Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 18

EXGSP180 – EXGSP189

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Septembre 2016

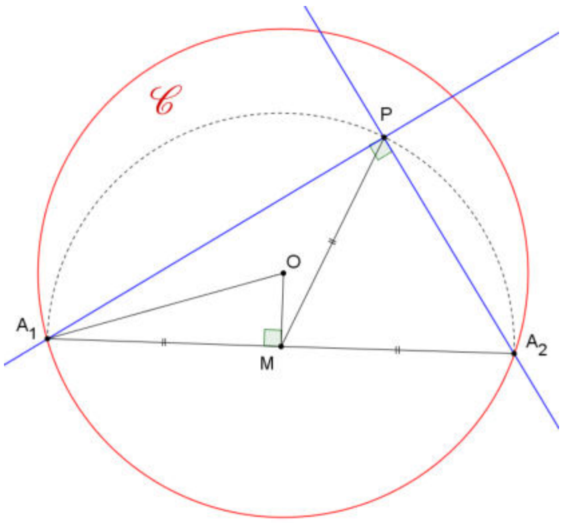
EXGSP180 FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

Par un point P intérieur à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r, on mène deux droites perpendiculaires d_1 et d_2. On note A_1 un des points d'intersection de d_1 avec $\mathscr{C}$, et A_2 un des points d'intersection de d_2 avec $\mathscr{C}$. le milieu de la corde $[A_1A_2]$ est noté M.
Démontrer l'égalité

$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2$$

où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



La droite OM relie le centre du cercle $\mathcal{C}$ au milieu d'une de ses cordes $[A_1A_2]$; on a donc $OM \perp A_1A_2$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMA_1, on obtient

$$|OM|^2 + |MA_1|^2 = |OA_1|^2 = r^2. \tag{1}$$

Par ailleurs, le triangle A_1PA_2 est rectangle en P par hypothèse. Ce triangle est donc inscrit dans un cercle de diamètre $[A_1A_2]$, dont le centre coïncide avec M. Par conséquent, on a

$$|MA_1| = |PM|.$$

En combinant cette égalité avec (1), on obtient bien

$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2.$$

Le 9 septembre 2016

EXGSP181 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2.

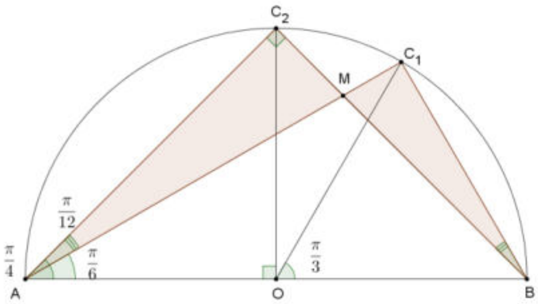
Dans un plan, on considère un demi-cercle de centre O, de rayon $R>0$ et de diamètre (AB), dans le quel deux triangles (A,B,C_1) et (A,B,C_2) sont inscrits (les sommets C_1 et C_2 sont situés sur le même demi-cerle). Le côté (AB) fait un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec (AC_1) et $\frac{\pi}{4}$ avec (AC_2). On note M le point d'intersection entre les côtés (AC_1) et (BC_2).

1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

2) Exprimer en fonction de R uniquement l'aire du triangle (A,M,C_2) et celle du triangle (B,M,C_1)

$N.B.$ Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Louis François



$$BAC_1=\frac{\pi}{6};BOC_1=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \text{le triangle } (OC_1B) \text{ est équilatéral} \Rightarrow \overline{BC_1}=R$$

$$BAC_2=\frac{\pi}{4};BOC_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \text{le triangle } (AOC_2) \text{ est isocèle rectangle} \Rightarrow \overline{AC_2}=R\sqrt{2}$$

$$C_1BM=C_1BC_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12} \text{ car angles inscrits égaux.}$$

$$\text{Or } \tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$\text{Dans le triangle } (AMC_2)\text{, on a alors : } \tan\frac{\pi}{12}=\frac{\overline{C_2M}}{\overline{AC_2}}\Rightarrow \overline{C_2M}=R\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$\text{Dans le triangle } (BMC_1)\text{, on a alors : } \tan\frac{\pi}{12}=\frac{\overline{C_1M}}{\overline{BC_1}}\Rightarrow \overline{C_1M}=R\left(2-\sqrt{3}\right)$$

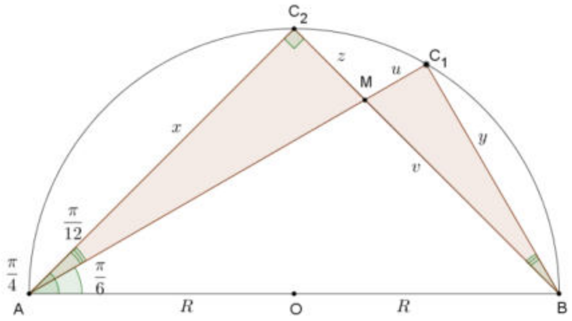
On peut alors calculer les aires :

$$\mathcal{A}_{\Delta_{rect}(AC_2M)}=\frac{1}{2}\overline{AC_2}.\overline{C_2M}=\frac{1}{2}.R\sqrt{2}.R\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)=\boxed{R^2\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\mathcal{A}_{\Delta_{rect}(BMC_1)}=\frac{1}{2}\overline{BC_1}.\overline{C_1M}=\frac{1}{2}.R.R\left(2-\sqrt{3}\right)=\boxed{\frac{1}{2}R^2\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

Autrement dit les aires des deux rectangles sont dans un rapport de 2.

Solution proposée par Nicole Berckmans



– Les angles C_1 et C_2 sont droits car ils soustendent un demi-cercle.

– $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ implique que $x = z + v = \sqrt{2}R$

– $\sin 30° = \frac{y}{2R} = \frac{1}{2}$ implique que $y = R$

– Les triangles AMC_2 et AMC_1 sont semblables car les 3 angles sont égaux chacun à chacun.

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{x}{y} = \frac{z}{u} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$$

– On en déduit que une relation entre les aires des triangles AC_2M et BC_1M

$$\mathcal{A}_{\Delta AC_2M} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \mathcal{A}_{\Delta BC_1M}$$

– Developpons : $\overline{AC_2} = \overline{BC_2} \Rightarrow x = z + v \Rightarrow x = z + \sqrt{u^2 + y^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}R = \sqrt{2}u + \sqrt{u^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow 2(R-u)^2 = u^2 + R^2 \qquad (R > u)$$

$$\Rightarrow u^2 - 4Ru + R^2 = 0$$

$$\Rightarrow u = 2R \pm \sqrt{4R^2 - R^2} \Rightarrow u = 2R \pm \sqrt{3}R$$

$$\Rightarrow u = \left(2 - \sqrt{3}\right)R \qquad (u < 2R)$$

Finalement : $\mathcal{A}_{\Delta BC_1M} = \frac{1}{2}uy = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)R^2$ et $\mathcal{A}_{\Delta AC_2M} = \left(2-\sqrt{3}\right)R^2$

Note :

Plusieurs méthodes permettent d'arriver au même résultat.

Une de celles-ci se base sur des formules donnant $\tan 15° = \tan(45° - 30°) = ... = 2 - \sqrt{3}$

Le 9 septembre 2016.

EXGSP182 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

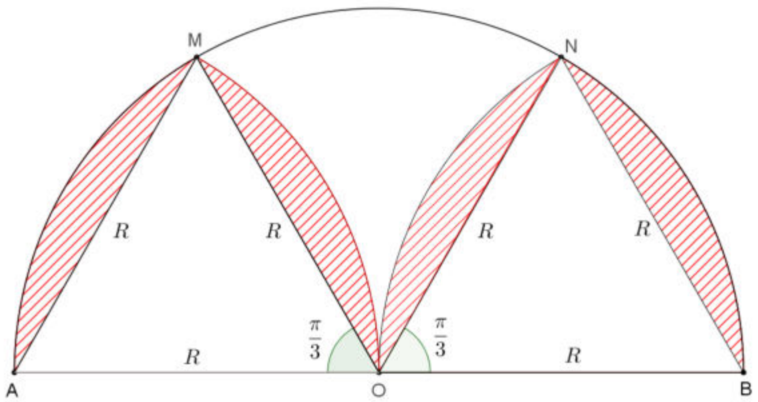
Dans un plan, un demi-cercle de centre O, de rayon R et de diamètre (AB) est coupé aux points M et N par deux cercles de même rayon R, l'un de centre A et l'autre de centre B.

(1) Illustrer par un dessin clair.

(2) Exprimer en fonction de R uniquement l'aire de la surface délimitée par les arcs de cercles $\overset{\frown}{OM}$, $\overset{\frown}{ON}$ et $\overset{\frown}{MN}$.

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



Les aires du secteur OAM, OMN, ONB valent $\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}.R^2$

Aire hachurée $\boxed{AH}$ = aire du secteur OAM − aire du triangle OAM

$$= \frac{\pi}{6}R^2 - \frac{1}{2}.R.\frac{\sqrt{3}}{2}.R \qquad \left[\text{La hauteur } = \frac{\sqrt{3}}{2}.R\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$

Aire de la surface délimitée par l'arc OM = aire du secteur $\overset{\frown}{OAM} + \boxed{AH} = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$

Idem pourcelle délimitée par $\overset{\frown}{ON}$.

Pour celle délimitée par $\overset{\frown}{MN}$ = l'aire du $\frac{1}{2}$ cercle − les 2 précédentes.

$$= \frac{\pi R^2}{2} - 2\left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(3\sqrt{3} - \pi\right)\frac{R^2}{6}$$

Le 11 octobre 2016.

EXGSP183 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Un triangle (A, B, C) est rectangle en A mais quelconque par ailleurs. Les longueurs des côtés (AB) et (AC) sont $a > 0$ et $b > 0$. Un carré (D, E, F, G) de longueur x est inscrit dans ce triangle. Les commets D et G sont situés sur les côtés (AB) et (AC), respectivement, et E et F se trouvent tous les deux sur (BC).

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Exprimer x en fonction de a et b uniquement. Mettre le résultat sous la forme la plus simple possible, et ne pas laisser de cosinus, sinus, tangente ou autre expression trigonométrique.

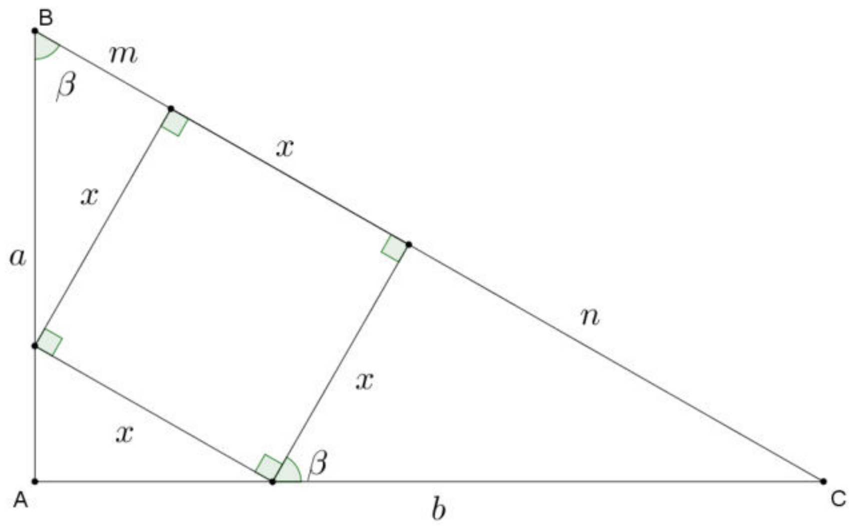
(3) Application : calculer x dans le cas $a = 3$ et $b = 4$.

Bonus : On revient au cas d'un triangle rectangle quelconque (câd avec a et b quelconques). On calcule le rapport de l'aire du carré (D, E, F, G) par celle du triangle (A, B, C).

Quelle est la valeur maximale de ce rapport? Pour quelle(s) de $\frac{b}{a}$ est-elle atteinte?

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$\overline{BC}^2 = a^2 + b^2 = (m + x + n)^2 = \left(\frac{x}{\tan\beta} + x + x\tan\beta\right)^2 \qquad \text{or } \tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2\left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + ab}$$

Si $a = 3$ et $b = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{60}{37}}$

<u>Bonus</u>

$$\frac{\text{aire du carré}}{\text{aire du triangle}} = \frac{2x^2}{ab} = \frac{2a^2b^2\left(a^2 + b^2\right)}{ab\left(a^2 + b^2 + ab\right)^2}$$

Divisons au numérateur et au dénominateur par a^4 et posons $t = \frac{b}{a}$.

On obtient une fonction de t : $f(t) = \dfrac{2\left(t + t^3\right)}{\left(1 + t^2 + t\right)^2}$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{2}{\left(1 + t^2 + t\right)^3}(1 - t)\left(t^3 + 1\right)$$

Compte tenu que $t > 0$, on a le tableau de signe suivant

	0		1	
$\frac{df}{dt}$		+	0	−
f		↗	Max	↘

Le rapport des aires sera maximum lorsque le triangle sera isocèle.

Le 10 octobre 2015.

EXGSP184 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Un carré (O,A,B,C) a pour longueur de côtés $a>0$. Un quart de cercle de centre O et de rayon a passe par les points A et C, et intersecte la diagonale (OB) du carré au point P. La tangente au quart de cercle en P coupe les côtés (AB) et (BC) aux points M et N respectivement. Un cercle de rayon $R>0$ est inscrit dans le triangle (M,B,N) et est tangent aux côtés $(MB),(BN)$ et (MN).

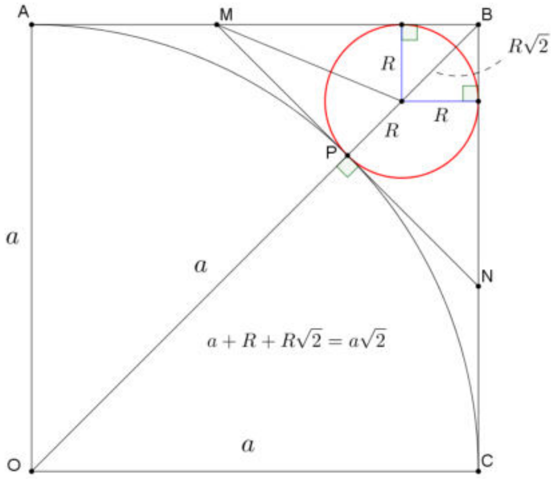
(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Exprimer R en fonction de a uniquement. Mettre le résultat sous la forme la plus simple posible, et ne pas laisser de cosinus, sinus , tangente ou autre expression trigonométrique. Indication : le centre du cercle inscrit se trouve à l'intersection des bissectrices du triangle (M,B,N).

(3) On additionne les aires du cercle inscrit et quart de cercle, puis on divise par l'aire du carré. Donner le résultat final.

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$R=\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}=a\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}=a\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Aire cercle inscrit : πR^2

Aire 1/4 e cercle : $\dfrac{\pi a^2}{4}$

Aire du carré : a^2

$$\Rightarrow \frac{\pi\left(R^2+\dfrac{a^2}{4}\right)}{a^2}=\frac{\pi}{4}\left[4\left(\frac{R}{a}\right)^2+1\right]=\frac{\pi}{4}\left[4\left(17-12\sqrt{2}\right)+1\right]=\frac{\pi}{4}\left(69-48\sqrt{2}\right)$$

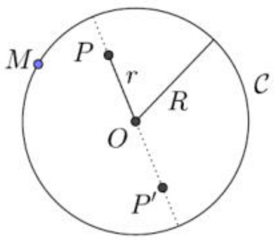
Le 21 octobre 2016

EXGSP185 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2020.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points P et P' équidistants de O. Un point mobile M parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que le produit scalaire $\vec{PM}.\vec{P'M}$ ne dépend pas du point M.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

Désignons par R le rayon du cercle et par r la distance entre P (resp. P') et O.



En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}, \quad \vec{P'M} = \vec{P'O} + \vec{OM}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\vec{PM} \bullet \vec{P'M} &= \left(\vec{PO} + \vec{OM}\right) \bullet \left(\vec{P'O} + \vec{OM}\right) \\
&= \vec{PO} \bullet \vec{P'O} \ + \ \vec{PO} \bullet \vec{OM} \ + \ \vec{OM} \bullet \vec{P'O} \ + \ \vec{OM} \bullet \vec{OM} \ (*) \\
&= -r^2 \ + \ \vec{OM} \bullet \left(\vec{PO} + \vec{P'O}\right) \ + \ R^2 \\
&= R^2 - r^2
\end{aligned}$$

en utilisant la distributivité du produit scalaire pour (*), le fait que, vu l'hypothèse, on a $\vec{PO} = -\vec{P'O}$ et le fait que

$$\vec{PO} \bullet \vec{P'O} = -\vec{PO} \bullet \vec{PO} = -r^2, \quad \vec{OM} \bullet \vec{OM} = R^2.$$

---

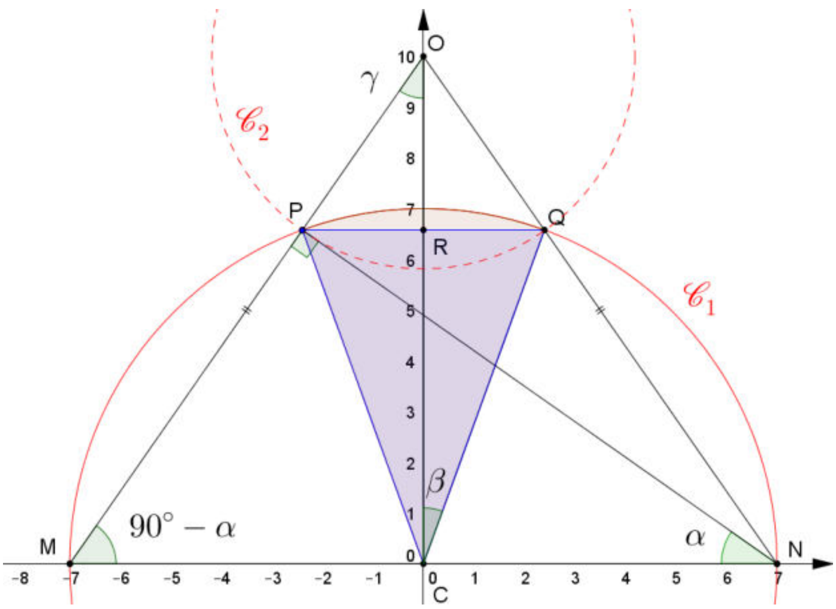
10 septembre 2020

EXGSP186 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Soit les points $M(-a,0)$ et $N(a,0)$ et la droite d médiatrice du segment MN.
Soit $\mathscr{C}_1$ un cercle de centre C qui admet MN comme diamètre et O un point de coordonnées $\left(0,\frac{10}{7}a\right)$. OM coupe $\mathscr{C}_1$ en P et ON coupe $\mathscr{C}_1$ en Q.
Soit $\mathscr{C}_2$ un cercle centré en O et de rayon OP.
On demande

1. Faire un dessin
2. Etablir la relation entre l'angle $\widehat{MON}$ et l'angle $\widehat{PNM}$.
3. Donnez la mesure de PQ en fonction du paramètre a et de l'angle $\widehat{PNM}$.
4. Si $a = 7$, calculez l'aire commune entre le secteur angulaire PCQ et le triangle OPQ

Solution proposée par Fabienne Zoetard



2) $\overline{MC} = \overline{CN} = a$; $\overline{OC} = \frac{10}{7}a$; $MPN = 90°$ car MN est un diamètre.

Le triangle MON est isocèle car OC est médiatrice.

Donc $MON = 180° - 2OMN = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$

Ou bien, il suffit de remarquer que α et γ sont des angles à côtés perpendiculaires $\Rightarrow \overline{MON} = 2\gamma = 2\alpha$

3) Le triangle OPR est un triangle rectangle.

$\overline{PQ} = 2\overline{PR} = 2\overline{OP}\sin\alpha$ or $\overline{OP} = \overline{OM} - \overline{PM}$

avec $\overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CM}^2 = \frac{100}{49}a^2 + a^2 = \frac{149}{49}a^2$

et $\overline{PM} = \overline{MN}\cos(90° - \alpha) = 2a\sin\alpha$

En remplaçant, on arrive à

$$\boxed{\overline{PQ} = 2a\left(\frac{\sqrt{149}}{7} - 2\sin\alpha\right)\sin\alpha}$$

4) Soit $a = 7 \Rightarrow \tan\alpha = \tan\gamma = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} = \frac{7}{10} \Rightarrow \alpha = 34.9920° \Rightarrow \sin\alpha = 0.5735$

$$\overline{PQ} = 2\times 7\times\left(\frac{\sqrt{149}}{7} - 2\times 0.5735\right)\times 0.5735 = 4.7917$$

$$\sin\beta = \frac{\overline{RQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{PQ}}{2\overline{QC}} = \frac{4.7917}{2\times 7} = 0.3423 \Rightarrow \beta = 20.0149°$$

Aire du secteur circulaire :

$$PCQ = \frac{2\beta}{360°}\pi\,\overline{CQ}^2 = \frac{2\times 20.0149°}{360°}\times\pi\times 7^2 = 17.1170$$

Aire du triangle $PCQ = \frac{\overline{CQ}^2\sin 2\beta}{2} = \frac{7^2\times\sin(2\times 20.0149°)}{2} = 15.7580$

$$\boxed{\text{Aire du segment circulaire } = 17.1170 - 15.7580 = 1.3590 \text{ ua}}$$

Le 24 mars 2017

EXGSP187 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

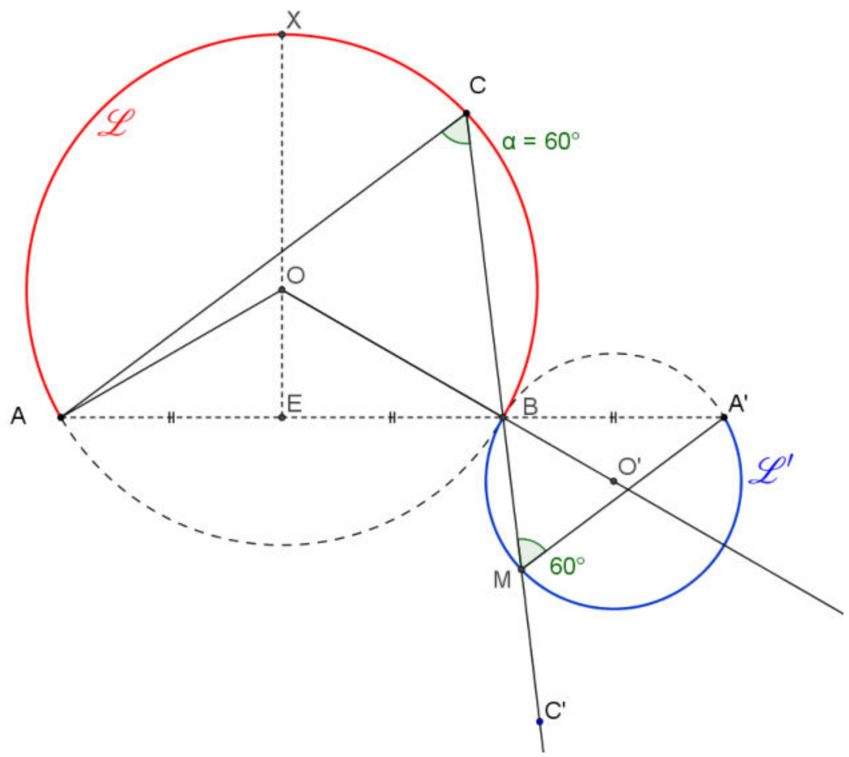
Dans le plan, on considère un segment horizontal reliant un point A à un point B, tous les deux fixes. Un point C mobile mais localisé au dessus du segment AB, forme un triangle ACB dont l'angle $\hat{C} = A\hat{C}B$ est constant et vaut $\pi/3$ (ou 60°).

(1) Trouvez le lieu du point C et décrivez-le précisément.

(2) On prolonge le côté CB au délà de B et on désigne par C' le point symétrique de C par rapport à B c'-à-d, tel que $\overline{CB} = \overline{BC'}$. Quel est le lieu du point milieu M du segment de droite $B'C'$?

Pour ces deux questions, illustrer le contexte par un dessin clair et précis. Veillez à justifier vos développements et mentionnez toutes les propriétés géométriques utilisées. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux



Construire le triangle équilatéral ABX de base AB et centre O.

(1) Le lieu $\mathscr{L}$ de C est l'arc AB du cercle circonscrit au triangle ABX, et de rayon R.

C'est un arc capable de 60° par rapport au segment $\overline{AB}$ et situé au dessus de AB.

(2) Soit $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre B et de rapport $-1/2$

$$\mathscr{H}(C) = M \quad \text{car} \quad \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\mathscr{H}(o) = O' \quad \text{car} \quad \overrightarrow{BO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BO},\ R' = \frac{R}{2}$$

$$\mathscr{H}(A) = A' \quad \text{car} \quad \overrightarrow{BA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

Le lieu $\mathscr{L}'$ de M est un arc capable de 60° par rapport au segment $\overline{BA'}$ et situé en dessous de BA'

Le 10 aout 2017

EXGSP188 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

Dans le plan, on considère un cercle fixe de rayon r et de centre O. D'un point P, extérieur au cercle, on trace une droite mobile qui intersecte le cercle en deux points A et B, A étant le point le plus proche de P. On désigne également par C le point du cercle le plus proche de P.

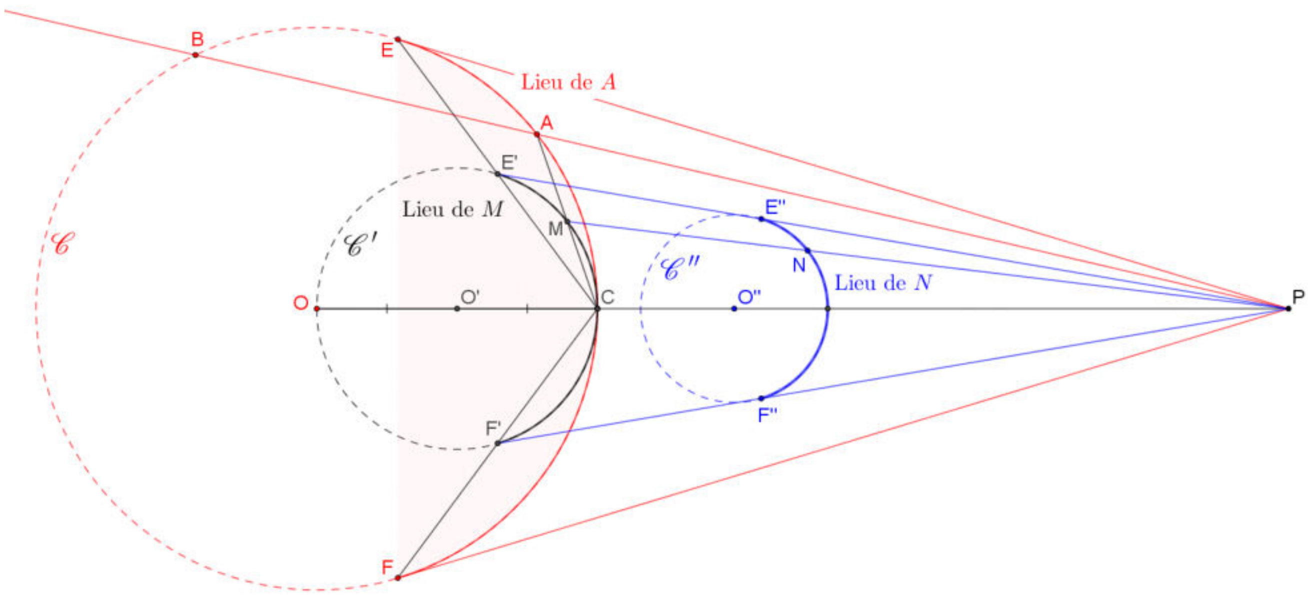
(1) Quel est le lieu du milieu de M du segment de droite CA?

(2) Quel est le lieu du centre de gravité N du triangle PAC, càd, le point d'intersection de ces médianes.

Pour ces questions, illustrer le contexte par un dessin clair et précis. Veuillez à justifier vos développements et mentionnez toutes les propriétés géométriques utilisées.

Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux



1. $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$

C est fixe, E et F sont les points de tangence au cercle $\mathscr{C}$.

Lorsque A parcourt l'arc de cercle FE, alors M parcourt l'arc de cercle $F'E'$ car M est l'image de A par l'homothétie de centre C (fixe) et de rapport 1/2.

$\overrightarrow{CE'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CO'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}\Rightarrow R'=\frac{1}{2}R$ où $R=\overline{OC}$ et $R'=\overline{OC'}$

2. $\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}.$

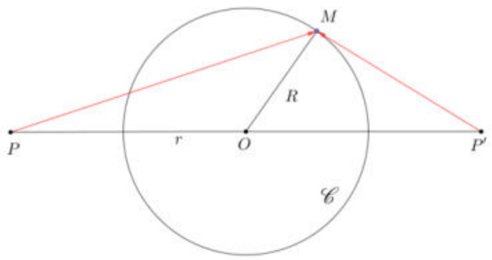
On considére l'homothétie de centre P (fixe), de rapport 2/3, qui envoie M sur N.
Le lieu de N est l'image de $E'F'$ par cette homothétie. C'est donc un arc de cercle $E''F''$ de centre O'' et de rayon R''.

$\overrightarrow{PO''}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PO'}$, $R''=\frac{2}{3}R'$, $\overrightarrow{PE''}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PE'}$, $\overrightarrow{PF''}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PF'}$

EXGSP189 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points distincts P et P' équidistants de O. Un point M mobile parcourt $\mathscr{C}$.
Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{P'M}$ reste constant.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Désignons par R le rayon du cercle et par r la distance entre P et O. (égale par hypothèse à celle entre P' et O.) On a successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{P'M} &= \left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{P'O}+\overrightarrow{OM}\right)\\
&= \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM}\\
&= -r^2 + \overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{P'O}\right) + R^2\\
&= R^2 - r^2
\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{P'O}$.

Le 20 septembre 2017