Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 2

EXGSP020 – EXGSP029

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

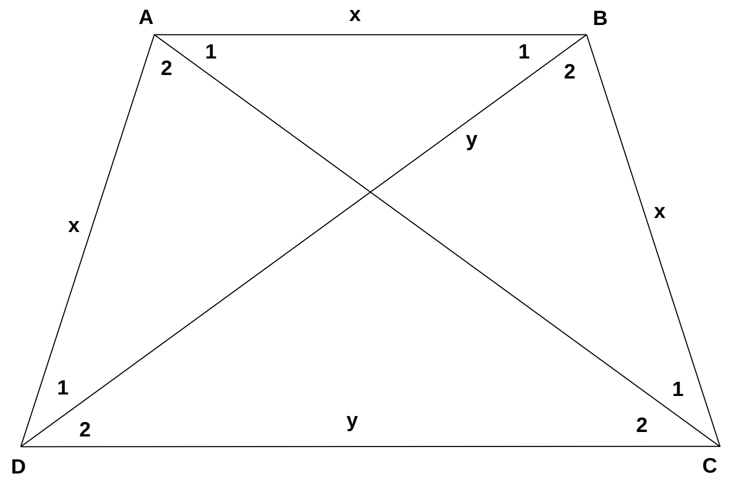
Mars 04

EXGSP020 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

On considère un trapèze convexe ABCD (AB // CD) tel que

a) Les côtés [DA], [AB] et [BC] sont de même longueur.
b) Le côté [CD] à la même longueur que la diagonale [BD].

Calculer l'angle ADC (Envisager séparément les cas AD // BC et AD non parallèle à BC



1) $AD\ \cancel{//}\ BC$

Comme $AD = BC$, le trapèze est isocèle $\rightarrow AC = DB$

Dés lors, on a les égalités suivantes pour les angles :

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{D_2} = \widehat{D_1} \quad et \quad \widehat{A_2} = \widehat{B_2} = 2\widehat{D_1}$

Or dans un trapèze la somme des angles intérieurs = 360°

$\rightarrow \quad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$

$\rightarrow \quad \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 360°$

$\rightarrow \quad \widehat{D_1} + 2\widehat{D_1} + \widehat{D_1} + 2\widehat{D_1} + \widehat{D_1} + \widehat{D_1} + \widehat{D_1} + \widehat{D_1} = 360°$

$\rightarrow \quad 10\widehat{D_1} = 5\widehat{D} = 360° \quad \rightarrow \quad \widehat{D} = 72°$

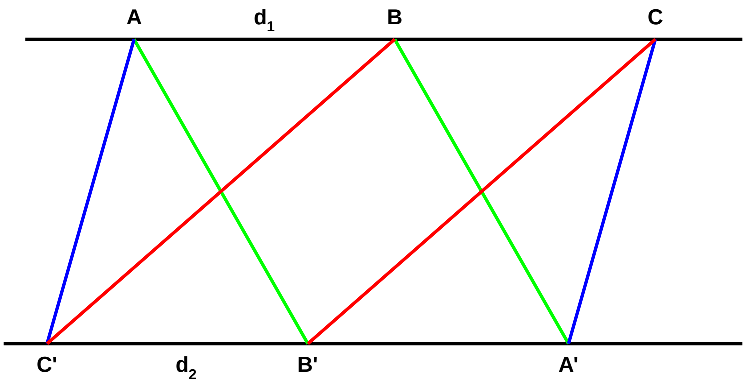
2) $AD // BC$

Le trapèze est un losange avec $x = y$.

Et dans ce cas $\widehat{D} = 120°$

EXGSP021 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.
Théorème de Pappus (forme affine, faible)

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles et soient A, B, C (resp A',B', C') trois points de d_1 (resp d2).
Démontrer que si AB' est parallèle à A'B, et que si A'C est parallèle à AC', alors BC' est parallèle à B'C.



De part la construction, on a:

$AB' // A'B \quad \rightarrow \quad AB = A'B'$

$A'C // AC' \quad \rightarrow \quad AC = A'C'$

$\rightarrow \quad AC - AB = A'C' - A'B'$

$\rightarrow \qquad BC = B'C'$

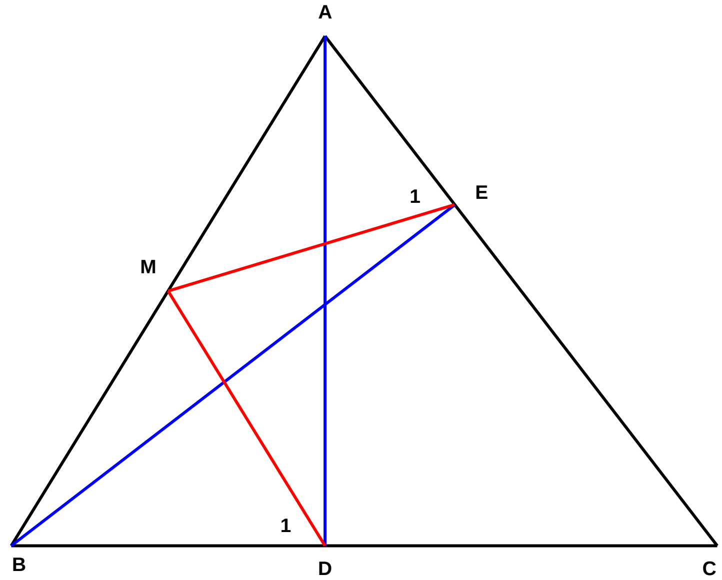
$\rightarrow \quad BC' // B'C$

Ce théorème est le théorème de Pappus (4ème siècle ap JC).
Notons que les droites d_1 et d_2 ne doivent pas nécessairement être parallèles

EXGSP022 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Soit un triangle ABC.
On désigne par M le milieu du côté AB et par D et E les pieds des hauteurs issues de A et B.

c) Démontrer que | MD | = | |ME | = | MA |
d) Calculer la mesure de l'angle DME en fonction de l'angle ACB



1) ΔABD est rectangle et MD est une médiane $\rightarrow$ $MA = MD$

ΔBEA est rectangle et ME est une médiane $\rightarrow$ $MA = ME$

par conséquent : $MA = MD = ME$

2) ΔMAE est isocèle $\rightarrow E_1 = A$

ΔMBD est isocèle $\rightarrow D_1 = B$

Dans le quadrilatère $CDME$, on a:

$M + C + D + E = 2\pi$

$M + C + \pi - B + \pi - A = 2\pi$

$A + C - (A + B) = 0$

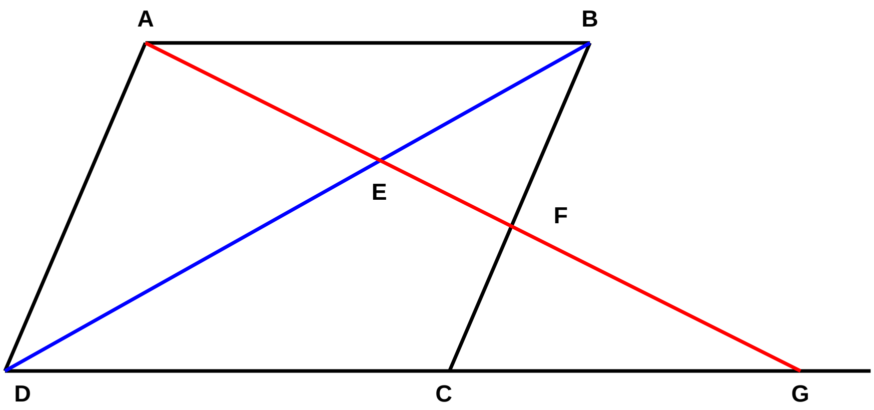
or $A + B + C = \pi \quad \rightarrow A + B = \pi - C$

$M + C - \pi + C = 0$

$\boxed{M = \pi - 2C}$

EXGSP023 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2005.
FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Une droite issue de A coupe BD en E, BC en F et CD en G. Démontrer que $|AE|^2 = |EF| . |EG|$



$$\triangle AEB \text{ et } \triangle GED \text{ sont semblables } \rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{EB}{ED}$$

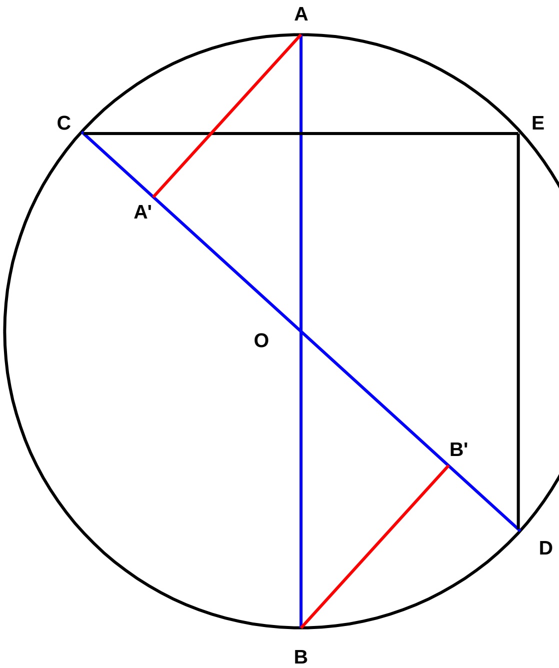
$$\triangle AED \text{ et } \triangle FEB \text{ sont semblables } \rightarrow \frac{AE}{FE} = \frac{DE}{EB}$$

$$\rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{FE}{AE} \rightarrow \boxed{AE^2 = EF \,.\, EG}$$

EXGSP024 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1998.

Soient AB et CD deux diamètres distincts d'un cercle.
On désigne par E le symétrique de C par rapport à AB et par A' et B' les projections orthogonales de A et B sur CD.
Démontrer que :

a) 2 | AA' | = | CE |
b) | A'B' | = | DE |



CE est une corde ($E \in$ au cercle).

ΔOCM et $\Delta OAA'$sont égaux. (Triangles rectangles ayant un côté égal et un angle égal) $\rightarrow |AA'| = |CM|$

et comme $|CM| = \frac{1}{2}|CE| \rightarrow \boxed{2|AA'|=|CE|}$

On remarque que le ΔCED est rectangle et que les triangles $AA'O$ et $BB'O$ sont égaux

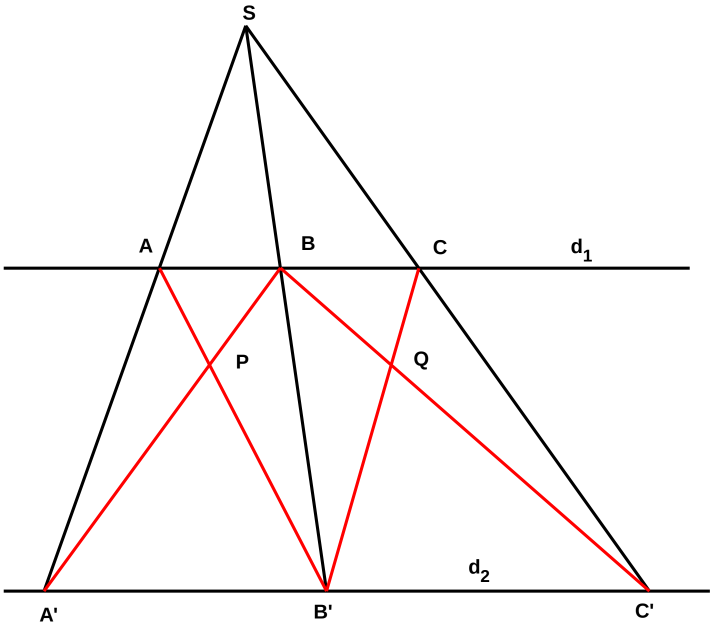
Dés lors, $|ED|^2=|CD|^2-|CE|^2=4|OA|^2-4|A'A|^2$

$$=4\left(|OA|^2-|AA'|^2\right)=4|OA'|^2=|AB'|^2$$

$\rightarrow \boxed{|ED|=|AB'|}$

EXGSP025 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1998.

Trois droites issues d'un point S coupent deux droites parallèles d et d' en A, B, C et A', B', C' respectivement.
Démontrer que les points d'intersections P et Q des diagonales du trapèze ABB'A' et de celles du trapèze BCC'B' se trouvent sur une droite parallèle à d.



Première méthode

Les triangles SAB et $SA'B'$ sont semblables

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta SAB \\ \hline \Delta SA'B'\end{array}} \rightarrow \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \qquad (1)$$

De même

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta SBC \\ \hline \Delta SB'C'\end{array}} \rightarrow \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \qquad (2)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta APB \\ \hline \Delta B'PA'\end{array}} \rightarrow \frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{|AB|}{|B'A'|} \qquad (3)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta BQC \\ \hline \Delta C'QB'\end{array}} \rightarrow \frac{|BQ|}{|C'Q|} = \frac{|BC|}{|C'B'|} \qquad (4)$$

On déduit de $(1),(2),(3)$ et (4) que $\frac{|BQ|}{|C'Q|} = \frac{|PB|}{|PA'|}$

Donc les triangles BPQ et $BA'C'$ sont semblables

$\rightarrow$ PQ est parallèle à d et d'

Deuxième méthode

En termes de géométrie projective, regardons le schéma en perpective.

Le point S est le point à l'infini vers lequel concourent les droites parallèles AA', BB' et CC'.

Dès lors $ABA'B'$ et $BCB'C'$ sont deux rectangles et P et Q, le centre des rectangles respectifs. Il devient alors évident que PQ est parallèle à d et d'.

Troisième méthode

On peut voir le problème qomme une application particulière du théorème de Desargues. (Voir EXGSP 027)

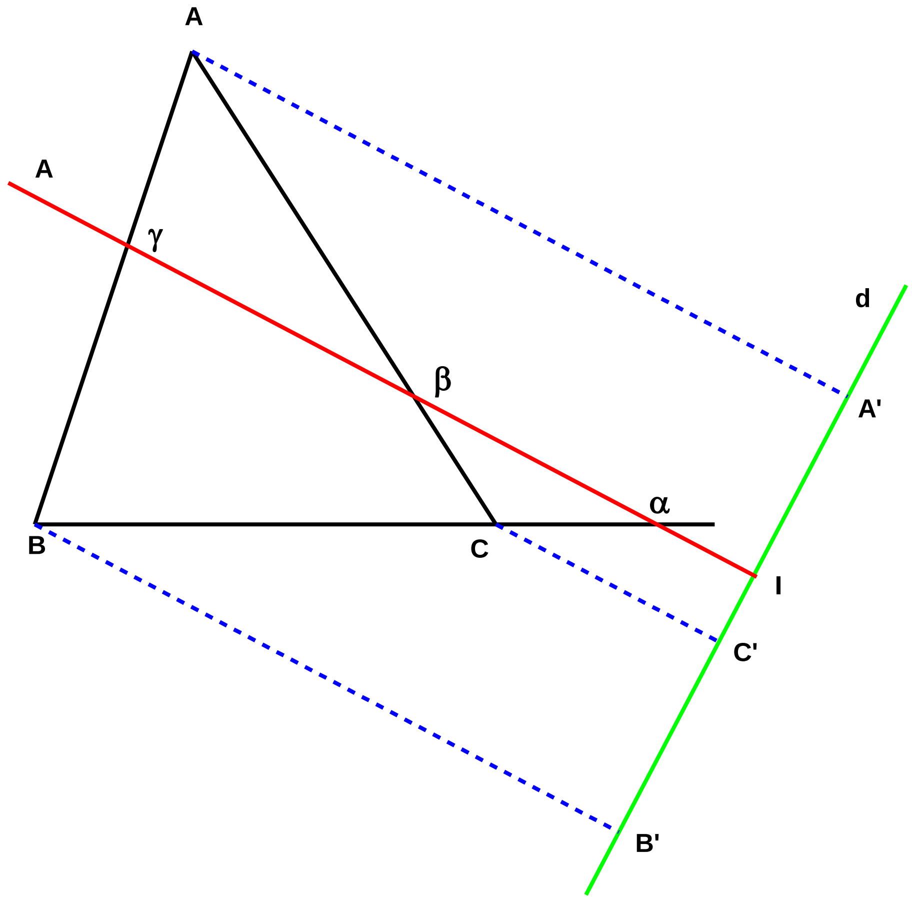
Soient les $\Delta CQC'$ et $\Delta APA'$. Les intersections des côtés correspondants sont S, B et B' qui sont alignés. AC, PQ et $A'C'$ sont concourants et comme AC $//A'C'$, alors $PQ//d$

EXGSP026 – Théorème de Ménélaus.

Soit un triangle ABC et une transversale t :

Démontrer que :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\frac{\beta C}{\beta A}\frac{\gamma A}{\gamma B}=1$$



On projete A, B, et C sur d non parallèle à t. Soit $I = t \cap d$.
(La projection est faite parallèlement à t).

On a $\dfrac{\alpha B}{\alpha C} = \dfrac{IB'}{IC'} \quad \dfrac{\beta C}{\beta A} = \dfrac{IC'}{IA'} \quad \dfrac{\gamma A}{\gamma B} = \dfrac{IA'}{IB'}$

En multipliant les trois égalités membres à membres on a :

$$\boxed{\frac{\alpha B}{\alpha C}\,\frac{\beta C}{\beta A}\,\frac{\gamma A}{\gamma B} = \mathbf{1}}$$

<u>*La réciproque est vraie*</u>

Soit les points α, β *et* γ *pris sur les côtés d'un* ΔABC.
S'ils vérifient la relation de Ménélaus, ils sont colinéaires.

En effet, la droite qui passe par α *et* β *rencontre AB en* γ'

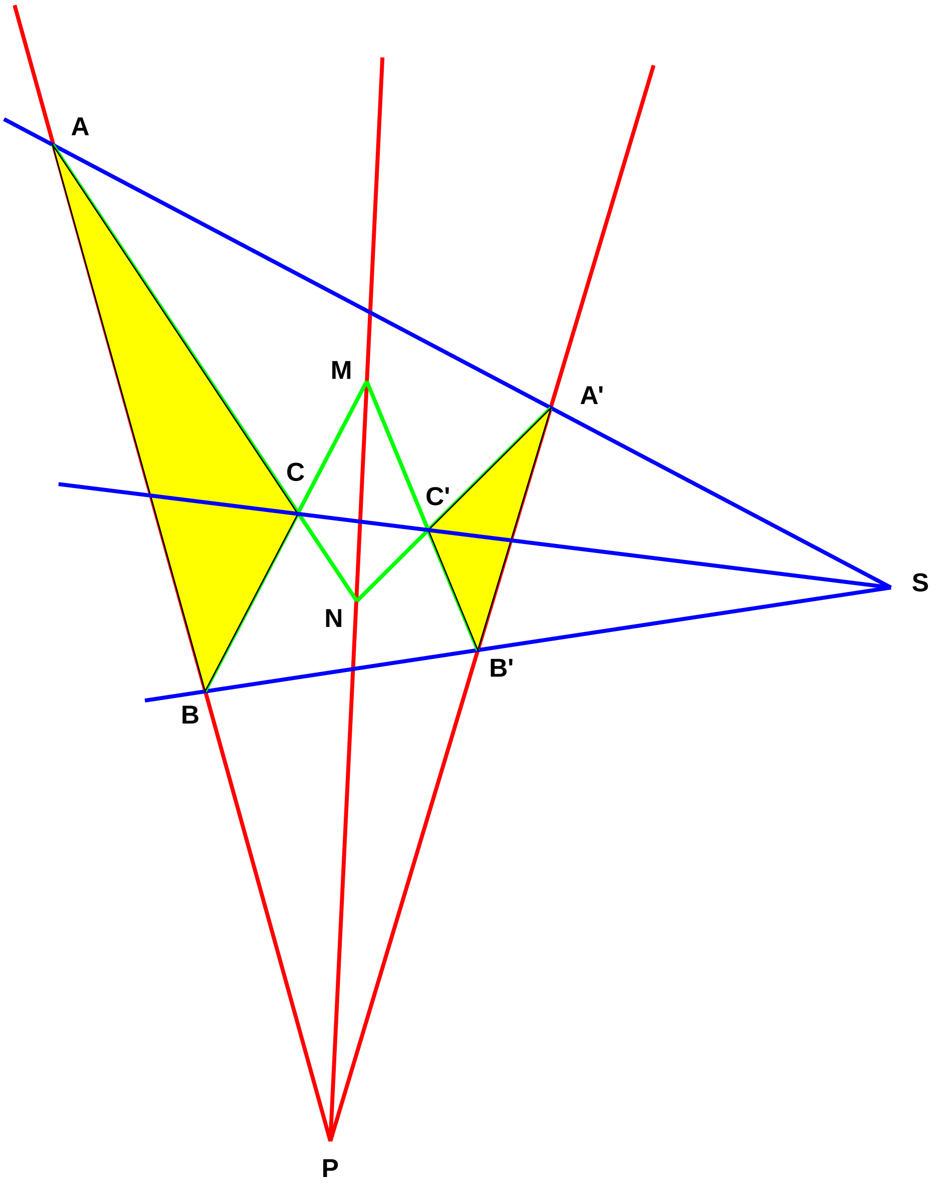
$\dfrac{\alpha B}{\alpha C}\,\dfrac{\beta C}{\beta A}\,\dfrac{\gamma' A}{\gamma' B} = \mathbf{1}$ *or d'après l'hypothèse* $\dfrac{\alpha B}{\alpha C}\,\dfrac{\beta C}{\beta A}\,\dfrac{\gamma A}{\gamma B} = \mathbf{1}$

$\rightarrow \quad \dfrac{\gamma' A}{\gamma' B} = \dfrac{\gamma A}{\gamma B}$ *et donc le point* γ *est confondu avec* γ'.

$\rightarrow$ α, β *et* γ *sont colinéaires.*

EXGSP027 – Théorème de Desargues.

Si les sommets de deux triangles se correspondent de manière que les droites joignant les sommets correspondants se coupent en un même point, les points de concours des côtés opposés à ces sommets correspondants sont en ligne droite.



Appliquons le théorème de Ménélaus.

Le ΔSAB est coupé par la transervale $Q'B'P$

$$\rightarrow \frac{A'S}{A'A}\frac{PA}{PB}\frac{B'B}{B'S}=1$$

Le ΔSBC est coupé par la transervale $B'C'M$

$$\rightarrow \frac{B'S}{B'B}\frac{MB}{MC}\frac{C'C}{C'S}=1$$

Le ΔSCA est coupé par la transervale $C'A'N$

$$\rightarrow \frac{C'S}{C'C}\frac{NC}{NA}\frac{A'A}{A'S}=1$$

En multipliant ces égalités membres à membres :

$$\frac{PA}{PB}\frac{MB}{MC}\frac{NC}{NA}=1$$

Les trois points P, M et N pris sur le côté du ΔABC satisfont à la relation de Ménélaus; ils sont en ligne droite.

Réciproque

Si les côtés de deux triangles se correspondent de manière que les côtés correspondants, pris deux à deux, se coupent en trois points en ligne droite, les droites qui joignent les sommets opposés aux côtés correspondants, sont concourants en un même point.

Soient les triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les côtés BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$ se coupent deux à deux aux points M, N et P qui sont en ligne droite.

Les droites AA', BB' et CC' concourent en un même point.

En effet, soit S le point de concours des droites BB' et CC'.

Soient les deux triangles $BB'P$ et $CC'N$. Leurs sommets homologues B et C, B' et C', P et N sont sur trois droites concourantes en M.

Dès lors, les points de concours des côtés homologues sont en ligne droite : BB' et CC' concourent en S, $B'P$ et $C'N$ en A', BP et CN en A.

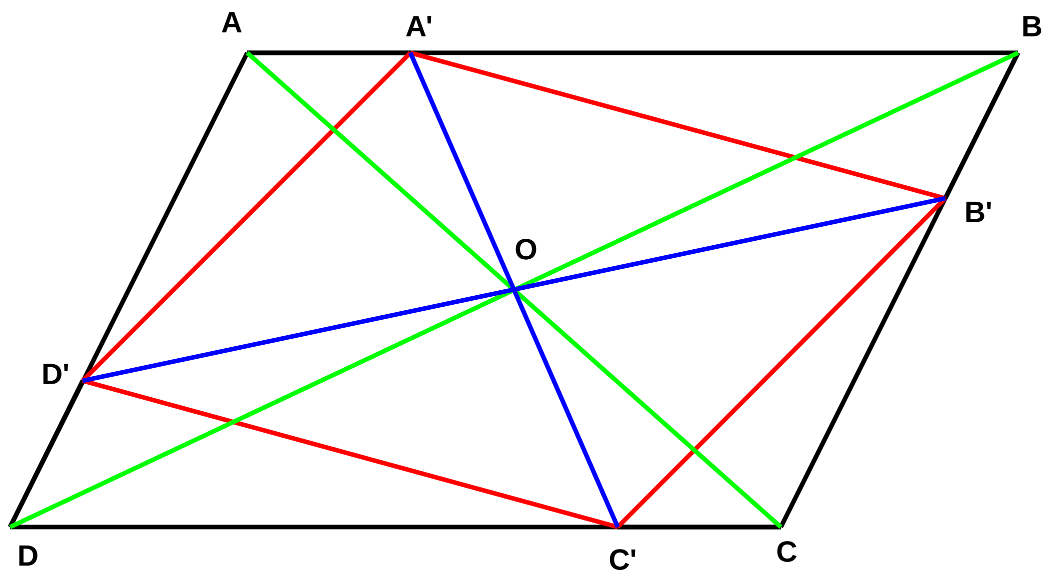
Donc, S, A' et A sont en ligne droite.

EXGSP028 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1998.

Soit ABCD un parallélogramme. On porte sur les côtés AB, BC, CD et DA, les points A', B', C' et D' tels que :

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'|$$

Démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme et que ses diagonales et celles de ABCD sont concourantes.



$\Delta A'BB' = \Delta D'DC$ et $\Delta D'AA' = \Delta C'B'C$

$\rightarrow$ $D'C' = A'B'$ et $D'A' = C'B'$

$\rightarrow$ $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

$\Delta OD'D = \Delta OBB'$ (un côté égal compris entre deux angles égaux)

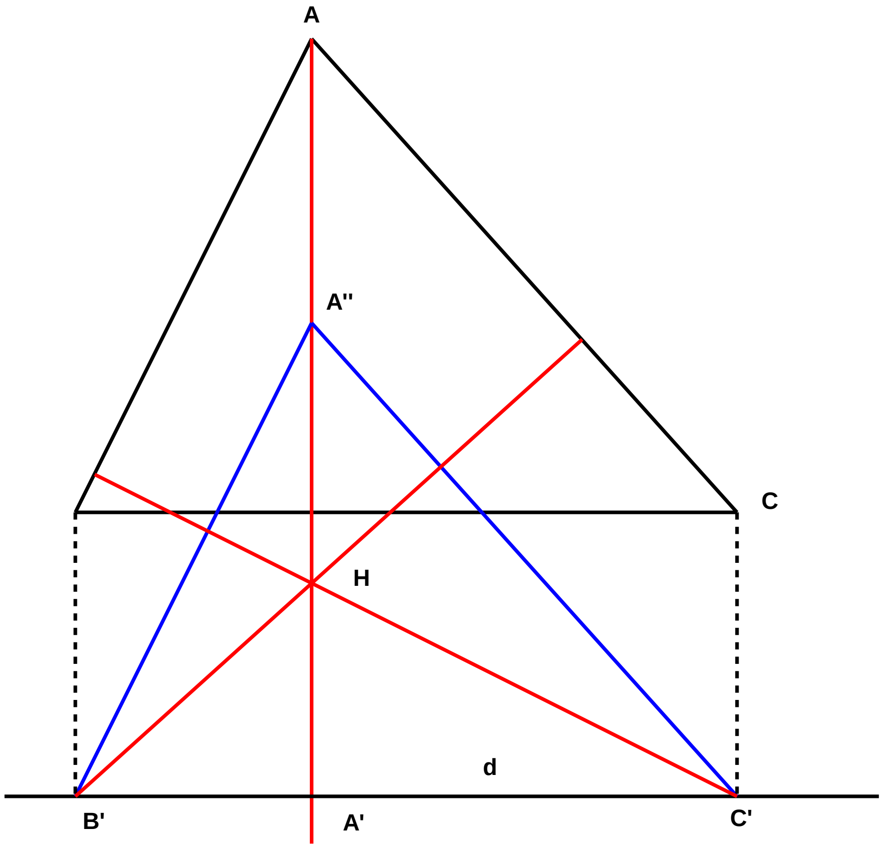
$\rightarrow$ $D'O = OB'$ $\rightarrow O$ est milieu de $D'B'$

Même raisonnement pour AC et $A'C'$

$\rightarrow$ les diagonales des deux parallélogrammes se coupent en un même point.

EXGSP029 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1997.

Soient ABC un triangle, d une droite parallèle à BC.
On désigne A’, B’ et C’ les projections orthogonales de A, B et C sur d.
Démontrer que les perpendiculaires abaissées de A’ sur BC, de B’sur CA et C’ sur AB sont concourantes.



On trace par C' la parallèle à AC et par B' la parallèle à AB.
$\rightarrow \quad \Delta ABC = \Delta A"B'C'$ Les triangles sont identiques, car l'un est obtenu par translation de l'autre, et A'' est situé sur AA'.

Par conséquent, les droites concernées sont dés lors les hauteurs du $\Delta A"B'C'$ $\rightarrow$ Elles sont concourantes.