

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique plane**

## **GSP 3**

**EXGSP030 – EXGSP039**

**<http://www.matheux.be.tf>**

Jacques Collot

1 avril 03

## EXGSP030 – Liège, septembre 1997.

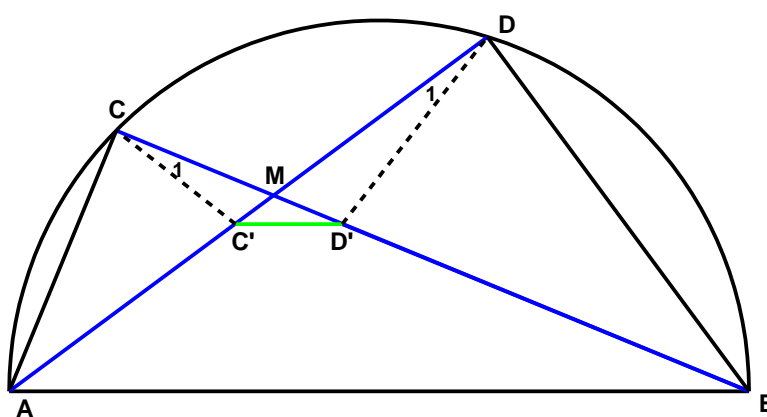
Soient un demi-cercle de diamètre  $AB$  et  $C$  et  $D$  deux points du demi-cercle de  $A$  et  $B$ .

On suppose que les cordes  $AD$  et  $BC$  se coupent en  $M$ .

On fixe  $C'$  sur la corde  $AD$  tel que  $|AC'| = |AC|$  et  $D'$  sur la corde  $BC$  tel que  $|BD'| = |BD|$ .

Démontrer que les triangles  $ACM$  et  $BDM$  sont semblables et que  $C'D'$  est parallèle à  $AB$ .

---



$CAD = CBD$  car interceptent le même arc.

$\Rightarrow$  Les triangles rectangles  $ACM$  et  $BDM$  sont semblables

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{DM} = \boxed{\frac{AM}{BM}}$$

Les triangle  $CC'A$  et  $DD'B$  sont aussi semblables

(car deux triangles isocèles, et l'angle au sommet égal).

$$\Rightarrow \frac{CC'}{DD'} = \frac{CA}{DB} = \boxed{\frac{C'A}{D'B}}$$

On déduit aussi que  $\overline{DD'B} = \overline{AC'C} \Rightarrow \pi - \overline{DD'B} = \pi - \overline{AC'C}$

$$\Rightarrow \overline{MD'D} = \overline{MC'C}$$

De plus  $\overline{CMC'} = \overline{DMD'}$  car angles opposés par le sommet

$\Rightarrow \Delta CC'M$  et  $\Delta DD'M$  sont semblables

$$\Rightarrow \frac{CM}{DM} = \boxed{\frac{C'M}{D'M}} = \frac{CC'}{DD'}$$

On déduit des égalités précédentes que :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AM}{BM}} = \boxed{\frac{C'M}{D'M}} = \boxed{\frac{C'A}{D'B}}$$

Autrement dit, les  $\Delta AMB$  et  $\Delta C'MD'$  sont semblables.

Par conséquent,  $\boxed{C'D' // AB}$

## EXGSP031– FACSA, ULiège, Liège, juillet 1996.

|Soit  $ABC$  un triangle.

On fixe  $C', C''$  sur le côté  $AB$  de sorte que :

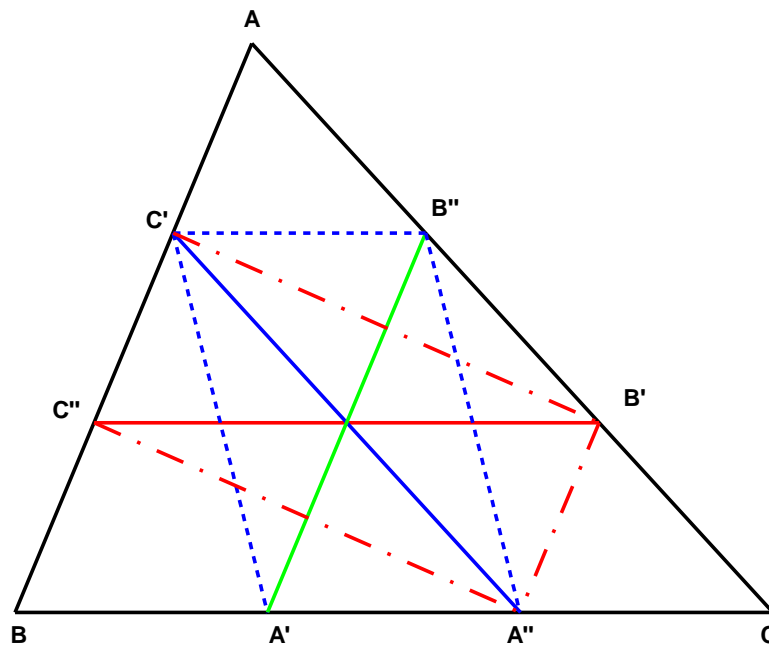
$$|AC'| = |C'C''| = |C''B|$$

De même, on fixe  $A', A''$  et  $B', B''$  sur  $BC$  et  $CA$  de sorte que :

$$|BA'| = |A'A''| = |A''C|$$

$$|CB'| = |B'B''| = |B''A|$$

Démontrer que les segments  $A'B'', B'C''$  et  $C'A''$  se coupent en leur milieu



On a immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} C'B'' \parallel AB \\ |C'B'| = |A'A''| \end{array} \right. \rightarrow A'A''B''C' \text{ est un parallélogramme.}$$

De même, on a  $C'C''A''B'$  est un parallélogramme.

Ces deux parallélogrammes ont  $C'A''$  comme diagonale commune, dont le milieu est unique.

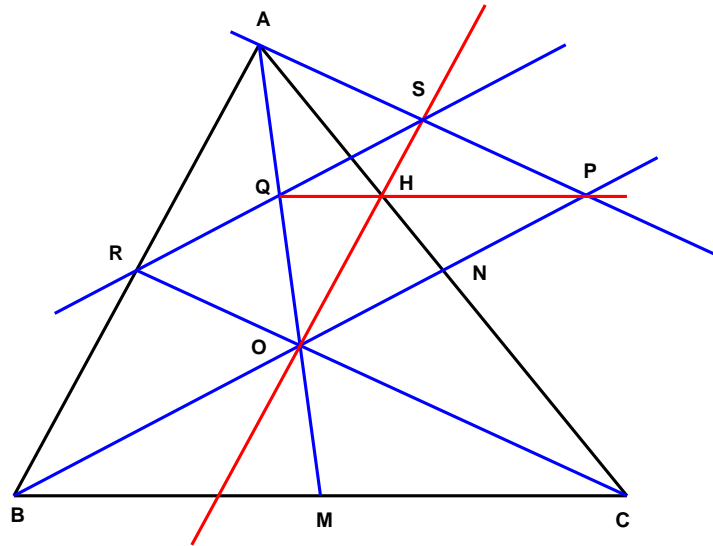
$\rightarrow A'B'', B'C''$  et  $C'A''$  se coupent en leur milieu.

## EXGSP032– FACSA, ULiège, Liège, septembre 1996.

Soit un triangle  $ABC$ . On désigne par  $M$  le milieu de  $BC$ , par  $N$  le milieu de  $AC$  et par  $O$  le point d'intersection de  $AM$  et  $BN$ .

La droite  $BN$  coupe la parallèle à  $CO$  passant par  $A$  en  $P$ .

Démontrer que la parallèle à  $AB$  passant par  $O$  et la parallèle à  $BC$  passant par  $P$  se coupent en un point de  $AC$ .



$\triangle ANP = \triangle ONC$  car un côté égal compris entre deux angles égaux.  
 $\Rightarrow ON = NP \Rightarrow AC$  est une médiane du  $\triangle AOP$

$OP = OB$  puisque  $ON = \frac{1}{2}OB$  ( $O$  est centre de gravité).

$\Rightarrow \triangle BMO = \triangle OQP$  car un côté égal compris entre deux angles égaux.

$\Rightarrow OQ = OM = \frac{1}{2}OA \Rightarrow PQ$  est une médiane du  $\triangle AOP$

$CO$  coupe  $AB$  en  $R$ .  $CR$  est une médiane de  $\triangle ABC$ .

$RQ \parallel BP$  puisque  $RQ$  joint le milieu des deux côtés du  $\triangle ABO$ .

$RQ$  passe par  $S$  puisque  $ASOR$  est un parallélogramme dont  $AO$  est une diagonale et  $Q$  le milieu de celle-ci.

$\Rightarrow$  Dans le  $\triangle ABP$ , comme  $BR = RA \Rightarrow AS = SP$ .

$\Rightarrow OS$  est une médiane du  $\triangle AOP$

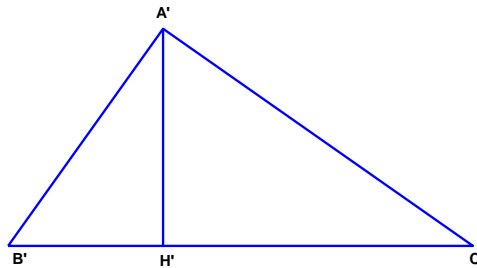
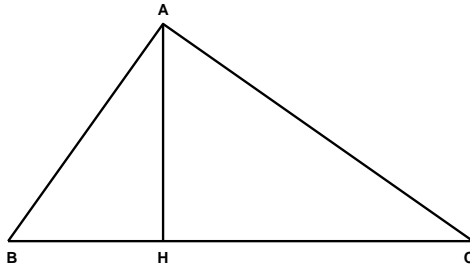
Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point:

$\Rightarrow QP$  coupe  $OS$  en  $H$  situé sur  $AC$ .

## EXGSP033– Liège, septembre 1996.

Soit un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  et  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ .  
De même, soient  $A'B'C'$  un triangle rectangle en  $A'$  et  $H'$  le pied de la hauteur issue de  $A'$ .

Démontrer que si  $|BC| = |B'C'|$  et  $|AH| = |A'H'|$ , les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques.



$$\begin{cases} AH^2 = BH \cdot HC \\ A'H'^2 = B'H' \cdot H'C' \end{cases} \quad \text{car dans un triangle rectangle la hauteur est}$$

moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\rightarrow \begin{cases} AH^2 = BH \cdot (BC - BH) \\ A'H'^2 = B'H' \cdot (B'C' - B'H') \end{cases}$$

Comme  $AH = A'H' = a$  et  $BC = B'C' = b$ , on obtient :

$$\begin{cases} a^2 = BH \cdot (b - BH) \\ a^2 = B'H' \cdot (b - B'H') \end{cases} \quad \text{Ce sont deux équations du second degré qui}$$

la même forme et les mêmes coefficients. Les solutions sont donc identiques.

$$\rightarrow BH = B'H' \quad \text{et} \quad CH = C'H'$$

$\rightarrow \triangle ABC$  et  $\triangle A'B'C'$  sont isométriques.

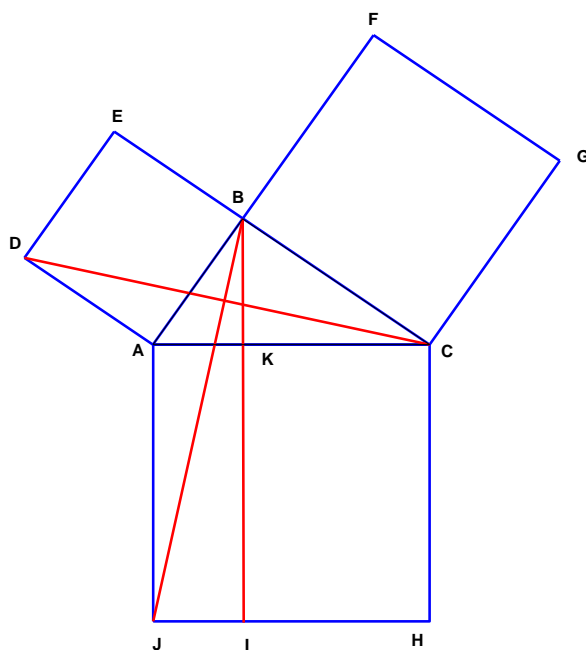
Note

Comme c'est une équation du second degré, il y a deux solutions, qui correspondent aux symétriques.

## EXGSP034 – Théorème de Pythagore, démonstration d'Euclide..

Dans un triangle rectangle ABC, si AC désigne l'hypoténuse, on a

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$



On trace  $BJ$  et  $DC$ . On trace  $BI \parallel CH$ .

$\triangle ADC = \triangle ABJ$  car  $\angle DAC = \angle BAJ$ ,  $DA = AB$  et  $AC = AJ$

Le  $\triangle ADC$  a une surface moitié du carré  $ADEB$ , car  $EC \parallel DA$

$$\mathcal{S}_{ADC} = \frac{1}{2} DA \cdot DE \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{ADEB} = DA \cdot DE$$

De même  $\mathcal{S}_{ABJ} = \frac{1}{2} \mathcal{S}_{AKIJ}$  car  $BI \parallel AJ$

$$\rightarrow \mathcal{S}_{ADEB} = \mathcal{S}_{AKIJ}$$

On démontre de même, mutadis mutandis, que

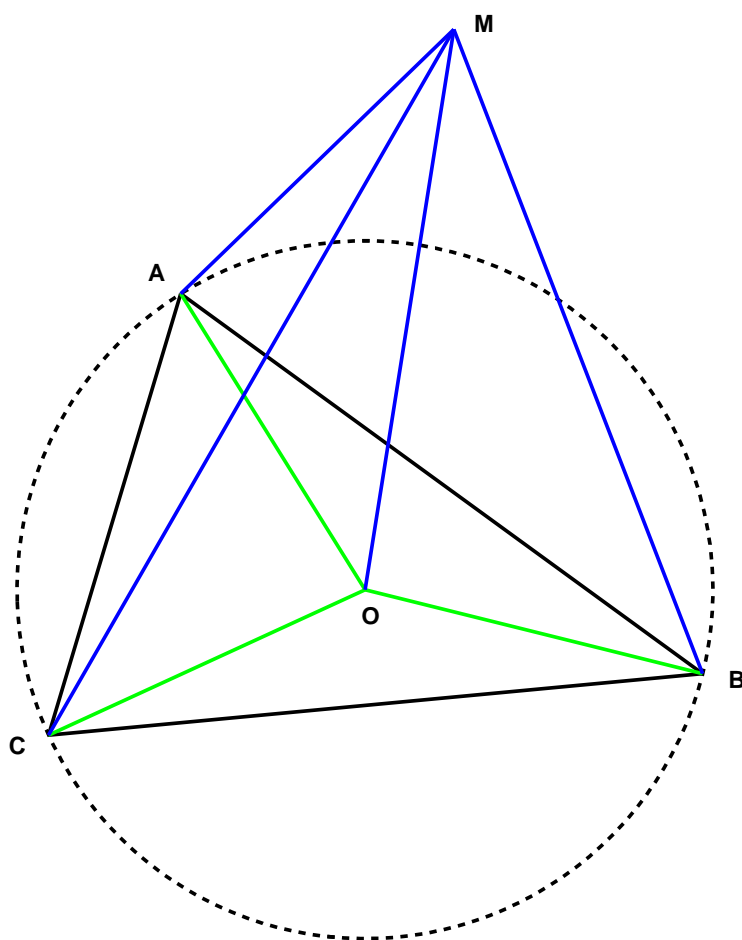
$$\mathcal{S}_{BFGC} = \mathcal{S}_{KCHI}$$

Conclusion :  $\boxed{|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2}$

## EXGSP035 – Liège, juillet 2000.

Si  $O$  est le centre du cercle circonscrit à un triangle  $ABC$  ( $O$  est le point d'intersection des médiatrices) et si  $M$  est un point quelconque du plan, démontrer que le vecteur  $\mathbf{OM}$  est orthogonal au vecteur :

$$|\mathbf{MA}|^2 \cdot \mathbf{BC} + |\mathbf{MB}|^2 \cdot \mathbf{CA} + |\mathbf{MC}|^2 \cdot \mathbf{AB}$$





$$\begin{cases} |\mathbf{MA}|^2 \cdot \mathbf{BC} = \mathbf{MA}^2 \cdot \mathbf{BC} = (\mathbf{MO} + \mathbf{OA})^2 \cdot \mathbf{BC} \\ |\mathbf{MB}|^2 \cdot \mathbf{BA} = \mathbf{MB}^2 \cdot \mathbf{CA} = (\mathbf{MO} + \mathbf{OB})^2 \cdot \mathbf{CA} \\ |\mathbf{MC}|^2 \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{MC}^2 \cdot \mathbf{AB} = (\mathbf{MO} + \mathbf{OC})^2 \cdot \mathbf{AB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\mathbf{MA}|^2 \cdot \mathbf{BC} = (\mathbf{MO} + 2 \mathbf{MO} \cdot \mathbf{OA} + \mathbf{OA})^2 \cdot \mathbf{BC} & (1) \\ |\mathbf{MB}|^2 \cdot \mathbf{BA} = (\mathbf{MO} + 2 \mathbf{MO} \cdot \mathbf{OB} + \mathbf{OB})^2 \cdot \mathbf{CA} & (2) \\ |\mathbf{MC}|^2 \cdot \mathbf{AB} = (\mathbf{MO} + 2 \mathbf{MO} \cdot \mathbf{OC} + \mathbf{OC})^2 \cdot \mathbf{AB} & (3) \end{cases}$$

Or comme  $O$  est le centre du cercle inscrit :

$$\mathbf{OA}^2 = |\mathbf{OA}|^2 = \mathbf{OB}^2 = |\mathbf{OB}|^2 = \mathbf{OC}^2 = |\mathbf{OC}|^2$$

L'expression  $\mathbf{BC} + \mathbf{CA} + \mathbf{AB} = 0$

$$\text{peut s'écrire : } \mathbf{OA}^2 \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{OB}^2 \cdot \mathbf{CA} + \mathbf{OC}^2 \cdot \mathbf{AB} = 0 \quad (4)$$

$$\text{De même : } \mathbf{MO}^2 \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{MO}^2 \cdot \mathbf{CA} + \mathbf{MO}^2 \cdot \mathbf{AB} = 0 \quad (5)$$

Additionnons les équations (1), (2) et (3) en tenant compte de (4) et (5).

Il reste :

$$\begin{aligned} & 2 \mathbf{MO} (\mathbf{OA} \mathbf{BC} + \mathbf{OB} \mathbf{CA} + \mathbf{OC} \mathbf{AB}) & (6) \\ & = 2 \mathbf{MO} (\mathbf{OA} (\mathbf{BO} + \mathbf{OC}) + \mathbf{OB} (\mathbf{CO} + \mathbf{OA}) + \mathbf{OC} (\mathbf{AO} + \mathbf{OB})) \\ & = 2 \mathbf{MO} (-\mathbf{OA} \mathbf{OB} + \mathbf{OA} \mathbf{OC} - \mathbf{OB} \mathbf{OC} + \mathbf{OA} \mathbf{OB} - \mathbf{OC} \mathbf{OA} + \mathbf{OC} \mathbf{OB}) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Le deuxième vecteur est donc nul.

Par conséquent : les deux vecteurs sont orthogonaux, puisque leur produit est nul.

Remarque :

On ne peut pas déduire directement que l'équation (6) est nulle.

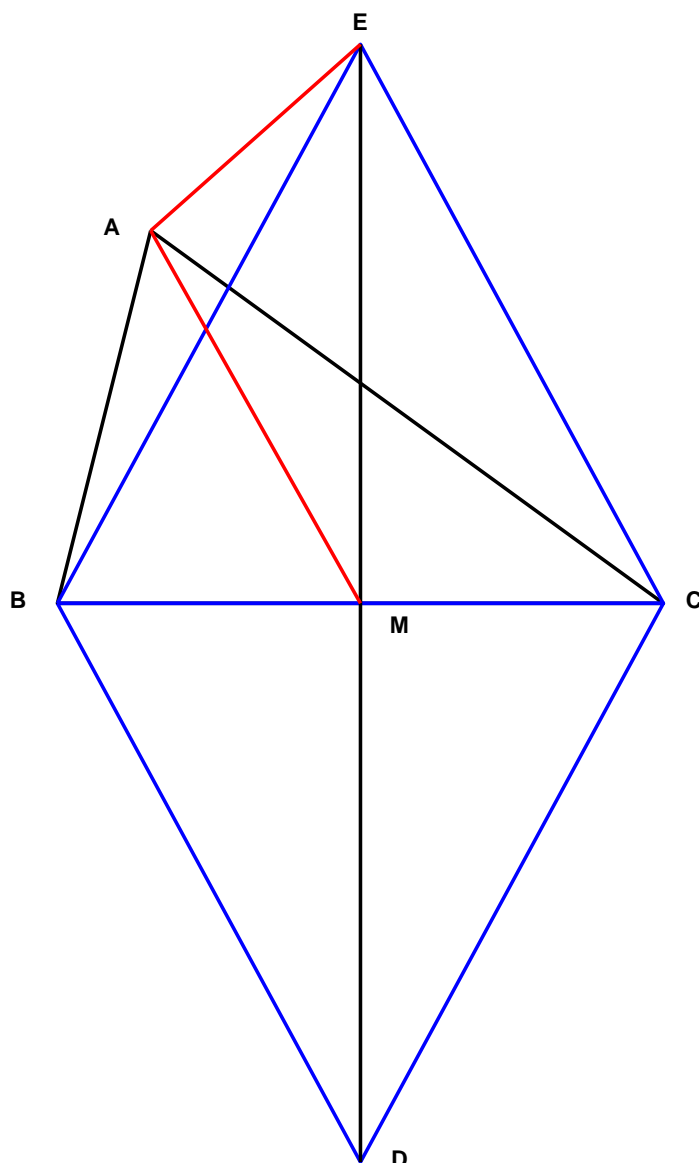
Il ne faut pas confondre le type de l'équation  $\mathbf{OA} \mathbf{BC} + \mathbf{OB} \mathbf{CA} + \mathbf{OC} \mathbf{AB}$  (où chaque terme est le produit de deux vecteurs) avec le type de l'équation (4)  $\mathbf{OA}^2 \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{OB}^2 \cdot \mathbf{CA} + \mathbf{OC}^2 \cdot \mathbf{AB}$  (où chaque terme est le produit d'un scalaire par un vecteur).

## EXGSP036 – Liège, septembre 2000.

On donne un triangle ABC et deux points distincts D et E tels que BCD et BCE soient des triangles équilatéraux.

Montrer que :

$$|\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{CA}|^2$$



Développons le premier membre de l'égalité :

$$\begin{cases} \mathbf{AD} = \mathbf{AM} + \mathbf{MD} \rightarrow \mathbf{AD}^2 = \mathbf{AM}^2 + 2 \mathbf{AM MD} + \mathbf{MD}^2 \\ \mathbf{AE} = \mathbf{AM} + \mathbf{ME} \rightarrow \mathbf{AE}^2 = \mathbf{AM}^2 + 2 \mathbf{AM ME} + \mathbf{ME}^2 \end{cases}$$

En additionnant membre à membres et en tenant compte que

$$\mathbf{AM MD} = -\mathbf{AM ME} \quad \text{et que} \quad \mathbf{MD}^2 = \mathbf{ME}^2$$

On obtient:

$$|\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2 = 2 |\mathbf{AM}|^2 + 2 |\mathbf{ME}|^2$$

$$\text{Or } |\mathbf{ME}|^2 = \frac{3}{4} |\mathbf{BC}|^2 \quad (\text{car } \mathbf{BE} = \mathbf{BC} = \frac{1}{2} \mathbf{MB})$$

$$\text{Finalement: } |\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2 = 2 |\mathbf{AM}|^2 + \frac{3}{2} |\mathbf{BC}|^2 \quad (1)$$

Développons le second membre de l'égalité.

$$\begin{cases} \mathbf{AB} = \mathbf{AM} + \mathbf{MB} = \mathbf{AM} + \frac{1}{2} \mathbf{CB} \\ \mathbf{BC} = \mathbf{BC} \\ \mathbf{CA} = \mathbf{CM} + \mathbf{MA} = \frac{1}{2} \mathbf{CB} + \mathbf{MA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\mathbf{AB}|^2 = |\mathbf{AM}|^2 + \mathbf{AM CB} + \frac{1}{4} |\mathbf{CB}|^2 \\ |\mathbf{BC}|^2 = |\mathbf{BC}|^2 \\ |\mathbf{CA}|^2 = \frac{1}{4} |\mathbf{CB}|^2 + \mathbf{CB MA} + |\mathbf{MA}|^2 \end{cases}$$

On additionne membre à membre :

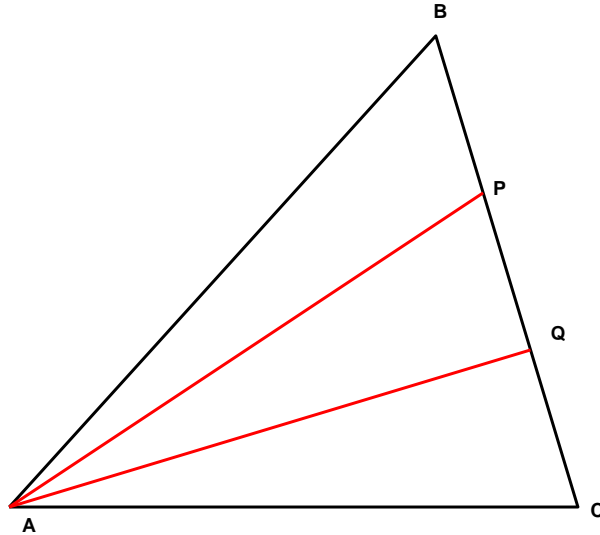
$$|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{CA}|^2 = \frac{3}{2} |\mathbf{CB}|^2 + 2 |\mathbf{MA}|^2 \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont égales.

## EXGSP037 – Liège, septembre 2000.

Soit ABC un triangle. Les points P et Q partagent le côté BC en trois parties égales.

- Exprimer  $|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AQ}|^2$  en fonction de  $|\mathbf{AP}|^2 + |\mathbf{PQ}|^2$
- Démontrer que  $|\mathbf{AB}|^2 - |\mathbf{AC}|^2 = 3(|\mathbf{AP}|^2 - |\mathbf{AQ}|^2)$



$$1) \text{ On a : } \mathbf{AB} + \mathbf{AQ} = 2 \mathbf{AP} \rightarrow \mathbf{AB}^2 + 2 \mathbf{AB} \mathbf{AQ} + \mathbf{AQ}^2 = 4 \mathbf{AP}^2$$

$$\text{or } \mathbf{AB} = \mathbf{AP} + \mathbf{PB} = \mathbf{AP} - \mathbf{PB} = \mathbf{AP} - \mathbf{PQ}$$

$$\text{et } \mathbf{AQ} = \mathbf{AP} + \mathbf{PQ}$$

$$\text{Donc } \mathbf{AB}^2 + 2(\mathbf{AP} - \mathbf{PQ})(\mathbf{AP} + \mathbf{PQ}) + \mathbf{AQ}^2 = 4 \mathbf{AP}^2$$

$$\rightarrow \mathbf{AB}^2 + 2 \mathbf{AP}^2 - 2 \mathbf{PQ}^2 + \mathbf{AQ}^2 = 4 \mathbf{AP}^2$$

$$\rightarrow \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AQ}^2 = 2(\mathbf{AP}^2 + \mathbf{AQ}^2)$$

$$\text{Et finalement : } \boxed{|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AQ}|^2 = 2(|\mathbf{AP}|^2 + |\mathbf{AQ}|^2)}$$

2) Développons le premier membre :

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}|^2 - |\mathbf{AC}|^2 &= \mathbf{AB}^2 - \mathbf{AC}^2 = (\mathbf{AB} - \mathbf{AC})(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) \\ &= -\mathbf{BC}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) = -3 \mathbf{PQ}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) \end{aligned}$$

Développons le deuxième membre :

$$\begin{aligned} 3(|\mathbf{AP}|^2 - |\mathbf{AQ}|^2) &= 3(\mathbf{AP}^2 - \mathbf{AQ}^2) = 3(\mathbf{AP} - \mathbf{AQ})(\mathbf{AP} + \mathbf{AQ}) \\ &= -3 \mathbf{PQ}(\mathbf{AP} + \mathbf{AQ}) = -3 \mathbf{PQ}(\mathbf{AB} + \mathbf{BP} + \mathbf{AC} + \mathbf{CQ}) \\ &= -3 \mathbf{PQ}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) \end{aligned}$$

Ce qui vérifie l'égalité.

## EXGSP038 – Liège, juillet 1999.

Si les quatre points A, B, C et H vérifient

$$\mathbf{AH} \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{BH} \cdot \mathbf{CA} + \mathbf{CH} \cdot \mathbf{AB} = 0$$

Et si X est tel que :

$$2 \mathbf{XH} = \mathbf{AH} + \mathbf{BH} + \mathbf{CH}$$

Démontrer que :

$$|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{CX}|^2$$

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{AX} &= 2 \mathbf{AB} + 2 \mathbf{BH} + 2 \mathbf{HX} = 2 \mathbf{AB} + 2 \mathbf{BH} - \mathbf{AH} - \mathbf{BH} - \mathbf{CH} \\ &= 2 \mathbf{AB} + \mathbf{BH} - \mathbf{AH} - \mathbf{CH} = 2 \mathbf{AB} - \mathbf{AB} - \mathbf{CH} = \mathbf{AB} - \mathbf{CH} \end{aligned}$$

De même pour  $\mathbf{BX}$  et  $\mathbf{CX}$ . On aura donc :

$$\begin{cases} 2 \mathbf{AX} = \mathbf{AB} - \mathbf{CH} \rightarrow 4 |\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CH}|^2 \quad \text{car } \mathbf{AB} \cdot \mathbf{CH} = 0 \\ 2 \mathbf{BX} = \mathbf{BC} - \mathbf{AH} \rightarrow 4 |\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{AH}|^2 \quad \text{car } \mathbf{BC} \cdot \mathbf{AH} = 0 \\ 2 \mathbf{CX} = \mathbf{CA} - \mathbf{BH} \rightarrow 4 |\mathbf{CX}|^2 = |\mathbf{CA}|^2 + |\mathbf{BH}|^2 \quad \text{car } \mathbf{CA} \cdot \mathbf{BH} = 0 \end{cases}$$

Or  $2 \mathbf{AX} = \mathbf{AB} - \mathbf{CH}$  donne aussi:

$$2 (\mathbf{AB} + \mathbf{BX}) = \mathbf{AB} - \mathbf{CH}$$

$$2 \mathbf{BX} = -\mathbf{AB} - \mathbf{CH} \rightarrow 4 |\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CH}|^2$$

Et donc  $|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2$

De même :

$2 \mathbf{BX} = \mathbf{BC} - \mathbf{AH}$  donne aussi:

$$2 (\mathbf{BC} + \mathbf{CX}) = \mathbf{BC} - \mathbf{AH}$$

$$2 \mathbf{CX} = -\mathbf{BC} - \mathbf{AH} \rightarrow 4 |\mathbf{CX}|^2 = |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{AH}|^2$$

Et donc :  $|\mathbf{CX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2$

Finalement :  $\boxed{|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{CX}|^2}$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

## EXGSP039 – Liège, septembre 1999.

Démontrer que si

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} = \mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} = 0$$

Alors

- 1)  $\mathbf{AD} \cdot \mathbf{BC} = 0$
- 2)  $|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CD}|^2 = |\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{BD}|^2$

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathbf{AD} \cdot \mathbf{BC} &= (\mathbf{AB} + \mathbf{BD})(\mathbf{BD} + \mathbf{DC}) \\ &= \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BD} + \mathbf{BD}^2 + \mathbf{AB} \cdot \mathbf{DC} + \mathbf{BD} \cdot \mathbf{DC} \\ &= \mathbf{AB}(\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) + \mathbf{BD}^2 + \mathbf{BD}(\mathbf{DA} + \mathbf{AC}) \\ &= \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} + \mathbf{BD}^2 + \mathbf{BD} \cdot \mathbf{DA} + \mathbf{BD} \cdot \mathbf{AC} \\ &= \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{BD}(\mathbf{BD} + \mathbf{DA}) \\ &= \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{BD} \cdot \mathbf{BA} = \mathbf{AB}(\mathbf{BC} - \mathbf{BD}) = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (\mathbf{AB} + \mathbf{CD})^2 &= (\mathbf{AD} + \mathbf{DB} + \mathbf{CA} + \mathbf{AD})^2 \\ &= \mathbf{AB}^2 + 2\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} + \mathbf{CD}^2 \\ &= 4\mathbf{AD}^2 + \mathbf{DB}^2 + \mathbf{CA}^2 + 4\mathbf{AD} \cdot \mathbf{DB} + 4\mathbf{AD} \cdot \mathbf{CA} + 2\mathbf{DB} \cdot \mathbf{CA} \end{aligned}$$

Or  $4\mathbf{AD} \cdot \mathbf{DB} + 4\mathbf{AD} \cdot \mathbf{CA} = 4\mathbf{AD}(\mathbf{DB} + \mathbf{CA}) = 4\mathbf{AD}(\mathbf{DC} + \mathbf{CB} + \mathbf{CA})$

$$= 4\mathbf{AD} \cdot \mathbf{CB} + 4\mathbf{AD}(\mathbf{DC} + \mathbf{CA}) = -4\mathbf{AD}^2$$

$$\rightarrow \mathbf{AB}^2 + \mathbf{CD}^2 = \mathbf{DB}^2 + \mathbf{CA}^2$$

Finalement :  $\boxed{|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CD}|^2 = |\mathbf{DB}|^2 + |\mathbf{CA}|^2}$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.