Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 16

EXGSP160 – EXGSP169

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Septembre 2014

EXGSP160 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1

Dans le plan XY, on considère une droite d faisant un angle $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ avec l'axe des X et deux cercles $\mathscr{C}_i$ $(i=1$ ou $2)$ de centre O_i situés sur l'axe X, et de rayons $R_i > 0$ avec $R_2 > R_1$. $\mathscr{C}_i$ est tangent à la droite d en un point M_i, et $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents entre eux en un point P.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Exprimer R_2 en fonction de R_1 et α uniquement.

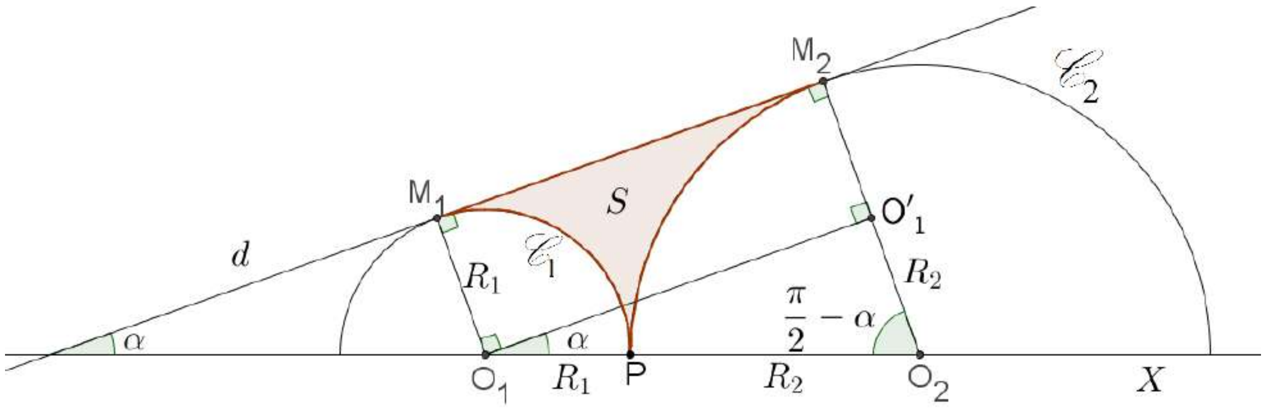
(3) Soit S la surface comprise entre le segment de droite M_1M_2 et les deux arcs de cercles $\overset{\frown}{M_1P}$ et $\overset{\frown}{M_2P}$. Exprimer en fonction de R_1 et α uniquement :

- l'aire de S,
- le périmètre de S.

(4) Pour quelle valeur de α a-t-on $R_2 = 3R_1$?

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Michel GOFFIN



(2) Dans le $\Delta(O_1, O'_1, O_2)$: $\sin\alpha = \dfrac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \Rightarrow R_2 \sin\alpha + R_1 \sin\alpha = R_2 - R_1$

$$\Rightarrow R_2(\sin\alpha - 1) = R_1(-1-\sin\alpha) \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} R_1}$$

(3) Par O_1 : droite // à M_1M_2 qui coupe M_2O_2 en O'_1.

$O'_1O_1O_2 = \alpha$; $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$, $\overline{O_2O'_1} = R_2 - R_1$

$(M_1M_2O'_1O_1)$: rectangle;

$$\overline{M_1M_2} = \overline{O_1O'_1} = \sqrt{(R_1+R_2)^2 - (R_2-R_1)^2} = 2\sqrt{R_1R_2} = 2R_1\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

Aire S = Aire trapèze $(O_1M_1M_2O_2)$ – aire secteur (O_1M_1P) – aire secteur (O_2M_2P)

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(R_1+R_2)}_{\substack{=R_1+\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}R_1 \\ =R_1\frac{2}{1-\sin\alpha}}} . \underbrace{\overline{M_1M_2}}_{=2R_1\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}} - \frac{1}{2}R_1^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \frac{1}{2}\underbrace{R_2^2}_{\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}R_1\right)^2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\boxed{\text{Aire } S = \frac{R_1^2}{2}\left[\frac{4}{1-\sin\alpha}\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^2\right]}$$

Périmètre de S= $\overline{M_1M_2} + \overset{\frown}{M_2P} + \overset{\frown}{PM_1} = 2R_1\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)R_1 + \left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)R_2$

$$\boxed{\text{Pér } S = R_1\left[2\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right]}$$

(4) $R_2 = 3R_1 \Rightarrow R_1\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = 3R_1 \Rightarrow 1+\sin\alpha = 3 - 3\sin\alpha \Rightarrow 4\sin\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{6}}$

Le 8 octobre 2014.

EXGSP161 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

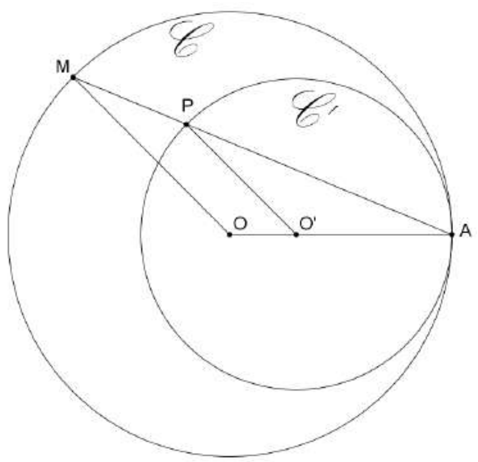
Dans un plan, trois points O, A et M sont tels que O et A sont fixes et distants de $R > 0$, et M décrit un cercle de centre O et de rayon R. Soit P un point situé sur le segment $[A, M]$ et tel que $\overline{AP} = \alpha \overline{AM}$ où la constante $\alpha \in]1, 0[$.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Déterminer le lieu des points décrits par P.

(3) Comparer les résultats obtenus dans les cas $\alpha = 1/2$ et $\alpha = \sqrt{2}/2$

Solution proposée par Michel Goffin



M parcourt le cercle de centre O et de rayon $R = OA$.

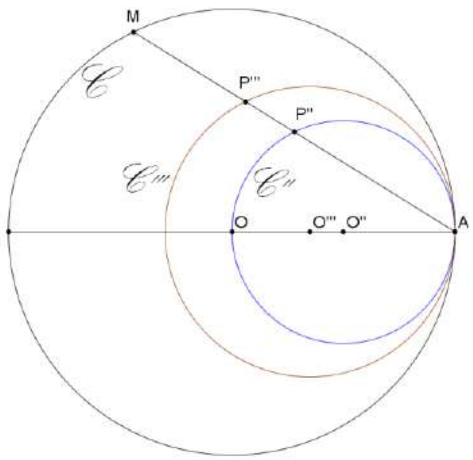
Soit $\mathscr{H}$, l'homothétie de centre A (fixe) et de rapport α qui envoie M sur P : $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AM}$

P décrit un cercle de centre O' et de rayon $R' = \alpha R$, $\overrightarrow{AO'} = \alpha \overrightarrow{AO}$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, alors $R'' = \frac{1}{2} R$.

Si $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $R''' = \frac{\sqrt{2}}{2} R$.

$\mathscr{C}''$ est à l'intérieur de $\mathscr{C}'''$, lui-même à l'intérieur de $\mathscr{C}$.



Le 8 octobre 2014.

EXGSP162 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Un polygone régulier convexe à N côtés $(N \geq 3)$ est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. Un autre cercle de centre O et de rayon h est inscrit au polygone.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis dans le cas : $N = 6$.

On revient au cas général $(N \geq 3)$. On note L le périmètre du polygone et A son aire, et on définit : $l_P = \dfrac{L}{2\pi R}$ et $a_P = \dfrac{A}{\pi R^2}$.

(2) Exprimer l_P en fonction de N uniquement. Calculer l_P dans les cas : $N = 3$, $N = 4$ et $N = 6$.

(3) Exprimer a_P en fonction de N uniquement. Calculer a_P dans les cas : $N = 3$, $N = 4$ et $N = 6$.

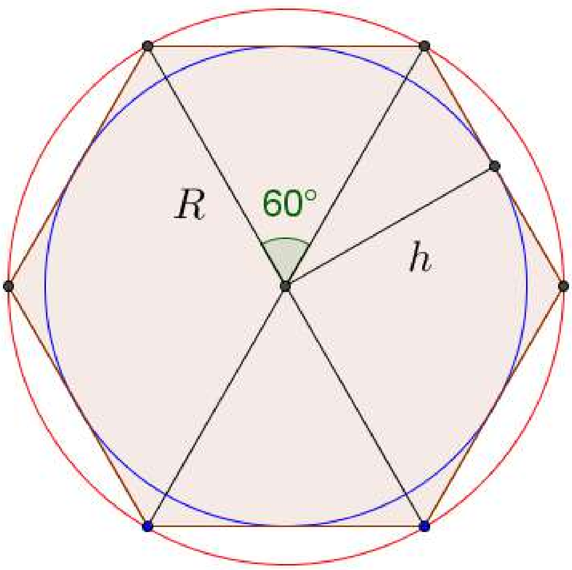
Une méthode approchée consiste à approximer L par la moyenne des périmètres des deux cercles, et A par la moyenne des aires des disques délimités par ces cercles.

On définit : $\widehat{l_P} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{h}{R}\right)$ et $\widehat{a_P} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{h^2}{R^2}\right)$

(4) Exprimer $\widehat{l_P}$ en fonction de N uniquement. Calculer $\widehat{l_P}$ dans les cas : $N = 3$, $N = 4$ et $N = 6$.

(5) Exprimer $\widehat{a_P}$ en fonction de N uniquement. Calculer $\widehat{a_P}$ dans les cas : $N = 3$, $N = 4$ et $N = 6$. Calculez les différences relatives entre ces valeurs et celle de a_P du point (3).

Solution proposée par Michel Goffin



Soit c le côté du polygone. On a $\frac{c}{2} = R\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \Rightarrow c = 2R\sin\frac{\pi}{N}$

D'autre part : $h = R\cos\frac{\pi}{N}$.

Donc : $l_P = \frac{L}{2\pi R} = \frac{Nc}{2\pi R} = \frac{N}{\pi}.\sin\frac{\pi}{N}$

$$a_P = \frac{A}{\pi R^2} = \frac{Nhc}{2\pi R^2} = \frac{NR\cos\frac{\pi}{N}.2R\sin\frac{\pi}{N}}{2\pi R^2} = \frac{N}{2\pi}.\sin\frac{2\pi}{N}$$

$$\widehat{l_P} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{N}\right)$$

$$\widehat{a_P} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{h^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2\frac{\pi}{N}\right)$$

Les valeurs relatives sont données par :

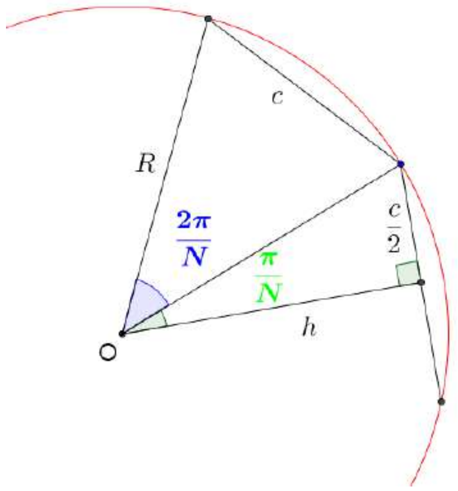
$$\frac{l_P - \widehat{l_P}}{l_P} = 1 - \frac{\widehat{l_P}}{l_P} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{N}\right)}{\frac{1}{\pi}N\sin\frac{\pi}{N}} = 1 - \frac{\pi}{2N}.\frac{1+\cos\frac{\pi}{N}}{N\sin\frac{\pi}{N}}$$

$$\frac{a_P - \widehat{a_P}}{a_P} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\left(1+\cos^2\frac{\pi}{N}\right)}{\frac{N}{2\pi}.\sin\frac{2\pi}{N}} = 1 - \frac{\pi}{N}.\frac{1+\cos^2\frac{\pi}{N}}{\sin\frac{2\pi}{N}}$$

On établit le tableau suivant :

N	3	4	6
l_P	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$
a_P	$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$
$\widehat{l_P}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
$\widehat{a_P}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{l_P - \widehat{l_P}}{l_P}$	0.0931	0.0519	0.0230
$\frac{a_P - \widehat{a_P}}{a_P}$	-0.5115	-0.1781	-0.0581

Note : Il est facile de montrer que $\lim_{N\to\infty}\frac{l_P - \widehat{l_P}}{l_P} = \lim_{N\to\infty}\frac{a_P - \widehat{a_P}}{a_P} = 0$



Le 8 octobre 2014.

EXGSP163 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2014.

Dans le plan rapporté au repère cartésien orthonormé OXY on considère une figure en à n marches escaliers $(n \geq 1)$, chacune étant définie par 3 points et leurs coordonnées. La première marche est définie par les points : $A_1(L,0)$, $B_1(L,H)$ et $A_2(2L,H)$, la deuxième marche par : A_2, $B_2(2L,2H)$ et $A_3(3L,2H)$, la troisième par : A_3, $B_3(3L,3H)$ et $A_4(4L,3H)$, et ainsi de suite pour les autres marches.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair dans le cas : $n=5$.

On revient au cas général $(n \geq 1)$, et on note S l'aire de la surface comprise entre les n premières marche (de 1 à n) et l'axe des X.

(2) Exprimer S en fonction de L, H et n uniquement. Calculer S dans les cas suivants : $n=5$, $n=10$ et $n=50$.

(3) On note S_i l'aire de la surface comprise entre le segment $[A_1, A_{n+1}]$ et l'axe des X. Exprimer S_i en fonction de L, H et n uniquement.

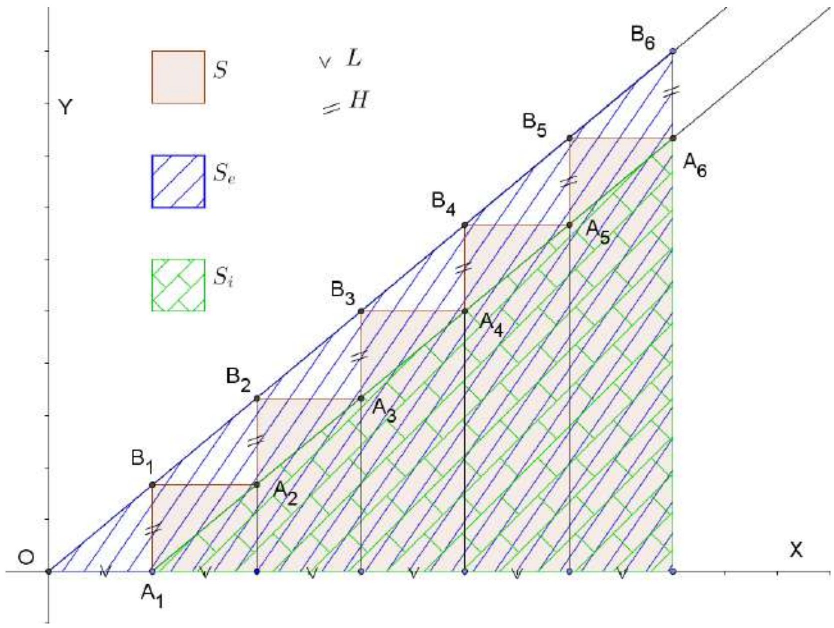
(4) On note S_e l'aire de la surface comprise entre le segment $[O, B_{n+1}]$ et l'axe des X. Exprimer S_e en fonction de L, H et n uniquement.

(5) Une méthode approchée consiste à approximer S par $\widehat{S} = \frac{1}{2}(S_i + S_e)$.

Calculer $\widehat{S}$ dans les cas suivants : $n=5$, $n=10$ et $n=50$.

Calculer les différences relatives entre ces valeurs et celle de S au point (2).

Solution proposée par Michel Goffin



$(2)\ S = LH + L(2H) + L(3H) + ... + L(nH) = LH(1+2+...+n) = LH\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$n = 5 \quad S = 15LH$$
$$n = 10 \quad S = 55LH$$
$$n = 50 \quad S = 1275LH$$

$(3)\ S_i = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{n^2 LH}{2}$

$(4)\ S_e = \dfrac{(n+1)^2 LH}{2}$

$(5)\ S = \dfrac{LH}{4}\left(n^2 + (n+1)^2\right) = \dfrac{LH}{4}\left(2n^2 + 2n + 1\right)$

$$\Rightarrow S - S = \frac{LH}{4}\left(n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\right) = \frac{LH}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S-S}{S} = \frac{\frac{LH}{4}}{LH\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

n	S	S	$\dfrac{S-S}{S}$
5	$15LH$	$\dfrac{61}{4}LH$	$\dfrac{1}{60}$
10	$55LH$	$\dfrac{221}{4}LH$	$\dfrac{1}{220}$
50	$1275LH$	$\dfrac{5101}{4}LH$	$\dfrac{1}{5100}$

Le 8 octobre 2014.

EXGSP164 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

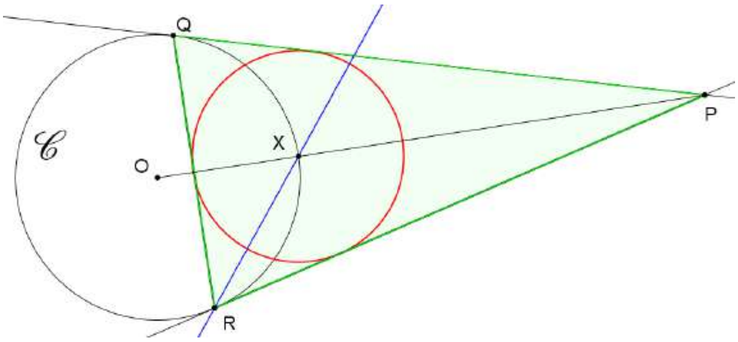
Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Par un point P extérieur à C', on mène deux tangentes à ce cercle, qui le rencontrent aux points de tangences Q et R.

(a) Démontrer que, dans le triangle PQR, la bissectrice issue de Q rencontre la droite OP en un point qui appartient à $\mathscr{C}$.

(b) On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre extérieur à $\mathscr{C}$ et ne possédant aucun point point commun avec $\mathscr{C}$.

Si le point P parcourt le cercle $\mathscr{C}$, le cercle $\mathscr{C}$ restant déterminer le lieu du centre du cercle inscrit au triangle PQR.

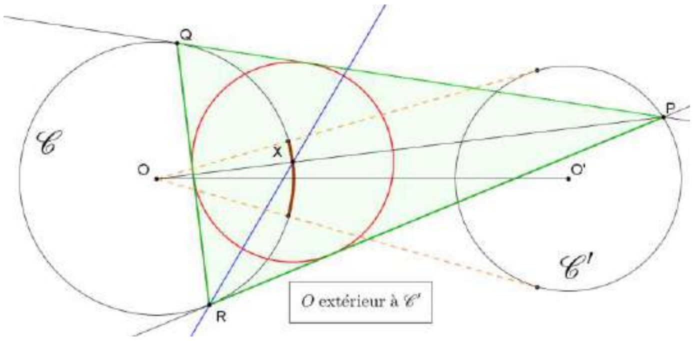
Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

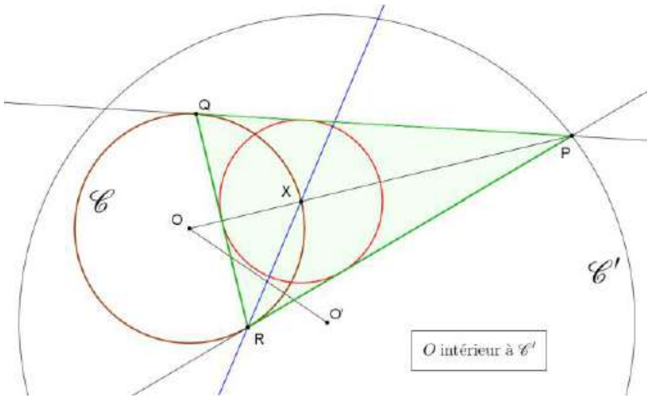


(a) Notons X le point d'intersection de la droite OP et du cercle $\mathcal{C}$. Pour démontrer la propriété, il suffit d'établir que ce point X appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$.
La droite OP étant un axe de symétrie du problème, les arcs $\overline{QX}$ et $\overline{XR}$ du cercle $\mathcal{C}$ sont égaux. Les angles $\widehat{PQX}$ et $\widehat{XQR}$ sont donc deux angles inscrits au cercle $\mathcal{C}$ interceptant des arcs égaux, et sont par conséquent égaux. On en déduit que X appartient bien à la bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$.

(b) Le centre du cercle inscrit au triangle PQR est situé à l'intersection des bissectrices de ce triangle. En utilisant la propriété démontrée en (a), on obtient que ce point correspond à l'intersection de la droite OP et du cercle $\mathcal{C}$. Lorsque le point P parcourt $\mathcal{C}'$, cette intersection parcourt:

- un arc de cercle si O est extérieur à $\mathcal{C}'$, cet arc étant délimité par les intersections de $\mathcal{C}$ avec les tangentes à $\mathcal{C}'$ issues de O. En effet, pour tout point $X \in \mathcal{C}$, la droite OX rencontre $\mathcal{C}'$ (et définit donc une position potentielle de P) si et seulement si X appartient à cet arc.
- la totalité du cercle $\mathcal{C}$ dans le cas particulier où O est intérieur à $\mathcal{C}'$. En effet, pour tout point $X \in \mathcal{C}$, la droite OX rencontre alors $\mathcal{C}'$ en une position possible de P.





Le 30 janvier 2015

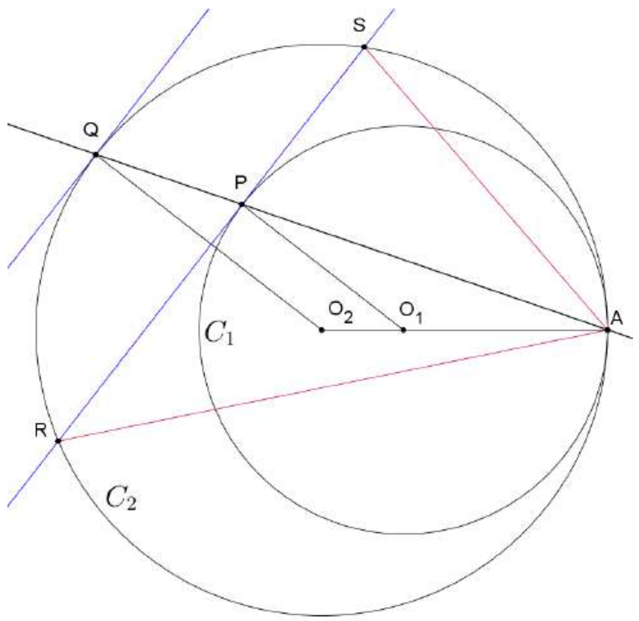
EXGSP165 – – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

On considère deux cercles C_1 et C_2 tangents en un points A, tels que C_1 est intérieur à C_2. Une droite issue de A rencontre respectivement C_1 et C_2 en deux points (distincts de A) notés respectivement P et Q. la tangente à C_1 issue de P rencontre C_2 en deux points notés R et S.

(a) Démontrer que la droite RS est parallèle à la tangente à C_2 issue de Q.

(b) En déduire que la droite AQ est bissectrice de l'angle $\widehat{RAS}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université(Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : **http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/**



(a) Notons respectivement O_1 et O_2 les centres des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le triangle AO_1P est isocèle en O_1, car ses deux côtés $[O_1A]$ et $[O_1P]$ sont des rayons de $\mathcal{C}_1$. On en déduit que les angles $\widehat{O_1AP}$ et $\widehat{O_1PA}$ sont égaux.

Un raisonnement similaire dans le triangle AO_2Q permet d'établir l'égalité des angles $\widehat{O_2AQ}$ et $\widehat{O_2QA}$. Les droites O_1P et O_2Q forment donc le même angle avec AP, et sont donc parallèles.

La droite RS est perpendiculaire à O_1P, car tangente à $\mathcal{C}_1$ en P. De même, la tangente à $\mathcal{C}_2$ issue de Q est perpendiculaire à O_2Q, donc également à O_1P. Dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, ce qui démontre la propriété.

(b) Deux droites parallèles découpent sur un cercle des arcs égaux. En utilisant le résultat établi au point (a), on obtient donc que les arcs $\overline{RQ}$ et $\overline{QS}$ de $\mathcal{C}_2$ sont égaux.

Les angles $\widehat{RAQ}$ et $\widehat{QAS}$ sont inscrits au cercle $\mathcal{C}_2$, et interceptent donc des arcs égaux. On en déduit que ces angles sont égaux, ce qui établit que AQ est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{RAS}$.

Le 30 janvier 2015

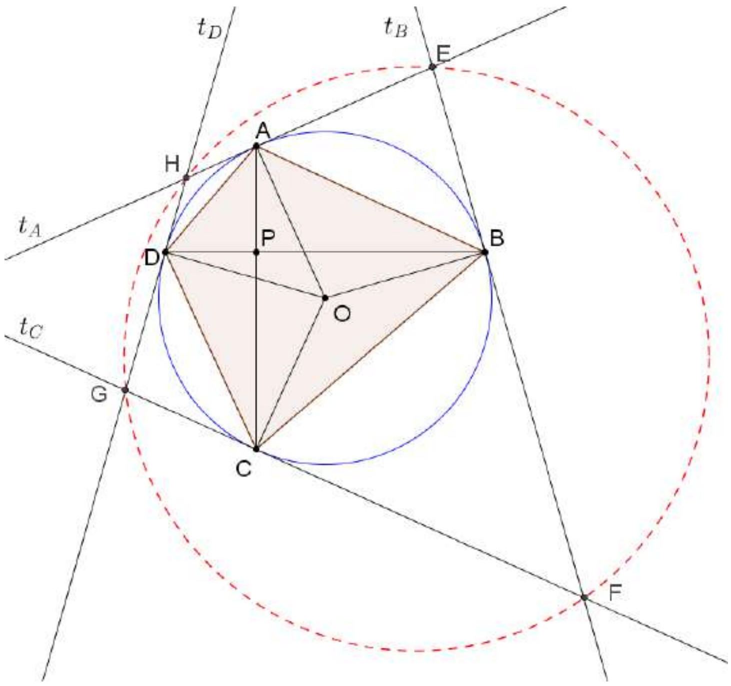
EXGSP166 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Par un point P interieur à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, on trace deux droites perpendiculaires. Les intersections de ces droites avec $\mathscr{C}$ forment les sommets d'un quadrilatère convexe $ABCD$.

(a) Démontrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

(b) Par les points A, B, C et D, on mène quatre tangentes à $\mathscr{C}$, qui forment les côtés d'un nouveau quadrilatère convexe. Démontrer que ce quadrilatère est inscriptible.

Nous reprenons la solution proposée par l'université(Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Notons respectivement t_A, t_B, t_C et t_D les tangentes à $\mathcal{C}$ en A, B, C et D. On définit également les points $E = t_A \cap t_B$, $F = t_B \cap t_C$, $G = t_C \cap t_D$ et $H = t_D \cap t_A$, formant le quadrilatère convexe $EFGH$.

(a) Dans le cercle $\mathcal{C}$, $\widehat{AOB}$ est un angle au centre et $\widehat{ADB}$ est un angle inscrit interceptant le même arc AB. De même, $\widehat{DOC}$ est un angle au centre et $\widehat{DAC}$ est un angle inscrit interceptant le même arc DC. Dès lors, $\widehat{DOC} = 2\ \widehat{DAC}$.

Comme $AC \cap BD = P$, les points A, C et P sont alignés ainsi que les points B, D et P. Dès lors, on a

$$\widehat{AOB} = 2\ \widehat{ADB} = 2\ \widehat{ADP}$$

et

$$\widehat{DOC} = 2\ \widehat{DAC} = 2\ \widehat{DAP}, \tag{1}$$

par le même argument que précédemment.

Comme $AC \perp BD$ et $AC \cap BD = P$, le triangle APD est rectangle en P, ce qui entraîne

$$\widehat{ADP} + \widehat{DAP} = 90°. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$2\ \widehat{ADP} + 2\ \widehat{DAP} = 180° \Leftrightarrow \widehat{AOB} + \widehat{DOC} = 180°,$$

qui démontre bien que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

(b) Comme t_A et t_B sont tangentes respectivement en A et B au cercle $\mathcal{C}$, et comme $t_A \cap t_B = E$, on a

$$\widehat{EAO} = \widehat{EBO} = 90°.$$

Dès lors, le quadrilatère convexe $AEBO$ est inscriptible et ses angles opposés $\widehat{AEB}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires (en effet, un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si deux de ses angles opposés sont supplémentaires.) On en déduit

$$\widehat{AEB} + \widehat{AOB} = 180° \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 180° - \widehat{AEB}. \tag{3}$$

Par un raisonnement similaire, comme t_C et t_D sont tangentes respectivement en C et D au cercle $\mathcal{C}$ et comme $t_C \cap t_D = G$, on a

$$\widehat{GCO} = \widehat{GDO} = 90°.$$

Alternative pour le point a

L'angle $\widehat{APB}$ est un angle intérieur et vaut 90°. Un théorème nous dit que l'amplitude d'un angle intérieur est égal à la moitié de la somme des arcs interceptés par l'angle.

(Voir n'importe qu'elle livre de géométrie). $\Rightarrow \widehat{APB} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}\right)$

Or $\begin{cases} \widehat{AOP} = \text{ angle au centre qui intercepte } \overset{\frown}{AB} \\ \widehat{COP} = \text{ angle au centre qui intercepte } \overset{\frown}{CD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOP} + \widehat{COP} = 2\widehat{APB} = 180°$

Le 30 janvier 2015

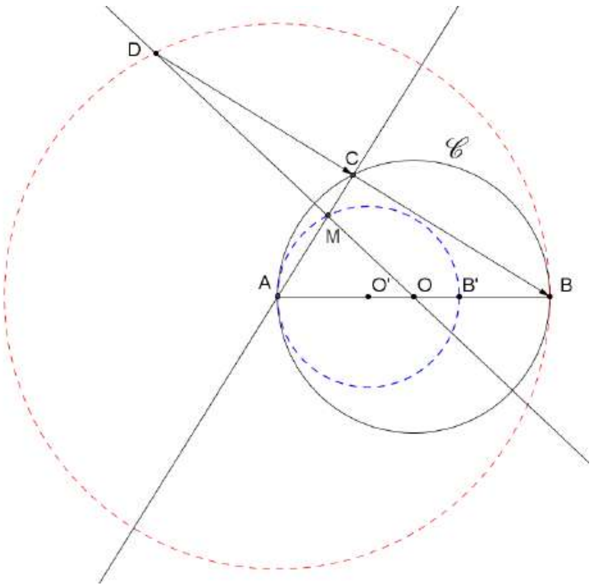
EXGSP167 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et on considére trois point A, B et C de ce cercle tels que A et B sont fixés de diamétralement opposés. On construite alors le point D de telle sorte que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$ soient égaux. On demande de

(a) trouver le lieu du point D lorsque C parcourt $\mathscr{C}$

(b) trouver le lieu du point M, défini comme l'intersection des droites AC et OD, lorsque C parcourt $\mathscr{C}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Montrons d'abord comment résoudre ce problème par la géométrie synthétique:

(a) Par définition, le point D est l'image du point C par l'homothétie de centre B et de rapport 2. Le lieu est donc l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre B et de rapport 2; il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon $[AB]$.

(b) Les droites AC et OD sont des médianes du triangle ABD. Le point M correspond donc à l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.
Si C est égal à B ou à A, alors M n'est pas défini car dans le premier cas, OD et AC sont confondus tandis que dans le deuxième cas, AC n'est pas défini.

Le lieu est donc l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ duquel il faut retirer les images des points B et A. Si l'on note O' (resp. B') l'image de O (resp. B) par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$, le lieu est donc le cercle de centre O' et de rayon $[O'B']$ duquel il faut retirer les points A et B'.

Il était également possible de résoudre le problème analytiquement:

(a) On considère un repère orthonormé positif dont l'origine est O et dans lequel le point B possède les coordonnées $(1,0)$. Si l'on note $(\cos\theta, \sin\theta)$ les coordonnées de C, le point D a pour coordonnées $(2\cos\theta - 1, 2\sin\theta)$. Si θ varie entre 0 et 2π, $(2\cos\theta - 1, 2\sin\theta)$ est le paramétrage du cercle dont l'équation cartésienne est donnée par

$$(x+1)^2 + y^2 = 4,$$

c'est-à-dire le cercle de centre $A : (-1, 0)$ et de rayon 2.

(b) Si $\cos\theta \neq -1$, alors l'équation de AC est

$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}(x+1)$$

tandis que si $\cos\theta \neq \frac{1}{2}$, celle de OD est

$$y = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta - 1}x.$$

Comme C ne peut être égal à A ou à B, on peut supposer que $\sin\theta \neq 0$. Dès lors, on trouve aisément que si $\cos\theta \neq \frac{1}{2}$, alors M a pour coordonnées

$$\left(\frac{2\cos\theta - 1}{3}, \frac{2\sin\theta}{3}\right).$$

Remarquons que si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, alors OD a pour équation $x = 0$ et M a donc pour coordonnées

$$\left(0, \frac{2\sin\theta}{3}\right).$$

En conclusion, le lieu est donc l'ensemble des points de la forme

$$\left(\frac{2\cos\theta - 1}{3}, \frac{2\sin\theta}{3}\right),$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ et $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$. Il s'agit du cercle centré au point $(-\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{2}{3}$, dont l'équation cartésienne est

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

privé des points $(\frac{1}{3}, 0)$ et $(-1, 0)$.

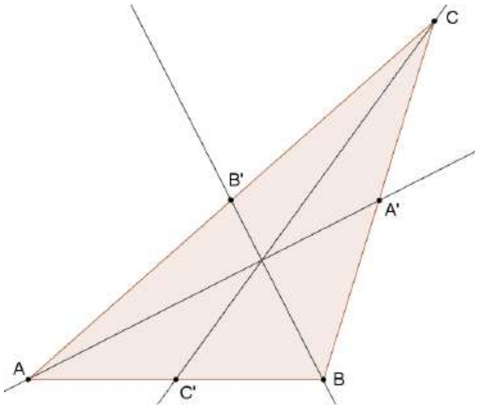
EXGSP168 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Dans un triangle ABC, on note respectivement A', B' et C' les milieux des côtés $|BC|$, $|AC|$ et $|AB|$. Démontrer que, si les droites AA' et BB' sont perpendiculaires, alors on a

$$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |CC'|^2$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $|XY|$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



On a

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}.$$

(En effet, la relation de Chasles fournit $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}$, que l'on peut combiner en $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, car $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{0}$.)

Par un raisonnement similaire, on a

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$$

et

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}.$$

En utilisant ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}\\ &= \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}}{2}\\ &= -\overrightarrow{CC'},\end{aligned}$$

donc

$$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{CC'}.$$

En développant, cette équation se réécrit

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{CC'}.$$

Par hypothèse, on a $AA' \perp BB'$, qui entraîne $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BB'} = 0$. L'égalité précédente devient donc

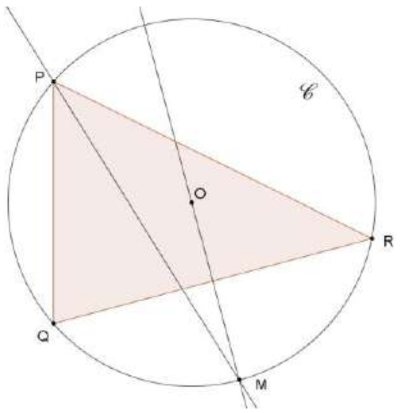
$$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |CC'|^2.$$

Le 30 janvier 2015

EXGSP169 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

On considère un triangle PQR non isocèle inscrit dans une cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que la bisectrice de l'angle P et la médiatrice du côté $|QR|$ se coupent en un point appartenant à $\mathscr{C}$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : **http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/**



Notons M le milieu de l'arc $\overline{QR}$ de $\mathcal{C}$ qui est opposé à P (c'est-à-dire, celui qui ne contient pas P). Ce point M est équidistant de Q et de R, et appartient donc à la médiatrice de $[QR]$. Pour démontrer la propriété, il suffit donc d'établir que le point M appartient également à la bissectrice de l'angle $\widehat{QPR}$.

Les angles $\widehat{QPM}$ et $\widehat{MPR}$ sont deux angles inscrits au cercle $\mathcal{C}$, interceptant des arcs $\overline{QM}$ et $\overline{MR}$ qui sont égaux. Ces angles sont dès lors égaux, et M appartient donc bien à la bissectrice de l'angle $\widehat{QPR}$.

Le 30 janvier 2015