

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 4

EXGSP040 – EXGSP049

<http://www.matheux.be.tf>

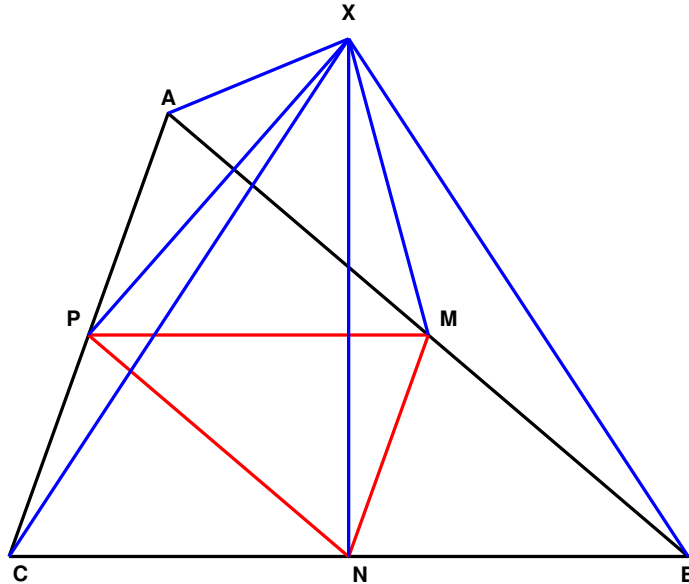
Jacques Collot

1 avril 03

EXGSP040 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 1998.

Soient ABC un triangle et M , N , et P les milieux de $|AB|$, $|BC|$, et $|CA|$.

$$\left(|\mathbf{XA}|^2 + |\mathbf{XB}|^2 + |\mathbf{XC}|^2\right) - \left(|\mathbf{XM}|^2 + |\mathbf{XN}|^2 + |\mathbf{XP}|^2\right) = |\mathbf{MN}|^2 + |\mathbf{NP}|^2 + |\mathbf{PM}|^2$$



On notera que

$$\begin{cases} \mathbf{PM} = \mathbf{CN} = \mathbf{NB} \\ \mathbf{MN} = \mathbf{AP} = \mathbf{PC} \\ \mathbf{PN} = \mathbf{AM} = \mathbf{MC} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \mathbf{XA} = \mathbf{XP} + \mathbf{PA} \rightarrow \mathbf{XA}^2 = \mathbf{XP}^2 + 2 \mathbf{XP} \cdot \mathbf{PA} + \mathbf{NM}^2 \\ \mathbf{XB} = \mathbf{XM} + \mathbf{MB} \rightarrow \mathbf{XB}^2 = \mathbf{XM}^2 + 2 \mathbf{XM} \cdot \mathbf{MB} + \mathbf{PN}^2 \\ \mathbf{XC} = \mathbf{XN} + \mathbf{NC} \rightarrow \mathbf{XC}^2 = \mathbf{XN}^2 + 2 \mathbf{XN} \cdot \mathbf{NC} + \mathbf{MP}^2 \end{cases}$$

L'expression à démontrer se résume donc à vérifier que :

$$\mathbf{XP} \cdot \mathbf{PA} + \mathbf{XM} \cdot \mathbf{MP} + \mathbf{XN} \cdot \mathbf{NC} = 0$$

Or le premier membre peut s'écrire :

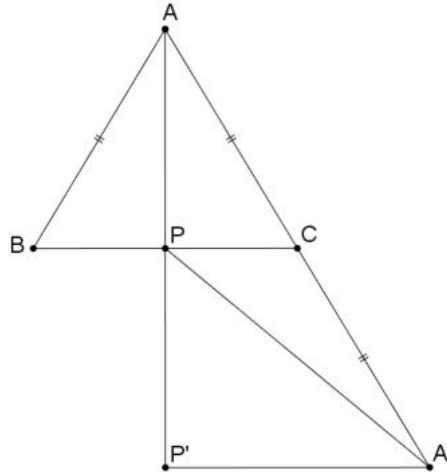
$$\begin{aligned} & (\mathbf{XN} + \mathbf{NP}) \mathbf{NM} + (\mathbf{XN} + \mathbf{NM}) \cdot \mathbf{MP} + \mathbf{XN} \cdot \mathbf{NC} \\ &= \mathbf{XN} \cdot \mathbf{NM} + \mathbf{NP} \cdot \mathbf{NM} + \mathbf{XN} \cdot \mathbf{PN} + \mathbf{NM} \cdot \mathbf{PN} + \mathbf{XN} \cdot \mathbf{MP} \\ &= \mathbf{XN} (\mathbf{NM} + \mathbf{PN} + \mathbf{MP}) = \mathbf{XN} \cdot \mathbf{0} = 0 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP041 – FACA, ULiège, Liège, septembre 1998.

Soient ABC un triangle isocèle de base BC ($|AB| = |AC|$), et A' le point de AC tel que $|A'C| = |AC|$ avec $A' \neq A$

Démontrer que si P est le milieu de BC alors $|A'P|^2 = |AP|^2 + 4|PC|^2$



Méthode 1

Utilisation des vecteurs

$$\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CP}$$

$$|\overrightarrow{A'P}|^2 = |\overrightarrow{A'C}|^2 + 2\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{CP} + |\overrightarrow{CP}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP} + |\overrightarrow{CP}|^2$$

$$|\overrightarrow{A'P}|^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + 2|\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2$$

$$\text{Car } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP} = |\overrightarrow{PC}|^2 \quad \text{et} \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2$$

$$\text{Finalement : } \boxed{|\overrightarrow{A'P}|^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 + 4|\overrightarrow{PC}|^2}$$

Méthode 2

Le prolongement de la droite AP et de la parallèle à BC par A' détermine P' .

Il est alors immédiat que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP'}$ et $2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{P'A'}$

Par Pythagore, on a $|\overrightarrow{A'P}|^2 = |\overrightarrow{PP'}|^2 + |\overrightarrow{P'A'}|^2$

$$\text{En remplaçant, on trouve : } \boxed{|\overrightarrow{A'P}|^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 + 4|\overrightarrow{PC}|^2}$$

1998. Modifié le 4 juillet 2020.

EXGSP042 – Liège, septembre 1998.

Démontrer que si :

$$2 \mathbf{AX} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD}$$

On a :

$$2 \mathbf{BX} = \mathbf{BC} + \mathbf{AD} \quad 2 \mathbf{CX} = \mathbf{CD} + \mathbf{AB} \quad 2 \mathbf{DX} = \mathbf{DB} + \mathbf{AC}$$

et

$$|\mathbf{AX}|^2 + |\mathbf{BX}|^2 + |\mathbf{CX}|^2 + |\mathbf{DX}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AD}|^2$$

On a

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{BX} &= 2 \mathbf{BC} + 2 \mathbf{CA} + 2 \mathbf{AX} \\ &= 2 \mathbf{BC} + 2 \mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD} \\ &= 2 \mathbf{BC} + \mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{AD} \\ &= 2 \mathbf{BC} + \mathbf{CB} + \mathbf{AD} \\ &= \mathbf{BC} + \mathbf{AD} \end{aligned}$$

De même pour les autres égalités.

Donc

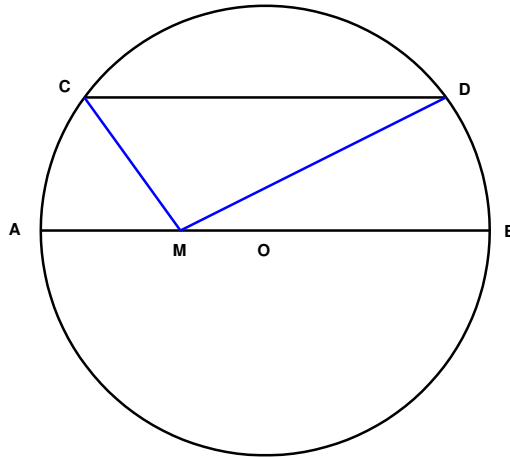
$$\begin{aligned} \mathbf{AX}^2 + \mathbf{BX}^2 + \mathbf{CX}^2 + \mathbf{DX}^2 &= \mathbf{AX}^2 + (\mathbf{BA} + \mathbf{AX})^2 + (\mathbf{CA} + \mathbf{AX})^2 + (\mathbf{DA} + \mathbf{AX})^2 \\ &= \mathbf{AX}^2 + (\mathbf{AX} - \mathbf{AB})^2 + (\mathbf{AX} - \mathbf{AC})^2 + (\mathbf{AX} - \mathbf{AD})^2 \\ &= \mathbf{AX}^2 + \mathbf{AX}^2 - 2 \mathbf{AX} \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AX}^2 - 2 \mathbf{AX} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{AC}^2 \\ &\quad + \mathbf{AX}^2 - 2 \mathbf{AX} \cdot \mathbf{AD} + \mathbf{AD}^2 \\ &= 4 \mathbf{AX}^2 - 2 \mathbf{AX} (\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD}) + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 \\ &= 4 \mathbf{AX}^2 - 2 \mathbf{AX} \cdot \mathbf{AX} + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 \\ &= \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 \end{aligned}$$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP043 – Liège, juillet 1997.

Soient un cercle de diamètre AB et CD une corde parallèle à AB.
Démontrer que quel que soit M appartenant à | AB |, on a

$$|MC|^2 + |MD|^2 = |MA|^2 + |MB|^2$$



$$\begin{aligned} MC^2 + MD^2 &= (MA + AC)^2 + (MB + BD)^2 \\ &= MA^2 + 2 MA.AC + AC^2 + MB^2 + 2 MB.BD + BD^2 \\ &= MA^2 + 2 (MO + OA).(AO + OC) + (AO + OC)^2 \\ &\quad + MB^2 + 2 (MO + OB).(BO + OD) + (BO + OD)^2 \\ &= MA^2 + 2 MO.AO + 2 MO.OC + 2 OA.AO + 2 OA.OC + AO^2 + 2 AO.OC + OC^2 \\ &\quad + MB^2 + 2 MO.BO + 2 MO.OD + 2 OB.BO + 2 OB.OD + BO^2 + 2 BO.OD + OD^2 \end{aligned}$$

En tenant compte que

$$2 MO.AO = -2 MO.BO$$

$$2 MO.OC = -2 MO.OD$$

$$2 OA.OC = -2 OB.OD$$

$$2 AO.OC = -2 BO.OD$$

$$2 OA.AO = -2 AO^2$$

$$2 OB.BO = -2 BO^2$$

$$OC^2 = AO^2$$

$$OD^2 = BO^2$$

L'expression se simplifie pour donner

$$MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$$

Donc

$$\boxed{|MC|^2 + |MD|^2 = |MA|^2 + |MB|^2}$$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP044 – Théorème de la médiane.

FACS – ULB – Bruxelles, septembre 07

Soit un triangle ABC, et AM une médiane.

Démontrer

$$|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 = 2|\mathbf{AM}|^2 + 2|\mathbf{BM}|^2$$

Ou bien

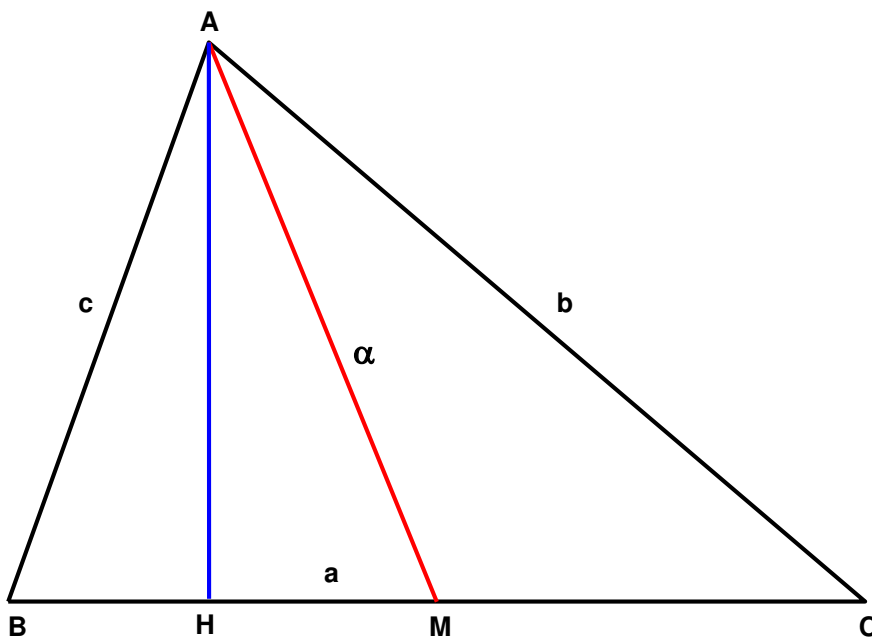
$$|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 = 2|\mathbf{AM}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{BC}|^2$$

Si a , b et c désignent les longueurs des côtés et α , β , δ , les longueurs des médianes correspondantes, démontrer que

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$$

Enoncé ULB (Sep 07)

On donne un triangle de sommets A , B et C . Soit M le milieu du segment $[A, B]$. Calculer la longueur de la médiane $[C, M]$ en fonction, uniquement, des longueurs des côtés du triangle



Première égalité.

Soit AH la hauteur :

$$|AC|^2 = |MC|^2 + |AM|^2 + 2 |MC|. |MH|$$

$$|AB|^2 = |BM|^2 + |AM|^2 - 2 |MB|. |MH|$$

$$|AC|^2 + |AB|^2 = 2 |AM|^2 + 2 |BM|^2$$

Deuxième égalité.

$$\begin{aligned} AC^2 + AB^2 &= (AM + MC)^2 + (AM + MB)^2 \\ &= AM^2 + 2AM.MC + MC^2 + AM^2 + 2AM.MB + MB^2 \\ &= 2 AM^2 + 2 MB^2 \end{aligned}$$

$$|AC|^2 + |AB|^2 = 2 |AM|^2 + 2 |BM|^2 = 2 |AM|^2 + \frac{1}{2} |BC|^2$$

Appliquons l'égalité obtenue :

$$b^2 + c^2 = 2 \alpha^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$b^2 + a^2 = 2 \delta^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + c^2 = 2 \beta^2 + \frac{b^2}{2}$$

Additionnons membre à membre :

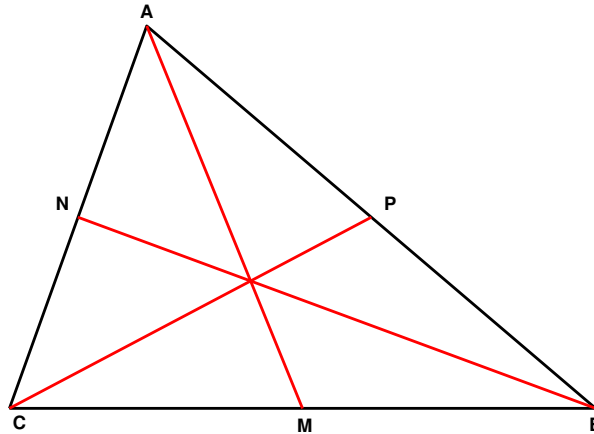
$$b^2 + c^2 + b^2 + a^2 + a^2 + c^2 = 2 \alpha^2 + \frac{a^2}{2} + 2 \delta^2 + \frac{c^2}{2} + 2 \beta^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}$$

EXGSP045 – Liège, juillet 1997.

Soient ABC trois points et M, N, P les milieux de BC, CA et AB.
Démontrer

$$|\mathbf{AM}|^2 + |\mathbf{BN}|^2 + |\mathbf{CP}|^2 = \frac{3}{4} (|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{CA}|^2)$$



Première méthode.

Il suffit d'appliquer directement le théorème de la médiane.

Voir EXGSP044.

Deuxième méthode.

La relation s'écrit :

$$4|\mathbf{AM}|^2 + 4|\mathbf{BN}|^2 + 4|\mathbf{CP}|^2 = 3|\mathbf{AB}|^2 + 3|\mathbf{BC}|^2 + 3|\mathbf{CA}|^2$$

On a pour le premier membre:

$$\begin{aligned} 4|\mathbf{AM}|^2 + 4|\mathbf{BN}|^2 + 4|\mathbf{CP}|^2 &= 4(\mathbf{AB} + \mathbf{BM})^2 + 4(\mathbf{BC} + \mathbf{CN})^2 + 4(\mathbf{CA} + \mathbf{AP})^2 \\ &= 4|\mathbf{AB}|^2 + 8\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BM} + 4|\mathbf{BM}|^2 \\ &\quad + 4|\mathbf{BC}|^2 + 8\mathbf{BC} \cdot \mathbf{CN} + 4|\mathbf{CN}|^2 \\ &\quad + 4|\mathbf{CA}|^2 + 8\mathbf{CA} \cdot \mathbf{AP} + 4|\mathbf{AP}|^2 \end{aligned}$$

En ramenant tout dans le premier membre, la relation devient :

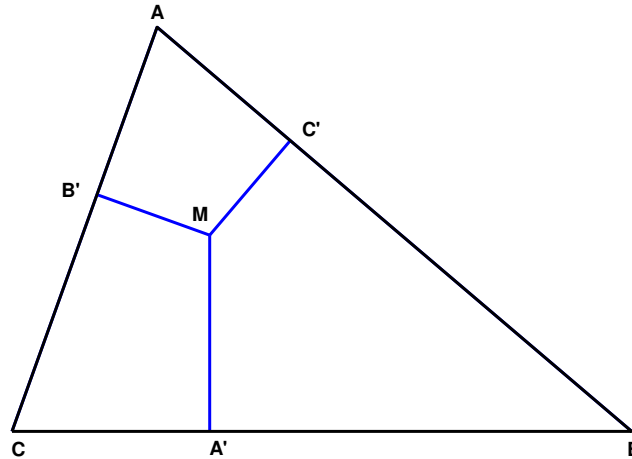
$$\begin{aligned} &|\mathbf{AB}|^2 + 8\mathbf{AB} \cdot \frac{\mathbf{BC}}{2} + |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{BC}|^2 + 8\mathbf{BC} \cdot \frac{\mathbf{CA}}{2} + |\mathbf{CA}|^2 + |\mathbf{CA}|^2 + 8\mathbf{CA} \cdot \frac{\mathbf{AB}}{2} + |\mathbf{AB}|^2 \\ &= 2|\mathbf{AB}|^2 + 2|\mathbf{BC}|^2 + 2|\mathbf{CA}|^2 + 4\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} + 4\mathbf{BC} \cdot \mathbf{CA} + 4\mathbf{CA} \cdot \mathbf{AB} \\ &= 2|\mathbf{AB}|^2 + 2|\mathbf{BC}|^2 + 2|\mathbf{CA}|^2 + 4\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) + 4\mathbf{BC} \cdot (\mathbf{CA} + \mathbf{BA}) + 4\mathbf{CA} \cdot (\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) \\ &= 2|\mathbf{AB}|^2 + 2|\mathbf{BC}|^2 + 2|\mathbf{CA}|^2 - 4|\mathbf{AB}|^2 + 4\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} - 4|\mathbf{BC}|^2 + 4\mathbf{BC} \cdot \mathbf{BA} - 4|\mathbf{CA}|^2 + 4\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB} \\ &= -2|\mathbf{AB}|^2 + 4\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} - 2|\mathbf{BC}|^2 + 4\mathbf{BC} \cdot \mathbf{BA} - 2|\mathbf{CA}|^2 + 4\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB} \\ &= 2\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} + 2\mathbf{AB}(\mathbf{AC} - \mathbf{AB}) + 2\mathbf{BC} \cdot \mathbf{BA} + 2\mathbf{BC}(\mathbf{BA} - \mathbf{BC}) + 2\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB} + 2\mathbf{CA}(\mathbf{CB} - \mathbf{CA}) \\ &= 2\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} + 2\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} + 2\mathbf{BC} \cdot \mathbf{BA} + 2\mathbf{BC} \cdot \mathbf{CA} + 2\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB} + 2\mathbf{CA} \cdot \mathbf{AB} \\ &= 0 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

EXGSP046 – Liège, septembre 1997.

Soit ABC un triangle. Les projections orthogonales d'un point M intérieur sur le côtés AB, BC et CA sont respectivement C', A' et B' .

Démontrer

$$|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |A'C|^2 + |B'A|^2 + |C'B|^2$$



L'expression peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (AM+MC')^2 + (BM+MA')^2 + (CM+MB')^2 \\ = (A'M+MC)^2 + (B'M+MA)^2 + (C'M+MB)^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} AM^2 + 2 AM.MC' + MC'^2 & \quad A'M^2 + 2 A'M.MC + MC^2 \\ + BM^2 + 2 BM.MA' + MA'^2 & = + B'M^2 + 2 B'M.MA + MA^2 \\ + CM^2 + 2 CM.MB' + MB'^2 & \quad + C'M^2 + 2 C'M.MB + MB^2 \end{aligned}$$

Après élimination des termes semblables :

$$\begin{aligned} (AC' + C'M).MC' & \quad (MA' + A'C).A'M \\ + (BA' + A'M).MA' & = + (MB' + B'A).BM' \\ + (CB' + B'M).MB' & \quad + (MC' + C'B).C'M \\ \rightarrow MC'^2 + MA'^2 + MB'^2 & = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

EXGSP047 – Liège, juillet 1996.

Soient ABCDX cinq points distincts.

Sachant que $\mathbf{AB.CD} = \mathbf{BC.DA} = 0$, , démontrer que $\mathbf{AC.BD} = 0$

Sachant en outre que

$$\mathbf{AX.AB} = \mathbf{AX.AC} = \mathbf{AX.AD} = \mathbf{AB.AC}$$

Démontrer

$$\mathbf{BX.BC} = \mathbf{BX.BD} = \mathbf{BX.BA} = \mathbf{BC.BD}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{AB.CD} &= (\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) \mathbf{CD} = \mathbf{AC.CD} + \mathbf{CB.CD} \\ &= \mathbf{AC} (\mathbf{CB} + \mathbf{BD}) + \mathbf{CB} (\mathbf{CA} + \mathbf{AD}) \\ &= \mathbf{AC.CB} + \mathbf{AC.BD} + \mathbf{CB.CA} + \mathbf{CB.AD} \\ &= \mathbf{AC.BD} = 0\end{aligned}$$

Vérifions par exemple : $\mathbf{BX.BC} = \mathbf{BX.BD}$

$$(\mathbf{BA} + \mathbf{AX})(\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) = (\mathbf{BA} + \mathbf{AX})(\mathbf{BA} + \mathbf{AD})$$

$$\mathbf{BA}^2 + \mathbf{BA.AC} + \mathbf{AX.BA} + \mathbf{AX.AC} = \mathbf{BA}^2 + \mathbf{BA.AD} + \mathbf{AX.AD} + \mathbf{AX.BA}$$

$$\mathbf{BA.AC} = \mathbf{BA.AD}$$

$$\mathbf{AB.AC} = \mathbf{AB} (\mathbf{AC} + \mathbf{CD})$$

$$\mathbf{AB.AC} = \mathbf{AB.AC} + \mathbf{AB.CD}$$

$$\mathbf{AB.AC} = \mathbf{AB.AC} \quad \text{CQFD}$$

Même chose pour $\mathbf{BX.BA}$

Pour $\mathbf{BX.BC} = \mathbf{BC.BD}$ on a successivement

$$\begin{aligned}\mathbf{BX.BC} &= (\mathbf{BD} + \mathbf{DX}) \mathbf{BC} = \mathbf{BD.BC} + \mathbf{DX.BC} = \mathbf{BD.BC} + (\mathbf{DA} + \mathbf{AX}) \mathbf{BC} \\ &= \mathbf{BD.BC} + \mathbf{DA.BC} + \mathbf{AX.BC} = \mathbf{BD.BC} + \mathbf{AX} (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) \\ &= \mathbf{BD.BC} + \mathbf{AX.BA} + \mathbf{AX.AC} = \mathbf{BD.BC}\end{aligned}$$

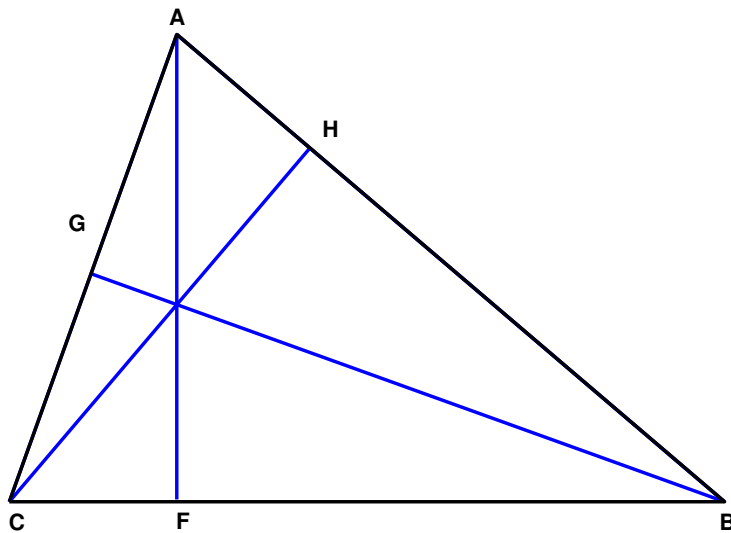
EXGSP048 – Liège, septembre 1996.

Soit un triangle ABC et soient F, G et H les pieds des hauteurs issues de A, B et C.

Démontrer

$$|BC|^2 = BA \cdot BH + CA \cdot CG$$

$$|BC|^2 + |CA|^2 - |AB|^2 = CA \cdot CG + CB \cdot CF$$



$$\begin{aligned} 1) \quad BC^2 &= BC(BA + AC) = BA \cdot BC + CA \cdot CB \\ &= BA(BC + CH) + CA(CB + BG) \\ &= BA \cdot BH + CA \cdot CG \end{aligned}$$

$$\rightarrow |BC|^2 = BA \cdot BH + CA \cdot CG$$

$$\begin{aligned} 2) \quad CA \cdot CG + CB \cdot CF &= CA(CB + BG) + CB(CA + AF) \\ &= CA \cdot CB + CB \cdot CA \\ &= CA(CA + AB) + CB(CB + BA) \\ &= CA^2 + CA \cdot AB + CB^2 + CB \cdot BA \\ &= CA^2 + CB^2 + AB \cdot (CA + CB) \\ &= CA^2 + CB^2 + AB \cdot (CA - CB) \\ &= CA^2 + CB^2 - AB^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow |CA|^2 + |CB|^2 - |AB|^2 = CA \cdot CG + CB \cdot CF$$

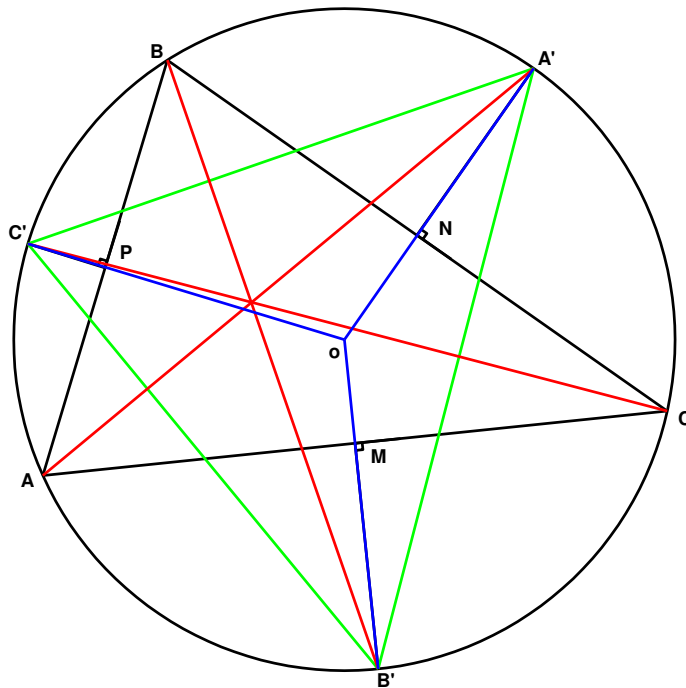
EXGSP049 – Liège, juillet 2001.

Soit ABC un triangle et son cercle circonscrit (c'est-à-dire le cercle passant par A , B et C).

On note A' le point d'intersection du cercle avec la médiatrice du segment $[B, C]$ qui est tel que A et A' soient situés de part et d'autre de la droite BC .

Les points B' et C' sont définis de façon analogue : B' sur le cercle et la médiatrice du segment $[A, C]$, C' sur le cercle et la médiatrice du segment $[A, B]$, B et B' de part et d'autre de AC , C et C' de part et d'autre de AB .

Prouver que les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes.



A' est sur la médiatrice de BC , donc l'arc BA' est égal à l'arc $A'C$.

Par conséquent, on a l'égalité suivantes entre les angles :

$$\angle A'C'C = \angle A'AC = \angle BB'A' = \angle BAA'.$$

Donc, AA' est la bissectrice de l'angle BAC .

Même raisonnement pour BB' et CC' .

Or les bissectrices d'un triangle se coupent en un même point.

AA' , BB' et CC' sont concourantes.