{13} \to \cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\to \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{13} \to \sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

D'une part : $\left|(2)(7)\right| = \frac{\left|(2)(5)\right|}{\cos\alpha} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{13}}{13}} = \sqrt{13}$

D'autre part : $\left|(2)B\right| = \left|(2)(3)\right|.\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ et $\left|C(7)\right| = \left|(6)(7)\right|.\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

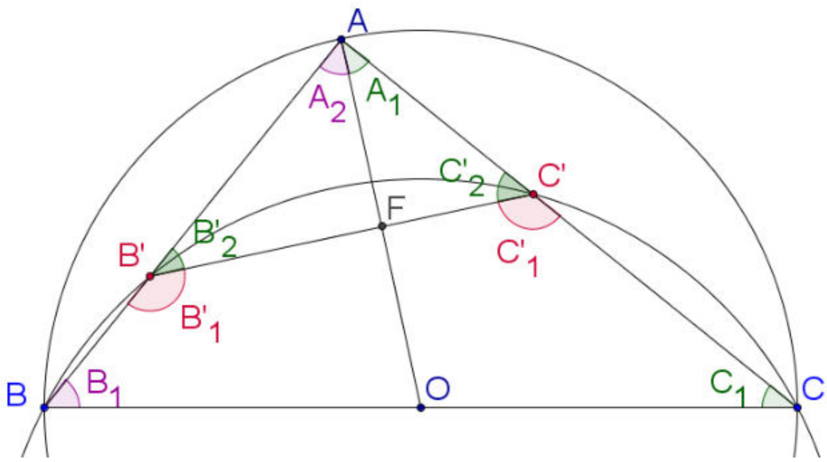
Donc : $\left|BC\right| = \left|(2)(7)\right| - \left|(2)B\right| - \left|C(7)\right| = \sqrt{13} - \frac{3\sqrt{13}}{13} - \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$

Le rapport des aires est alors : $\frac{A_{(1)(5)(9)(13)}}{A_{ABCD}} = \left(\frac{4}{\frac{8\sqrt{13}}{13}}\right)^2 = \boxed{\frac{13}{4}}$

Le 22 juin 2010.

EXGSP135 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2010.

On considère un cercle passant par les extrémités B et C de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC. Ce cercle coupe la droite AB en B et en un autre point noté B'. De même, il coupe la droite AC en C et en un autre point C'. Les points B'et C' sont distinct de A.
Démontrer que la médiane issue de A du triangle ABC est confondue avec la hauteur issue de A du triangle $AB'C'$.



Comme le triangle ABC est rectangle en A et que AO est une médiane, le triangle AOC est isocèle : $\rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$. $\quad (1)$

Les points B, B', C' et C sont cocycliques. Donc $\widehat{B_1} + \widehat{C'_1} = \pi$ et comme $\widehat{C'_1} + \widehat{C'_2} = \pi$, nous en déduisons que $\widehat{B_1} = \widehat{C'_2}$. $\quad (2)$

Cependant, comme $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \frac{\pi}{2}$, en tenant compte de (1) et (2), nous tirons : $\widehat{A_1} + \widehat{C'_2} = \frac{\pi}{2}$.

Ces angles sont donc complémentaires. Le triangle AHC' est rectangle en H et AH est une hauteur.

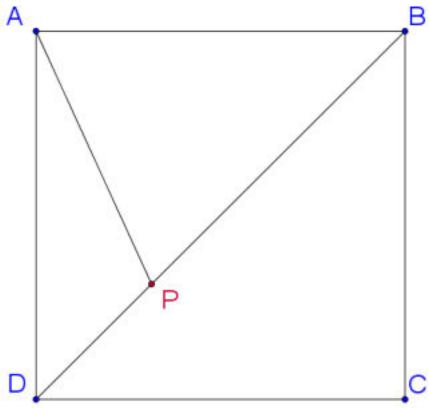
Le 13 juillet 2010.

EXGSP136 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2010.

Un point P appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$. Démontrer l'égalité :

$$\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DP} = |\ AP\ |^2 - c^2$$

où c désigne la longueur d'un côté du carré, et ou $|\ XY\ |$ représente la longueur du segment $[XY]$.



$$\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DP} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right).\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}\right)$$

$= \underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{=\overrightarrow{CD}}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}^2$ Car BA et DA sont perpendiculaires

$= \overrightarrow{AP}.\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) + |AP|^2$

$= \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CA} + |AP|^2$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right).\overrightarrow{CA} + |AP|^2$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \underbrace{\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CA}}_{=0} + |AP|^2$ Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

$= -c^2 + |AP|^2$ car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -|AB|^2 = -c^2$

La projection de AC sur AB est AB

Le 13 juillet 2010.

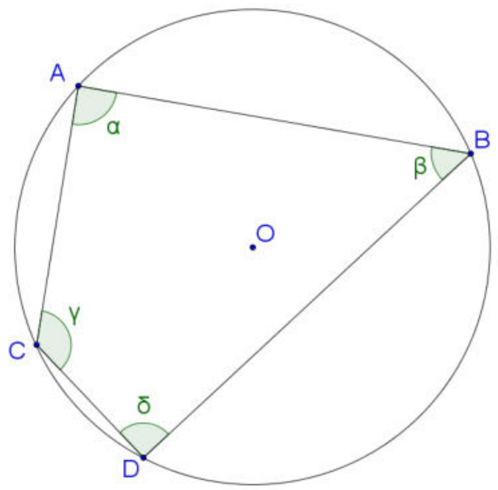
EXGSP137 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, série 2.

Un quadrilatère est cyclique si ses quatre sommets sont situés sur une même circonférence.

1. Montrez que la somme des angles opposés d'un quadrilatère cyclique est égale à π.
2. Illustrez votre démonstration à l'aide d'un dessin clair et précis.

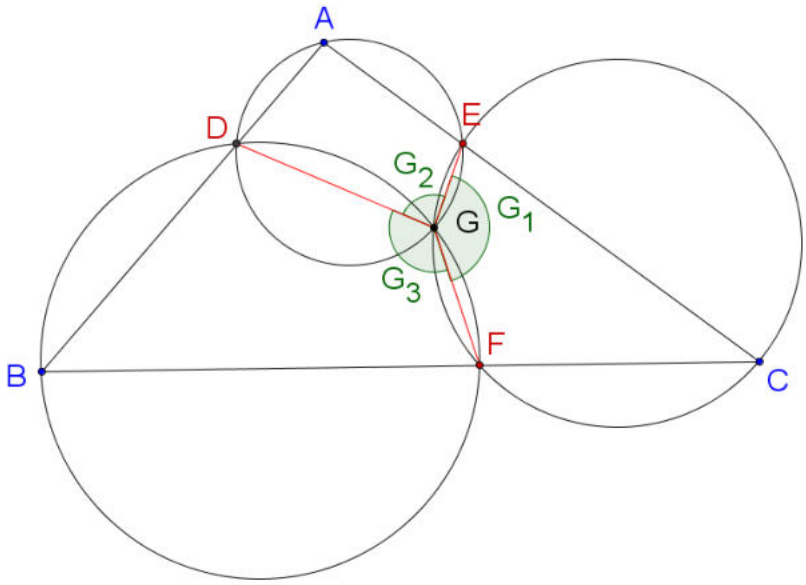
On considère ensuite un triangle ABC quelconque. On choisit un point sur chaque arête de ce triangle. Soit D le point sur l'arête AB, E le point sur l'arête AC et F le point sur l'arête BC.

3. Démontrez que les cercles ADE, BDF et CEF sont concurrents $\left(\text{théorème de Miquel}\right)$.
   La propriété des quadrilatères cycliques démontrée au point 1. sera bien évidemment d'une grande utilité.
4. Illustrez votre démonstration à l'aide d'un dessin clair et précis.



L'angle inscrit CAB intercepte l'arc CBD. L'angle inscrit CDB intercepte l'arc CAB. Ensemble, ils interceptent la totalité du cercle. Or l'amplitude d'un angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc. L'angle au centre qui intercepte la totalité du cercle vaut 2π. En conclusion : $\widehat{CAB}+\widehat{CDB}=\pi$. Les angles sont donc supplémentaires.

De la même façon, on déduira que : $\widehat{ACD}+\widehat{ABD}=\pi$.



Soit G l'intersection des cercles déterminés par les points A, D, E et les points C, E, F.
En vertu de la proposition précédente, on a alors :

$$G_2 + A = \pi \qquad \text{et} \qquad G_1 + C = \pi$$

Or dans le triangle ABC : $\quad A + B + C = \pi$

On déduit : $\quad \pi - G_2 + \widehat{B} + \pi - \widehat{G_1} = \pi$

$$\widehat{B} + 2\pi - \widehat{G_2} - \widehat{G_1} = \pi$$

Et comme : $\quad \widehat{G_3} = 2\pi - \widehat{G_2} - \widehat{G_1}$

On conclut : $\quad \widehat{B} + \widehat{G_3} = \pi$

Autrement dit, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{G_3}$ sont supplémentaires. Le point G est donc situé sur le cercle déterminé par les points BDF. Les trois cercles sont donc concurrents.

Le 16 aout 2009.

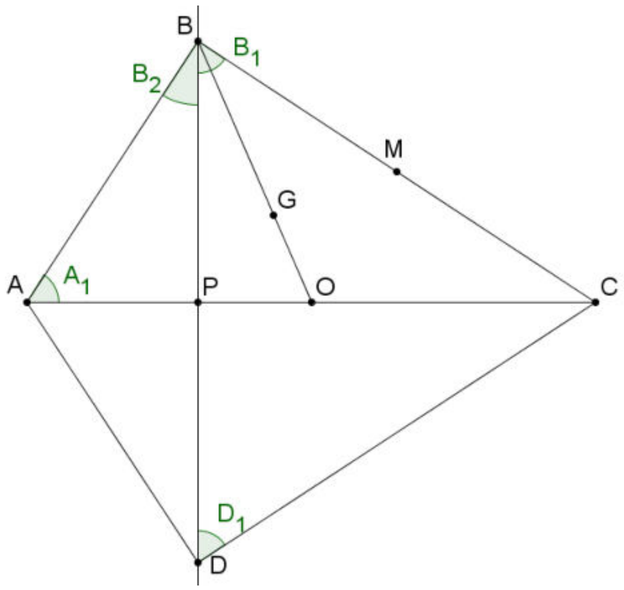
EXGSP138 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, Série C.

Considérons un quadrilatère **variable** $ABCD$ tel que:

- ses diagonales AC et BD sont perpendiculaires entre elles et se coupent en un point P **variable** sur AC mais qui reste entre A et C;
- ce point P est le milieu de BD;
- sa diagonale BD est de longueur **variable**;
- sa diagonale AC est de longueur **constante**;
- les 2 angles variables $\widehat{PAB}$ et $\widehat{PDC}$ **restent égaux entre eux**, quelle que soit la position P et quelle soit la position de BD.

On demande :

- Par les méthodes de la géométrie **synthétique** :
  - A. de déterminer le lieu du point B;
  - B. de déterminer le lieu du point M, milieu du côté variable BC;
  - C. de déterminer le lieu du point G, centre de gravité du triangle variable ACB;
  - D. de déterminer s'il existe une circonférence inscrite au quadrilatère $ABCD$ qui soit simultanément tangente aux 4 côtés de ce quadrilatère.
- Par les méthodes de la géométrie **analytique** :
  - E. de déterminer, dans le système d'axes orthonormés OXY (O étant le milieu de AC et OX étant aligné sur AC et orienté comme $\overrightarrow{AC}$) l'équation des paraboles admettant la diagonale BD comme directrice et le point A comme foyer, dans le cas où $BD = 40$ et $AC = 50$.



A. $A_1 = D_1$ par hypothèse.

$D_1 = B_1$ car les triangles rectangles BPC et DPC sont égaux

(PC est commun et $|PD| = |PB|$ par hypothèse).

Or A_1 et B_2 sont complémentaires. Donc $B_1 + B_2 = 90°$.

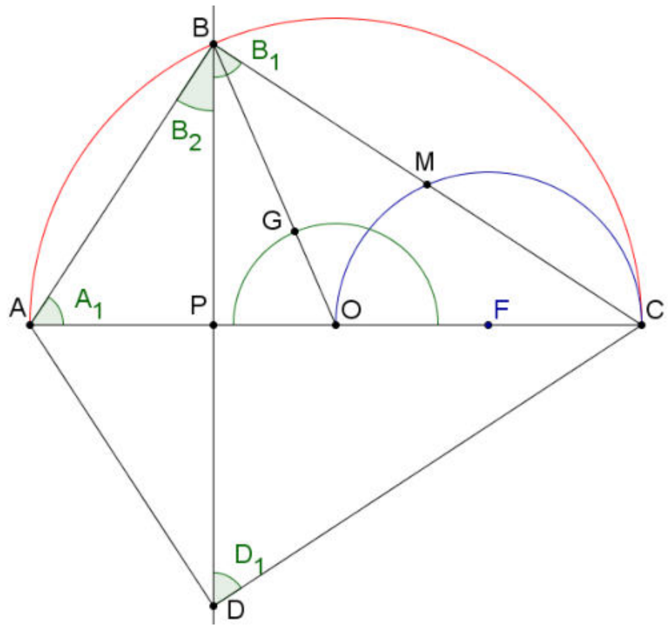
B regarde donc AC selon un angle droit. Le lieu de B est donc un demi-cercle de diamètre AC.

B. Le point M, étant le milieu de BC, est l'image de B selon l'homothétie de centre C et de rapport 1/2. Le lieu de M est donc un demi-cercle de diamètre $AC/2$ et de centre F (avec $CF = CA/4$).

C. Soit O le milieu de AC. Le point G est situé sur la médiane OB au 1/3 en partant de O.

G est donc l'image de B selon l'homothétie de centre O et de rapport 1/3.

Le lieu de G est le demi-cercle de centre O et de rayon $AC/3$.

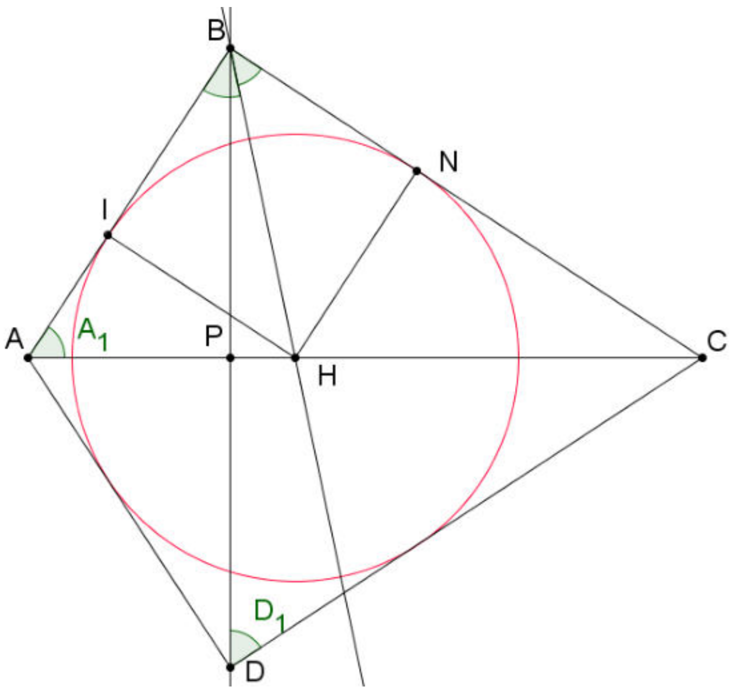


D. Si ce cercle existe, son centre est sur AC puisque AC est un axe de symétrie du quadrilatère.

Soit H l'intersection de la bissectrice de B et de AC.

Donc H est le centre d'un cercle tangent aux côtés.

Par symétrie, ce cercle sera aussi tangent aux côtés AD et DC.



E. Il faut d'abord déterminer l'abscisse du point P. Pour cela déterminons les valeurs possibles de l'angle A_1 $\left(\text{ou } D_1\right)$.

$$|AC| = |AP| - |PC| = \frac{|BP|}{\tan A_1} + |DP|.\tan D_1 \rightarrow |AC|.\tan A_1 = |BP| + |DP|.\tan A_1$$

$$\rightarrow 5\tan A_1 = 2 + 2\tan^2 A_1 \rightarrow 2\tan^2 A_1 - 5\tan A_1 + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \tan \widehat{A_1 = 2} \\ \tan \widehat{A_1 = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

<u>1er cas : $\tan \widehat{A_1 = 2}$</u>

$$|AP| = \frac{|BP|}{\tan A_1} = \frac{20}{2} = 10.$$ La directrice a alors pour équation : $y = -15$

Un parabole est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice :

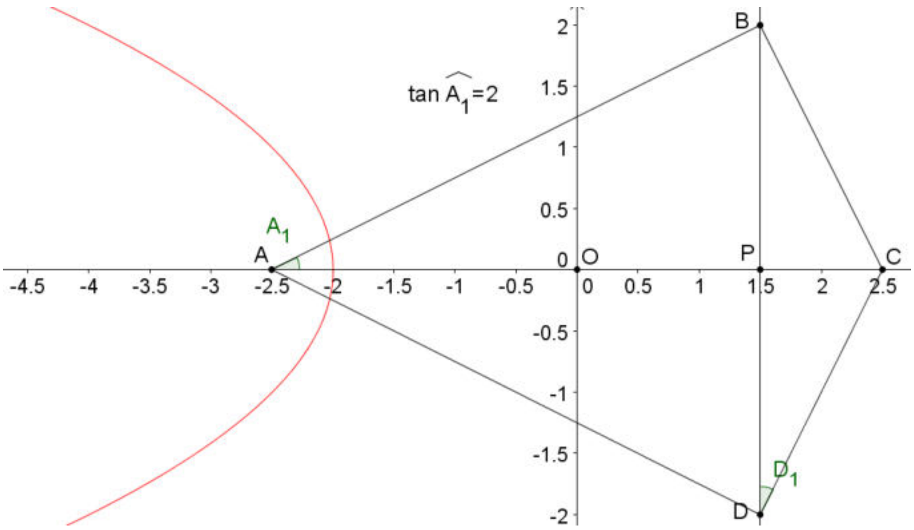
$$(x+25)^2 + y^2 = (x+15)^2 \rightarrow \boxed{x = -\frac{y^2+400}{20}}$$

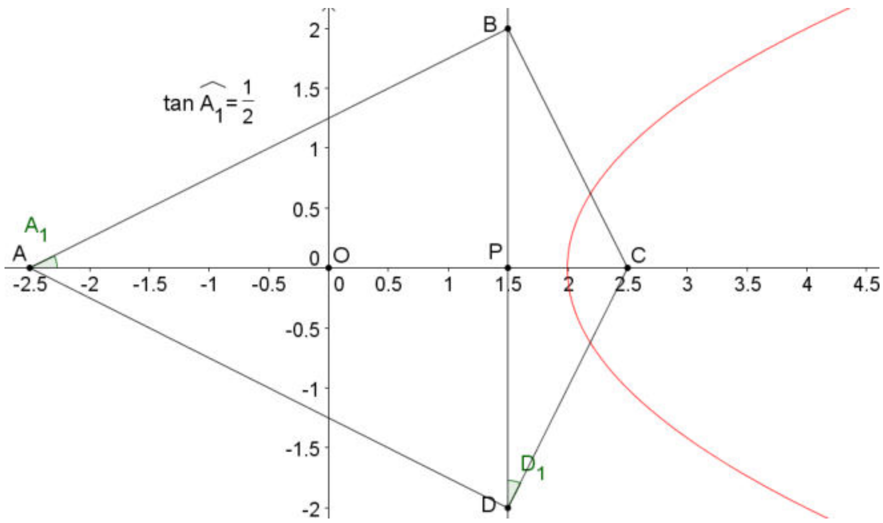
<u>1ème cas : $\tan \widehat{A_1 = 1/2}$</u>

$$|AP| = \frac{|BP|}{\tan A_1} = \frac{20}{1/2} = 40.$$ La directrice a alors pour équation : $y = +15$

Un parabole est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice :

$$(x-25)^2 + y^2 = (x-15)^2 \rightarrow \boxed{x = +\frac{y^2+400}{20}}$$





Le 16 aout 2009.

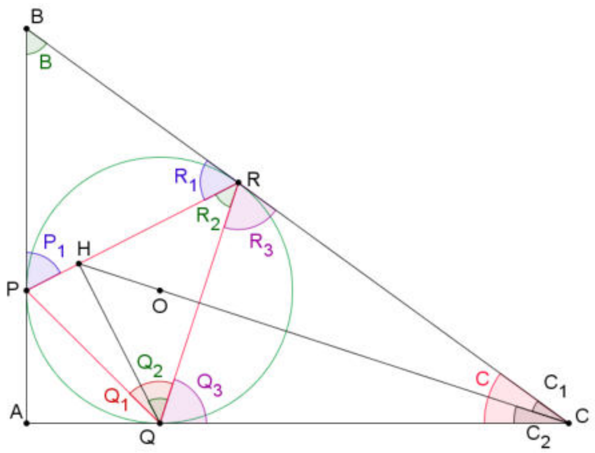
EXGSP139 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 10.

On considère un triangle ABC rectangle en A. Le centre du cercle inscrit à ce triangle est noté O. Ce cercle rencontre les côtés $[AB]$,$[AC]$ et $[BC]$ du triangle en trois points notés respectivement P,Q et R.

Dans le triangle PQR, le pied de la hauteur issue de Q est noté H.

1) Déterminer la valeur de l'angle PQR.

2) Démontrer que les points O,C et H sont alignés.



a) Soit donc $\widehat{PQR} = \widehat{Q_1}$

$\widehat{P_1}$ et $\widehat{R_1}$ sont deux angles tangentiels qui interceptent le même arc : $\widehat{P_1} = \widehat{R_1}$

Donc dans le triangle BPR : $\widehat{B} + \widehat{P_1} + \widehat{R_1} = \pi \qquad (1)$

Or l'angle inscrit $\widehat{Q_1}$ intercepte le même arc que $\widehat{P_1}$ et $\widehat{R_1}$: $\widehat{P_1} = \widehat{R_1} = \widehat{Q_1}$

La relation (1) s'écrit : $\widehat{B} + 2\widehat{Q_1} = \pi \Rightarrow \widehat{Q_1} = \dfrac{\pi - \widehat{B}}{2}$

b) Appliquons cette relation à l'angle $\widehat{R_2} \rightarrow \widehat{R_2} = \dfrac{\pi - \widehat{A}}{2} = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Le triangle rectangle QHR est donc aussi isocèle $\Rightarrow |HR| = |HQ|$ et $\widehat{Q_2} = \widehat{R_2}$

D'autre part, le triangle CQR est isocèle puisque CR et CQ sont deux tangentes issues d'un même point C. $\Rightarrow |RC| = |QC|$ et $\widehat{R_3} = \widehat{Q_3}$.

Considérons maintenant les triangles HRC et HQC. Ils sont isométriques car ils ont un angle égal $\left(\widehat{R_2} + \widehat{R_3} = \widehat{Q_2} + \widehat{Q_3}\right)$ compris entre deux côtés égaux ($|HR| = |HQ|$ et $|RC| = |QC|$).

Nous concluons que les angles $\widehat{C_1}$ et $\widehat{C_2}$ sont égaux. H est alors situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$. Comme O est aussi sur cette bissectrice puisque le centre du cercle inscrit est le point de rencontre des bissectrices, O,H et C sont alignés.

Le 30 septembre 2010.