Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 15

EXGSP150 – EXGSP159

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Aout 2012

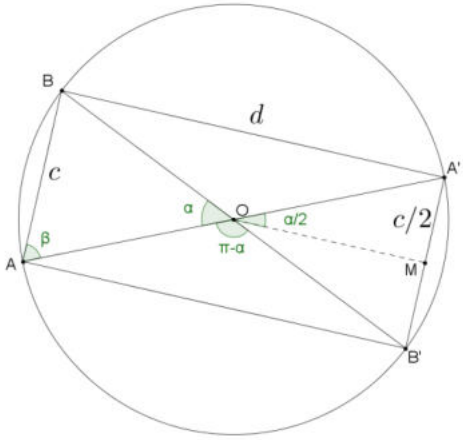
EXGSP150 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012

Soient AA' et BB' deux diamètres d'un cercle de centre O et de rayon R. Les angles au centre qui interceptent les cordes AB et $A'B'$ sont égaux et valent α.

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et propre.
2. Quelle est la nature du quadrilatère (A, B, A', B')?
3. Exprimer l'aire du quadrilatère ainsi que son périmètre en fonction de R et α uniquement.
4. Quelle est la valeur maximale de l'aire du quadrilatère? A quelle valeur de α correspond-t-elle?
5. Pour quelle valeur de α le quadrilatère est-il un rectangle dont le rapport longueur par largeur vaut $\sqrt{3}$?

NB. Pour les points 2 à 5, justifier les réponses en toutes généralités. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François



2. Le quadrilatère est un rectangle car les 4 angles au sommet sous tendent un demi cercle.

3. Dans le triangle $OA'M$: $\frac{c}{2} = R\sin\frac{\alpha}{2}$. D'où $c = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. De même $d = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ périmètre $= 4R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$; aire $= cd = 4r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2R^2\sin\alpha$

4. Cette aire est maximum lorsque $\sin\alpha = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas le rectangle est un carré. $c = d = R\sqrt{2}$.

5. Si $\frac{d}{c} = \sqrt{3}$, alors $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30° \Rightarrow \alpha = 60°$.

Rem : dans le triangle ABA', $\frac{d}{c} = \tan\beta$ et dès lors $\beta = 60° \Rightarrow \alpha = \pi - 2\beta = 60°$

Le 26 novembre 2012.

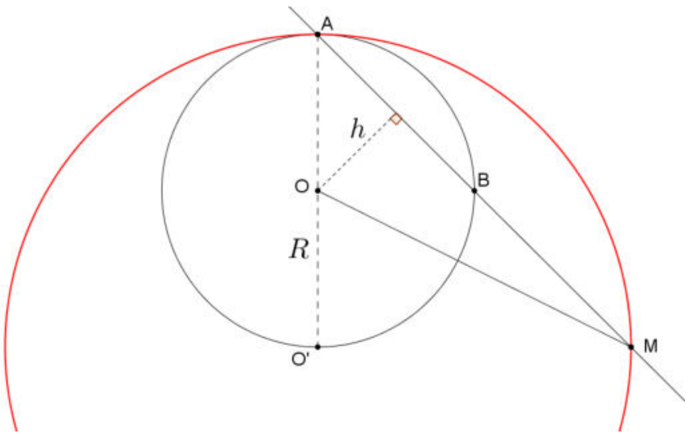
EXGSP151 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Soit un cercle de centre O et de rayon R. A partir d'un point fixe A du cercle, on trace une droite D qui coupe le cercle en un point B. Soit M le point de D tel que B soit le milieu du segment $[A,M]$

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.
2. Déterminer le lieu des points décrits par le point M.
3. Exprimer l'aire du triangle (A,O,M) en fonction de R et de la longueur AB uniquement. On note T cette aire.
4. On note S l'aire du disque de centre O et de rayon R. Calculer la valeur maximale du rapport T/S. Pour quelle valeur de AB est-elle atteinte?

NB. Pour les points 2 à 4, justifier les réponses en toute généralité. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



2. L'homothétie de centre A (fixe) et de rapport 2 envoie B sur M. Lorsque B parcourt un cercle de centre O et de rayon R alors M parcourt un cercle de centre O' et de rayon $2R$.

3. $T =$ aire du triangle AOM de base AM et de hauteur h

$$T = \frac{1}{2}.2\overline{AB}\sqrt{R^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} \qquad \text{Notons : } x = \overline{AB} \Rightarrow T = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}$$

4. $S = \pi R^2$

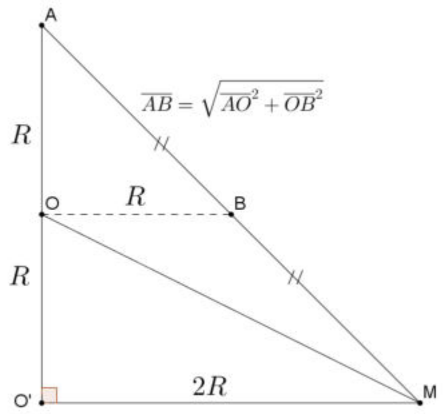
Maximum de $\dfrac{T}{S} = \dfrac{\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} = \dfrac{x\sqrt{4R^2 - x^2}}{2\pi R^2}$

$$\frac{d(T/S)}{dx} = \ldots = \frac{2R^2 - x^2}{4\pi R^2\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

x	0		$\sqrt{2}R$		$2R$
$\frac{d(T/S)}{dx}$		$+$	0	$-$	
T/S		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Conclusion : $\boxed{\text{Max de } T/S \text{ vaut } \frac{1}{\pi}}$

Commentaire de Louis François



Au point 4, on demande le maximum du rapport T/S. Sachant que $S = \pi R^2$ est constant, il suffit de maximiser T.

Or le triangle AOM a un base constante $\overline{OA} = R$; par conséquent le maximum de l'aire sera obtenu lorsque la hauteur sera maxmum. Cette hauteur est celle issue de M, perpendiculaire au côté OA. Elle sera maximum lorsuqe MO' sera perpendiculaire à $O'A$. Dans ce cas $h = 2R$.

$$T = \frac{1}{2}.OA.2R = \frac{1}{2}.R.2R = R^2$$

$$\frac{T}{S} = \frac{R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2}R$$

Le 16 septembre 2013.

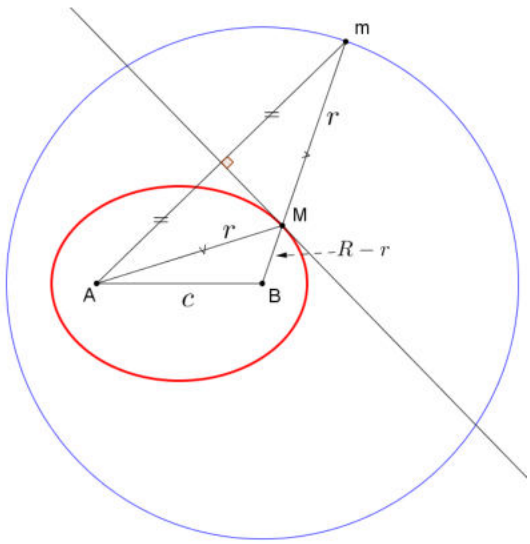
EXGSP152 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013, série 2.

On considère deux points fixes A et B distants de c, et un cercle de centre B et de rayon $R > c$.
A partir du point A, on trace une droite qui coupe le cercle en un point m.
On trace ensuite la médiatrice du segment $[A,m]$ qui coupe le segment $[B,m]$ en un point milieu M.

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.
2. Déterminer le lieu des points décrits par le point M.
3. On note r la distance entre A et M. On note T l'aire du triangle (A,B,M).
   Exprimer T en fonction de r, R et c uniquement.
4. Calculer la valeur de T. Pour quelle valeur de r est-elle atteinte? Illustrer la solution sur le dessin du point 1.

NB. Pour les points 2 à 4, justifier les réponses en toute généralité. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

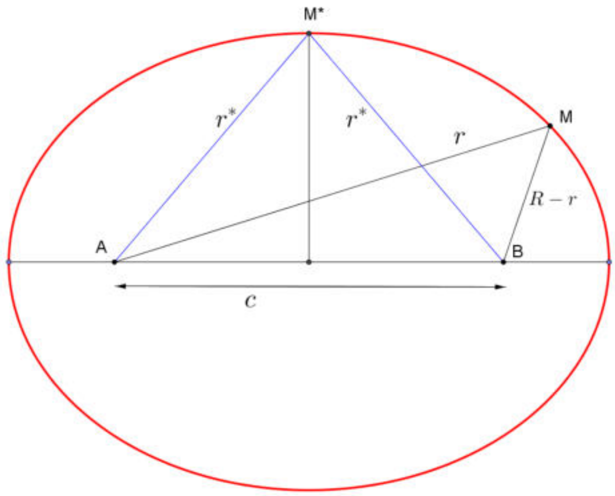
Solution proposée par Nicole Berckmans



2) Le triangle AmM étant isocèle, on a : $\overline{AM} + \overline{MB} = R$

Le lieu de M est donc une ellipse de foyers A et B.

Note : c'est précisément une méthode de construction des ellipses.



3) Une formule de géométrie donne T en fonction de $a,b,c,$ les côtés du triangle $(2p=a+b+c)$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ici cela donne : $T=\sqrt{\left(\frac{R+c}{2}\right)\left(\frac{R+c}{2}-r\right)\left(\frac{R+c}{2}-R+r\right)\left(\frac{R+c}{2}-c\right)}$

$$T=\ldots=\frac{1}{4}\sqrt{\left(R^2-c^2\right)\left(c^2-(R-2r)^2\right)}$$

4) Les triangles ABM ont une base $\overline{AB}=c,$ constante donc l'aire sera maximale lorsque la hauteur sera maximum, càd lorsque $M=M^*$ est un sommet de l'ellipse càd lorsque

$$R-r^*=r^*\Rightarrow \boxed{r^*=R/2}\Rightarrow \boxed{T^*_{Max}=\frac{c}{4}\sqrt{R^2-c^2}}$$

Le 16 septembre 2013.

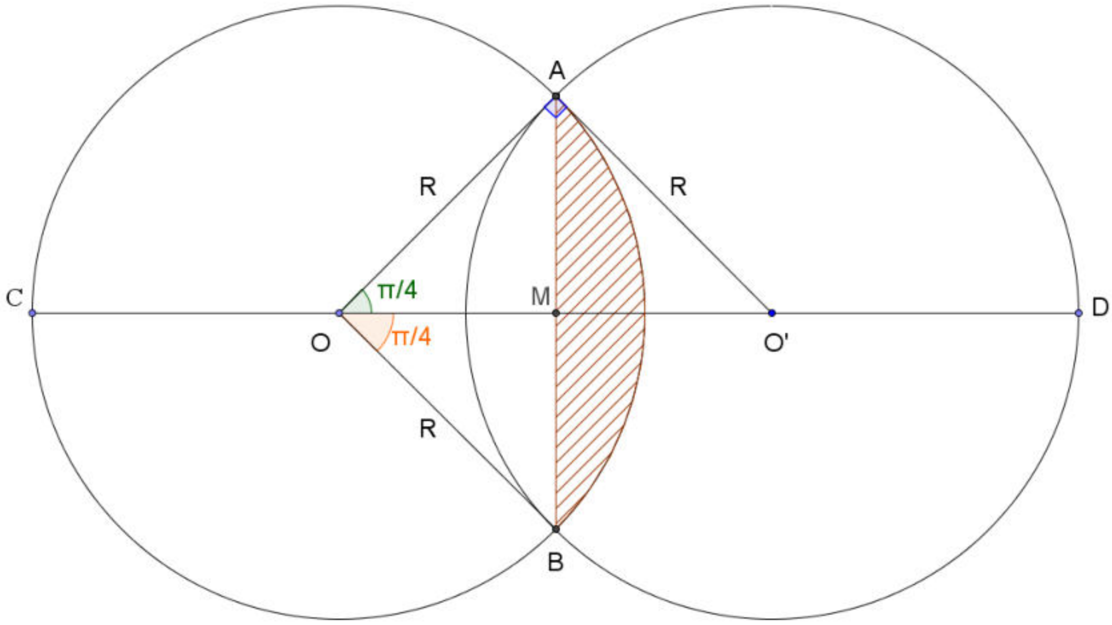
EXGSP153 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2013.

Deux disques de même rayon R sont contenus dans un même plan et leurs centres respectifs O et O' sont distants de $R\sqrt{2}$. On note S la surface obtenue par l'union des deux disques.

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.
2. Exprimer l'airee de S en fonction de R uniquement.
3. On note L la distance entre deux points extrêmes de S situés sur la droite (OO'). Exprimer L en fonction de R uniquement.
4. On considère deux solides. Le premier est un cylindre de base S et de hauteur H, Le second est un parallèlépipède de dimensions L, R et H^*. Les deux solides ont même volume. Exprimer H^* en fonction de H uniquement.

NB. Justifier les réponses 2 à 4 en toute généralité. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Louis François



2) Comme $\overline{OO'} = R\sqrt{2}$, le triangle OAO' est rectangle en A et isocèle : $AOO' = \pi/4$.

Comme AB est un axe de symétrie : $AOBO'$ est un carré $\Rightarrow \overline{OM} = \overline{MA} = R\sqrt{2}/2$

Aire hachurée $= \dfrac{1}{4}$ cercle $-$ aire $\Delta OAB = \dfrac{\pi R^2}{4} - \dfrac{1}{2}.R\sqrt{2}.\dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$

$$\Rightarrow S = 2\pi R^2 - 2.\frac{R^2}{4}(\pi - 2) \Rightarrow \boxed{S = \frac{R^2}{2}(3\pi + 2)}$$

3) $L = \overline{CD} = 2\left(\overline{CO} + \overline{OM}\right) = 2\left(R + \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{L = R\left(2 + \sqrt{2}\right)}$

4) $\left.\begin{array}{l} V_{cyl} = S.H \\ V_{pp} = L.2R.H^* \end{array}\right\} \Rightarrow L.2R.H^* = S.H \Rightarrow R\left(2+\sqrt{2}\right).2R.H^* = \dfrac{R^2}{2}(3\pi + 2).H$

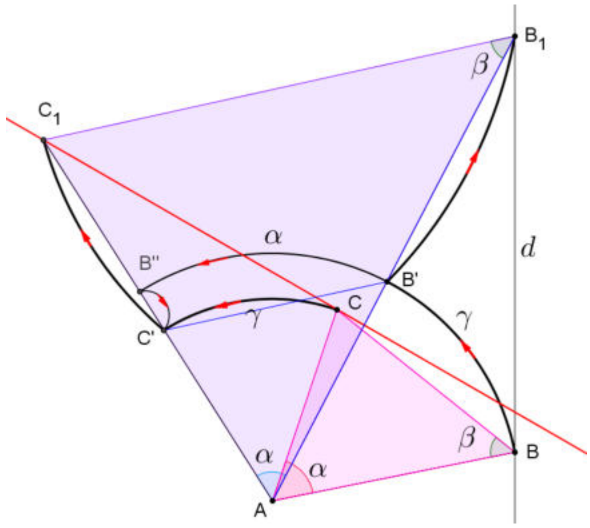
$$\Rightarrow \boxed{H^* = \frac{(3\pi + 2)}{4\left(2+\sqrt{2}\right)}H = \frac{1}{8}(3\pi + 2)\left(2 - \sqrt{2}\right)H}$$

Le 16 septembre 2013.

EXGSP154 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Un triangle ABC peut se déformer en tournant autour de son sommet fixe A. Dans l'gypothèse où se triangle reste semblable à lui-même, déterminez le lieu géométrique de C si B décrit une droite fixe. Construisez ce lieu.

Résolution utilisant les symétries



Soit le triangle ABC avec B sur la droite d. Soit $\alpha = BAC$. Déplaçons B en B_1 et construisons le triangle AB_1C_1 semblable au triangle ABC.

Soit $\gamma = BAB_1$. Faisons la rotation de centre A et d'angle γ du triangle ABC. on obtient le triangle $AB'C'$ avec $\text{Rot}_{A,\gamma}(B) = B' \in AB_1$ et $\text{Rot}_{A,\gamma}(C) = C' \in AC_1$ $\quad (1)$.

Les triangles ABC et $AB'C'$ sont isométriques puisque les rotations conservent les longueurs des segments et l'amplitude des angles. On a donc $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = r_1 \quad (2)$

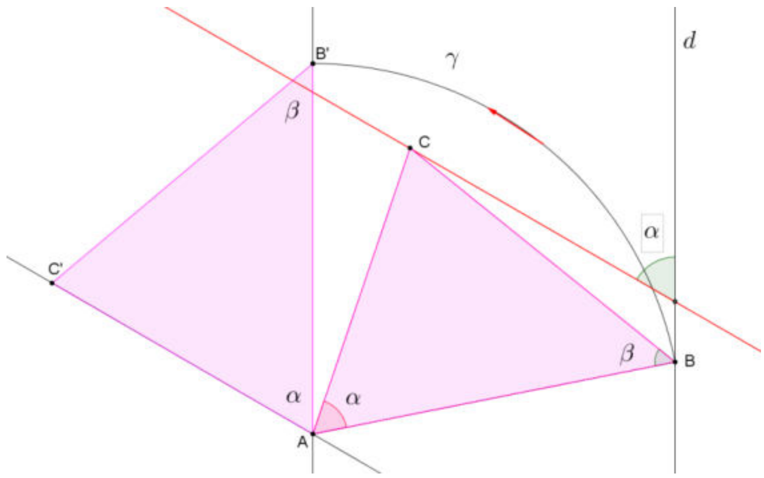
Faisons la rotation de centre A et d'angle $\alpha + \gamma$ de B : $\text{Rot}_{A,\alpha+\gamma}(B) = B'' \in AC_1 \quad (3)$

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AB'} = \overline{AB''}$. (2) devient $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB''}} = r_1$. C' est donc l'image de B'' selon l'homothétie de centre A et de rapport r_1 : $\mathscr{H}_{A,r_1}(B'') = C' \quad (4)$

D'autre part comme les triangles ABC et AB_1C_1 sont semblables et que les triangles ABC et $AB'C'$ sont égaux : $\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AC'}} = r_2$. C_1 est donc l'image de C' selon l'homothétie de centre A et de rapport r_2 : $\mathscr{H}_{A,r_2}(C') = C_1 \quad (5)$.

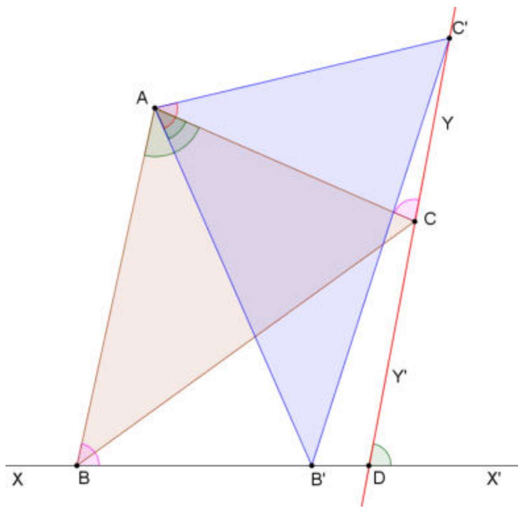
De (4) et (5), on tire $\mathscr{H}_{A,r_1 \cdot r_2}(B'') = C_1$. Et avec (3) : $\mathscr{H}_{A,r_1 \cdot r_2}\left(\text{Rot}_{A,\alpha+\gamma}(B)\right) = C_1$.

C_1 est donc l'image de B selon une rotation suivie d'une homothétie. Lorsque B décrit la droite d, C décrit alorsune droite puisque les rotations et les homthéties d'une droite sont une droite.



Déterminons l'angle entre la droite d et la droite du lieu de C.
Envoyons B à l'infini. Dans ce cas, AB_1 sera une droite parallèle à d.
C_1 est aussi à l'infini dans la direction AC' formant un angle α avec d.
La droite lieu de C forme donc un angle α avec d.

Résolution selon DALLE édition 1961 pages 479-481



Lieu du sommet C lorsque le point B parcourt la droite XX'

Par le point C, traçons la droite YY' qui forme avec XX' un angle $CDX' = BAC$. Je dis que la droite YY' est le lieu demandé.

Supposons que : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{m}{n}$. Traçons AB' quelconque; puis faisons l'angle $\overline{B'AC} = \overline{BAC}$ et tirons $B'C'$/ Pour montrer que YY' est le lieu du point C, lorsque le triangle tourne autour du sommet A, il suffit d'établir que : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AC'}} = \frac{m}{n}$.

Or le quadrilatère $ABDC$ est inscriptible puisque les angles opposés sont supplémentaires; partant les angles $\overline{ABD}$ et $\overline{ACC'}$ sonr égaux. De plus, puisque les angles $\overline{BAC}$ et $\overline{B'AC'}$ sont égaux par construction, en leur retranchant la partie commune $\overline{B'AC}$, on a l'angle $\overline{BAB'} = \overline{CAC'}$. En conséquence, les triangles BAB' et CAC' sont semblables; d'où

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{m}{n}$$

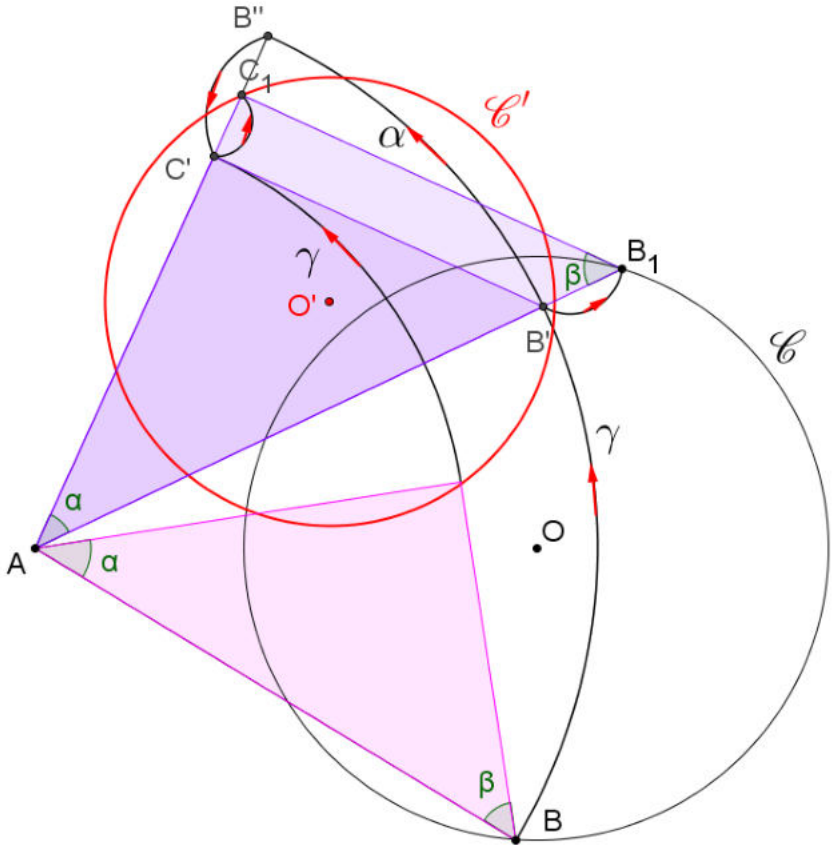
Le lieu du point C est donc la droite menée par un point quelconque du lieu et formant avec XX' un angle $\overline{CDX'} = \overline{BAC}$

Le 23 septembre 2013

EXGSP155 – FA FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Un triangle ABC peut se déformer en tournant autour de son sommet fixe A.
Dans l'gypothèse où se triangle reste semblable à lui-même, déterminez le lieu géométrique de C si B décrit un cercle fixe. Construisez ce lieu.

Résolution utilisant les symétries



Soit le triangle ABC avec B sur le cercle $\mathscr{C}$. Soit $\alpha = \widehat{BAC}$. Déplaçons B en B_1 et construisons le triangle AB_1C_1 semblable au triangle ABC.

Soit $\gamma = \widehat{BAB_1}$. Faisons la rotation de centre A et d'angle γ du triangle ABC. on obtient le triangle $AB'C'$ avec $\text{Rot}_{A,\gamma}(B) = B' \in AB_1$ et $\text{Rot}_{A,\gamma}(C) = C' \in AC_1$ $\quad(1)$.

Les triangles ABC et $AB'C'$ sont isométriques puisque les rotations conservent les longueurs des segments et l'amplitude des angles. On a donc $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = r_1$ $\quad(2)$

Faisons la rotation de centre A et d'angle $\alpha + \gamma$ de B : $\text{Rot}_{A,\alpha+\gamma}(B) = B'' \in AC_1$ $\quad(3)$

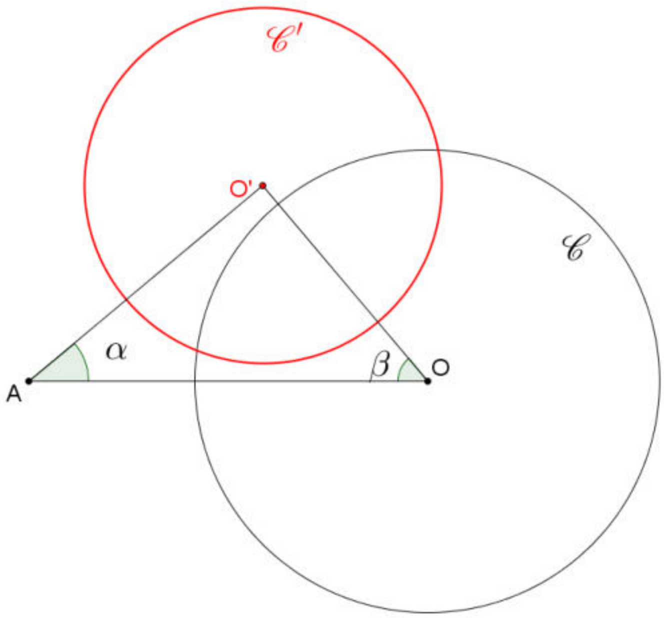
$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AB'} = \overline{AB''}$. (2) devient $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB''}} = r_1$. C' est donc l'image de B'' selon l'homothétie de centre A et de rapport r_1 : $\mathscr{H}_{A,r_1}(B'') = C'$ $\quad(4)$

D'autre part comme les triangles ABC et AB_1C_1 sont semblables et que les triangles ABC et $AB'C'$ sont égaux : $\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AC'}} = r_2$. C_1 est donc l'image de C' selon l'homothétie de centre A et de rapport r_2 : $\mathscr{H}_{A,r_2}(C') = C_1$ $\quad(5)$.

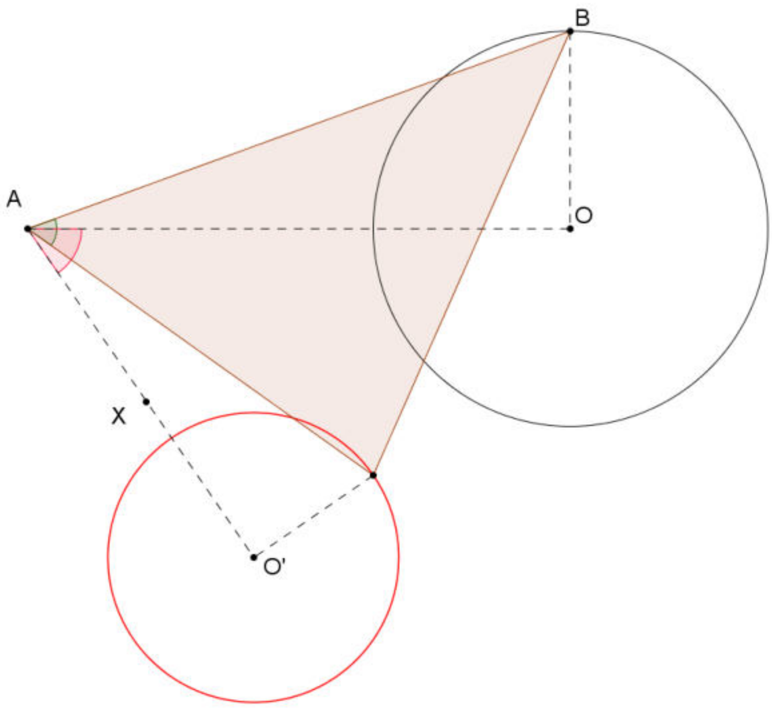
De (4) et (5), on tire $\mathscr{H}_{A,r_1 \cdot r_2}(B'') = C_1$. Et avec (3) : $\mathscr{H}_{A,r_1 \cdot r_2}\left(\text{Rot}_{A,\alpha+\gamma}(B)\right) = C_1$.

C_1 est donc l'image de B selon une rotation suivie d'une homothétie. Lorsque B décrit le cercle $\mathscr{C}$, C décrit alors un cercle $\mathscr{C}$ puisque les rotations et les homothéties d'un cercle sont un cercle.

Le centre de $\mathscr{C}'$ est telle que $\text{Rot}_{A,\alpha}(O) = O'$. Le triangle AOO' est semblable au triangle ABC



Résolution selon DALLE édition 1961 pages 479-481



Lieu du sommet C lorsque le point B parcourt la circonférence de centre O.

Tirons AO, OB et faisons l'angle $OAX = BAC$, l'angle donné. Déterminons ensuite sur AX un point O' tel que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AO'}} = \frac{m}{n}$ et traçons $O'C$.

Tout d'abord, puisque AO a une direction fixe, AO' aura aussi une direction fixe et le point O' est invaribale, comme le point O.

D'autre part, les triangles OAB et $O'AC$ sont semblables, parce qu'ils ont un angle égal compris antre côtés proportionnels; d'où

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{CO'}} = \frac{m}{n} \text{ ou } \overline{CO'} = \frac{n}{m}.\overline{OB}$$

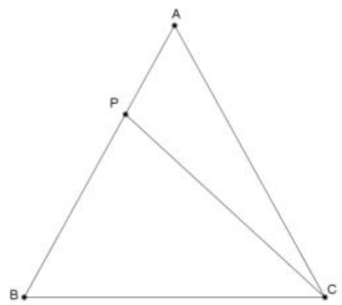
Partant CO' a une longueur constante. Le lieu du point C est donc la circonférence décrite avec O' pou centre et $\left(\frac{n}{m}.\overline{OB}\right)$ pour rayon

Le 23 septembre 2013

EXGSP156 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

On considère un triangle ABC isocèle en A (c'est-à-dire que l'on a $|AB|=|AC|$, où $|XY|$ désigne la longueur d'un segment $[XY]$). Soit P un point situé sur le côté $[AB]$ de ce triangle. Démontrer que l'on a :

$$|PC|^2-|PB|^2=\frac{|AP|}{|AB|}.|BC|^2$$



Transformons le premier membre de l'égalité :

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2&=\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{PB}^2=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}\right)^2-\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}\right)^2\\&=\cancel{\overrightarrow{PA}^2}+2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{AC}+\underbrace{\cancel{\overrightarrow{AC}^2}}_{=|AC|^2=|AB|^2=\overrightarrow{AB}^2}-\cancel{\overrightarrow{PA}^2}-2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{AB}-\cancel{\overrightarrow{AB}^2}\\&=2\overrightarrow{PA}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)=2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

L'expression a vérifier devient alors :

$$|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2=\frac{|AP|}{|AB|}|BC|^2\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{BC}=\frac{|AP|}{|AB|}\overrightarrow{BC}^2\Leftrightarrow 2\frac{\overrightarrow{PA}}{|AP|}.\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|AB|}.\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\overrightarrow{PA}}{|AP|}.\overrightarrow{BC}=\frac{\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)}{|AB|}.\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 2\frac{\overrightarrow{PA}}{|AP|}.\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{BA}}{|AB|}.\overrightarrow{BC}+\underbrace{\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}}_{\text{car }|AB|=|AC|}.\overrightarrow{BC}$$

Or $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|AP|}$ et $\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|AB|}$ sont des vecteurs unitaires orientés selon $\overrightarrow{BA}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ est un vecteur unitaire orienté selon $\overrightarrow{AC}$.

Dès lors

$\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|AP|}.\overrightarrow{BC}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur BA

$\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|AB|}.\overrightarrow{BC}$ est également la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur BA

$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}.\overrightarrow{BC}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur CA

Comme le triangle ABC est isocèle, les projections orthogonales de $\overrightarrow{BC}$ sur BA et CA sont égales; ce qui démontre l'égalité

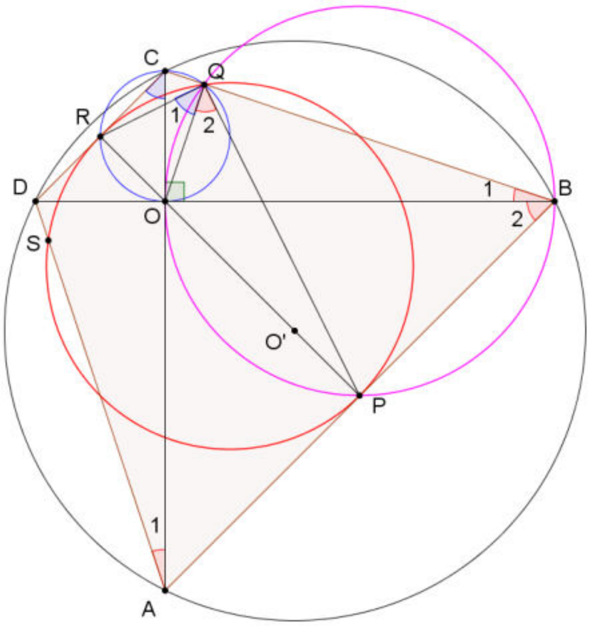
Le 13 octobre 2013.

EXGSP157 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ inscrit dans un cercle, dont les diagonales AC et BD sont perpendiculaires. On note O le point d'intersection de ces diagonales et P, Q, R et S les projections orthogonales respectives du point O sur les droites AC, BC, CD et DA.

a) Démontrer que la droite OQ est bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$

b) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est inscriptible dans un cercle.



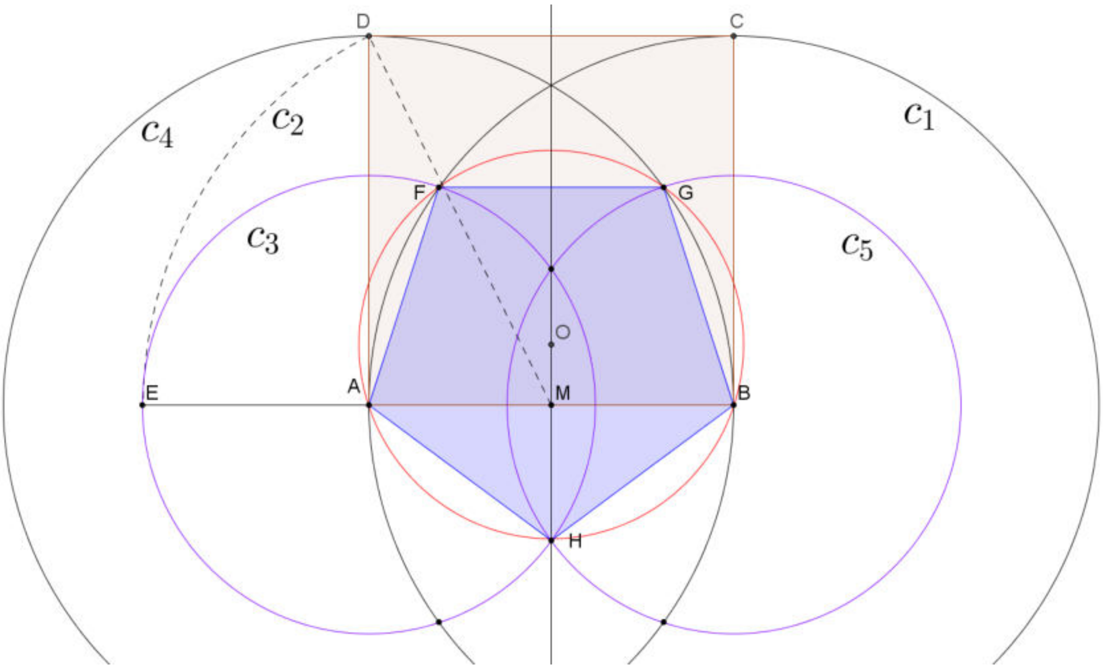
a) Les angles inscrits B_1 et A_1 interceptent le même arc. Ils sont donc égaux. Dès lors, les triangles rectangles DOA et OCB sont égaux et $\overline{OC} = \overline{OD}; \overline{OB} = \overline{CA}$. Par conséquent, les triangles rectangles DOC et OBA sont isocèles et donc $\widehat{C} = \widehat{B_2} = 45°$.
D'autre part, $OR \perp DC$ et $OQ \perp CB$. Donc le quadrilatère $OQCR$ est inscriptible dans un cercle. On en déduit que l'angle $\widehat{Q_1} = 45°$ puisqu'il intercepte le même arc que $\widehat{C}$.
On démontre de même que $\widehat{Q_2} = 45°$. OQ est donc le bissectrice de l'angle $\widehat{RQP}$ et de plus le triangle RQP est rectangle en Q.

b) De même on démontre *mutatis mutandis* que le triangle RSP est rectangle en S.
Le quadrilatère $PQRS$ est donc inscriptible dans un cercle.

EXGSP158 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Soit le carré $ABCD$. Soit M le milieu de AB. Tracer le cercle c_1 de centre B et de rayon AB. Tracer l'arc de cercle c_2 de centre M et de rayon MD qui coupe la demi-droite MA en E. Tracer le cercle c_3 de centre A et de rayon AE. c_1 et c_3 ont une intersection F située dans le carré $ABCD$. Par symétrie, on pourrait trouver le point G, intersection des cercles c_4 (de centre A et de rayon AB) et c_5 (de centre B et de rayon AE), située dans le carré $ABCD$.
c_3 et c_5 ont une intersection H à l'extérieur du carré $ABCD$.
Construire la figure géométrique. Démontrer analytiquement que $AFGBH$ est un pentagone régulier.

Pour la construction du pentagone : voir EXGSP088



Considérons pour simplifier que le côté du carré vaut 1.

1) Δrect ADM : $\overline{DM} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \overline{EM} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AF} = \overline{FH} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2) Calculons l'angle $\widehat{ABF}$ à partir du triangle isocèle ABF : $\cos\widehat{ABF} = \dfrac{2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow \widehat{ABF} = 36°$. $\left(AF\right.$ est donc le côté d'un dodécagone convexe inscrit dans le cercle $\left.c_1\right)$

On en déduit que $\widehat{FAB} = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$.

3) Calculons l'angle $\widehat{AHB}$ dans le triangle isocèle AHB : $\cos\widehat{AHB} = \dfrac{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow \widehat{AHB} = 72°$ et $\widehat{BAH} = \widehat{ABH} = 108°$

4) Par conséquent : $\widehat{FAH} = \widehat{FAB} + \widehat{BAH} = 108°$, et par symétrie $\widehat{GBH} = 108°$

5) Considérons le pentagone $AHBGF$. Par symétrie les angles $\widehat{AFG}$ et $\widehat{FGB}$ sont égaux et on a $2\widehat{AFG} = 2\widehat{FGB} = 180° \times (5-2) - 3 \times 108° = 216°$ car la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est égale à $180°(n-2)$.

Conclusion : les 5 angles du pentagone sont égaux, c'est donc un pentagone régulier.

15 novembre 2013

EXGSP159 – FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2013.

On considère un pentagone régulier $ABCDE$ de côté c.

a) Calculer l'aire du pentagone.

b) Considérons maintenant l'étoile à 5 branches formée en reliant les sommets dans l'ordre $ACEBDA$. Calculer l'aire de la surface E délimitée par cette étoile.

Solution proposée par Dominique Druez

a) $Aire_{ABCDE} = 5Aire_{AOE} = 5\frac{1}{2}ac$

Angles au centre : $2\alpha = \frac{2\pi}{5}$

$$\text{tg}\frac{\pi}{5} = \frac{c\,/\,2}{a} \rightarrow a = \frac{c}{2\,\text{tg}\frac{\pi}{5}} = \frac{c}{2}\text{cotg}\frac{\pi}{5} \rightarrow Aire_{ABCDE} = \frac{5c^2}{4}\text{cotg}\frac{\pi}{5}$$

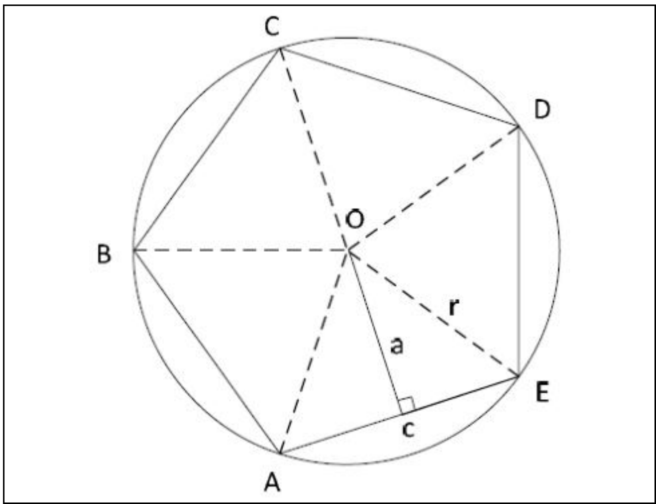
b) $Aire_{ACEBD} = Aire_{ABCDE} - 5Aire_{EDB'}$

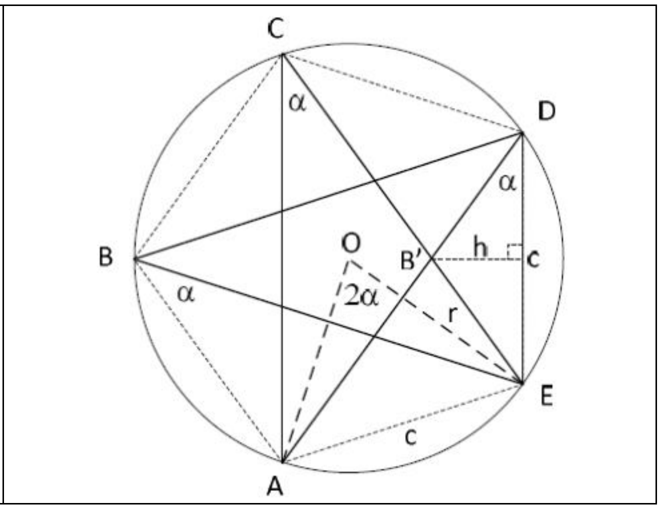
Les angles $A\hat{B}E$, $A\hat{C}E$ et $A\hat{D}E$ sont sous-tendus par le même arc AE et donc égaux, ils valent la moitié de l'angle au centre $\frac{2\pi}{5}$. Ces angles valent donc $\frac{\pi}{5}$.

$$Aire_{EDB'} = \frac{1}{2}hc$$

$$\text{tg}\frac{\pi}{5} = \frac{h}{c/2} \rightarrow h = \frac{c}{2}\text{tg}\frac{\pi}{5} \rightarrow \; Aire_{EDB'} = \frac{1}{2}\frac{c}{2}\text{tg}\frac{\pi}{5}c = \frac{c^2}{4}\text{tg}\frac{\pi}{5}$$

$$Aire_{ACEBD} = \frac{5c^2}{4}\left(\text{cotg}\frac{\pi}{5} - \text{tg}\frac{\pi}{5}\right)$$





Le 16 aout 2009.