

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique plane**

## **GSP 5**

**EXGSP050 – EXGSP059**

**<http://www.matheux.be.tf>**

**Jacques Collot**

1 avril 03

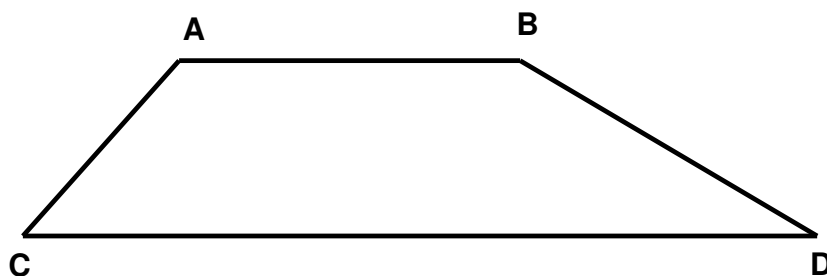
## EXGSP050 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

On donne quatre points ABCD, sommets d'un trapèze, en ce sens que la droite AB est parallèle à la droite CD. On donne aussi un réel  $k \neq 0$ .

Les points M, N, P, Q sont définis par les égalités suivantes.

$$\mathbf{AM} = k \mathbf{AD} \quad \mathbf{NC} = \frac{1-k}{k} \mathbf{AN} \quad \mathbf{BP} = k \mathbf{BD} \quad \mathbf{QC} = (1-k) \mathbf{BC}$$

- Montrer que les points M, N, P, Q sont alignés.
- Prouver que les segments [P,N] et [Q,M] ont même milieu.
- Pour quelle(s) valeur(s) de k les points A, B, Q, M sont-ils les sommets d'un parallélogramme ?  
(On donnera la réponse en fonction du paramètre t tel que  $\mathbf{CD} = k \mathbf{AB}$ )



$$a) \mathbf{AC} = \mathbf{AN} + \mathbf{NC} = \mathbf{AN} + \frac{1-k}{k} \mathbf{AN} \rightarrow \mathbf{AN} = k \mathbf{AC}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{PN} &= \mathbf{PB} + \mathbf{BN} = -k \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + \mathbf{AN} = -k \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + k \mathbf{AC} \\ &= -k (\mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BD}) + k \mathbf{AB} - \mathbf{AB} = -k \mathbf{CD} + (k-1) \mathbf{AB} \\ &= -kt \mathbf{AB} + (k-1) \mathbf{AB} \rightarrow \boxed{\mathbf{PN} = (k-kt-1) \mathbf{AB}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{PM} &= \mathbf{PB} + \mathbf{BA} + \mathbf{AM} = -k \mathbf{BD} - \mathbf{AB} + k \mathbf{AD} \\ &= -k \mathbf{BD} - \mathbf{AB} + k \mathbf{AB} + k \mathbf{BD} \rightarrow \boxed{\mathbf{PM} = (k-1) \mathbf{AB}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= \mathbf{PB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CQ} = -k \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + \mathbf{AC} + (k-1) \mathbf{BC} \\ &= -k \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + \mathbf{AC} + (k-1) \mathbf{BA} + (k-1) \mathbf{AC} \\ &= -k (\mathbf{BD} + \mathbf{AB} + \mathbf{CA}) = -k \mathbf{CD} \rightarrow \boxed{\mathbf{PQ} = -kt \mathbf{AB}} \end{aligned}$$

Conclusion =  $\mathbf{PN}$ ,  $\mathbf{PM}$  et  $\mathbf{PQ}$  sont des multiples de  $\mathbf{AB}$ , les points  $P$ ,  $N$ ,  $M$  et  $Q$  sont donc alignés.

b) Soit  $X$  le milieu de  $[PN]$

$$\mathbf{PX} = \frac{1}{2} (k-kt-1) \mathbf{AB}$$

Soit  $Y$  le milieu de  $[QM]$

$$\mathbf{QY} = \mathbf{QP} + \mathbf{PY} = kt \mathbf{AB} + (k-1) \mathbf{AB} = (k+kt-1) \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{QY} = \frac{1}{2} (k+kt-1) \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{PY} = \mathbf{PQ} + \mathbf{QY} = -kt \mathbf{AB} + \frac{1}{2} (k+kt-1) \mathbf{AB} = \frac{1}{2} (k-kt-1) \mathbf{AB}$$

Les points  $X$  et  $Y$  sont donc confondus.

c) Si  $ABQM$  est un parallélogramme  $AB \parallel QM$ .

Par conséquent soit  $\mathbf{AB} = \mathbf{QM}$ , soit  $\mathbf{AB} = -\mathbf{QM}$

$$1) \mathbf{AB} = \mathbf{QM} \rightarrow k(1+t)-1=1 \rightarrow \boxed{k = \frac{2}{1+t}}$$

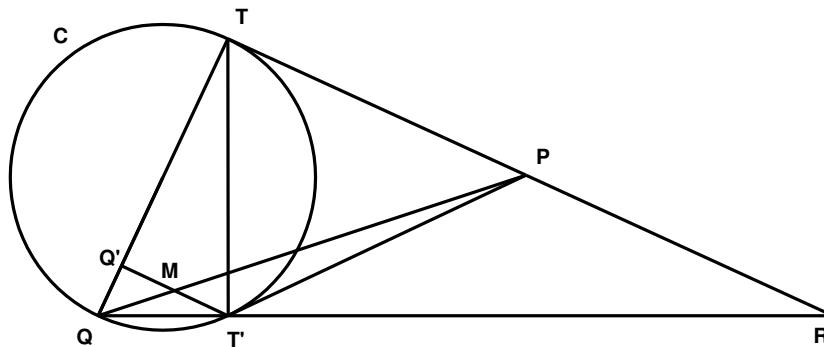
$$2) \mathbf{AB} = -\mathbf{QM} \rightarrow k(1+t)-1=-1 \rightarrow k=0$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse  $k \neq 0$ .

## EXGSP051 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001.

Par un point  $P$  extérieur à un cercle  $C$ , on mène les deux tangentes  $t$  et  $t'$  à ce cercle, les points de tangence étant  $T$  et  $T'$  respectivement. Soient  $Q$  le point de  $C$  diamétralement opposé à  $T$ ,  $Q'$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $T'$  sur  $QT$  et  $R$  le point d'intersection de  $QT'$  avec  $t$ .

- d) Montrer que  $TT'$  est perpendiculaire à  $QR$
- e) Montrer que le triangle  $PT'R$  est isocèle.
- f) Montrer que  $P$  est le milieu de  $[T, R]$ .
- g) Montrer que  $QP$  coupe  $[Q', T']$



- a) Le triangle  $TQT'$  est rectangle car inscrit dans un demi-cercle  $\rightarrow TT' \perp QR$
- b)  $\angle T'TR$  et  $\angle T'RT$  sont complémentaires car le  $\Delta TT'R$  est rectangle.  
 $\angle PTT' = \angle TT'P$  car angles tangentielles qui interceptent le même arc.  
 Donc en vertu de a),  $\angle PT'R = \angle T'RP \rightarrow \Delta PT'R$  est isocèle;
- c) En vertu de b),  $PR = PT'$ , et comme  $PT = PT'$  (tangentes extérieures issues d'un même point),  $\rightarrow TP = PR \rightarrow P$  est le milieu de  $TR$
- d)  $\Delta QQ'M$  et  $\Delta TQP$  sont semblables (triangles rectangles et  $\angle Q'MQ = \angle TPQ$  car angles correspondants vu que  $Q'T' \parallel TR$ )  $\rightarrow \frac{QM}{QP} = \frac{Q'M}{TP}$
- $\Delta QMT'$  et  $\Delta QPR$  sont semblables ( $\angle Q'T'Q = \angle TRQ$  car angles correspondants vu que  $Q'T' \parallel TR$ )  $\rightarrow \frac{QM}{QP} = \frac{MT'}{PR}$
- Et comme  $TP = PR$ ,  $M$  est le milieu de  $Q'T'$

**EXGSP052 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001.**  
**FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.**

On donne quatre points  $A, B, C, D$  dans le plan.

(a) Montrer que le vecteur :

$$\vec{v} = 4 \overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{MB} - 5 \overrightarrow{MC} - 2 \overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point  $M$ .

(b) Montrer que si le vecteur  $\vec{v}$  de (a) est nul ( $\vec{v} = \vec{0}$  où  $\vec{0}$  désigne le vecteur nul), le nombre

$$x = 4 |\overrightarrow{MA}|^2 + 3 |\overrightarrow{MB}|^2 - 5 |\overrightarrow{MC}|^2 - 2 |\overrightarrow{MD}|^2$$

est indépendant du point  $M$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \vec{v} &= 4 \overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{MB} - 5 \overrightarrow{MC} - 2 \overrightarrow{MD} \\ &= 4 \overrightarrow{MA} + 3 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 5 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) - 2 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= 4 \overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{AB} - 5 \overrightarrow{MA} - 5 \overrightarrow{AC} - 2 \overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{AD} \\ &= 3 \overrightarrow{AB} - 5 \overrightarrow{AC} - 2 \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

qui est indépendant de  $M$ .

$$\begin{aligned} \text{b)} x &= 4 |\overrightarrow{MA}|^2 + 3 |\overrightarrow{MB}|^2 - 5 |\overrightarrow{MC}|^2 - 2 |\overrightarrow{MD}|^2 \\ &= 4 \overrightarrow{MA}^2 + 3 \overrightarrow{MB}^2 - 5 \overrightarrow{MC}^2 - 2 \overrightarrow{MD}^2 \\ &= 4 \overrightarrow{MA}^2 + 3 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 - 5 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 - 2 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD})^2 \\ &= 4 \overrightarrow{MA}^2 + 3 \overrightarrow{MA}^2 + 6 \overrightarrow{MA} \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{AB}^2 - 5 \overrightarrow{MA}^2 - 10 \overrightarrow{MA} \overrightarrow{AC} - 5 \overrightarrow{AC}^2 - 2 \overrightarrow{MA}^2 - 4 \overrightarrow{MA} \overrightarrow{AD} - 2 \overrightarrow{AD}^2 \\ &= 2 \overrightarrow{MA} \underbrace{(3 \overrightarrow{AB} - 5 \overrightarrow{AC} - 2 \overrightarrow{AD})}_{\vec{v}=\vec{0}} + 3 \overrightarrow{AB}^2 - 5 \overrightarrow{AC}^2 - 2 \overrightarrow{AD}^2 \\ &= 3 \overrightarrow{AB}^2 - 5 \overrightarrow{AC}^2 - 2 \overrightarrow{AD}^2 \end{aligned}$$

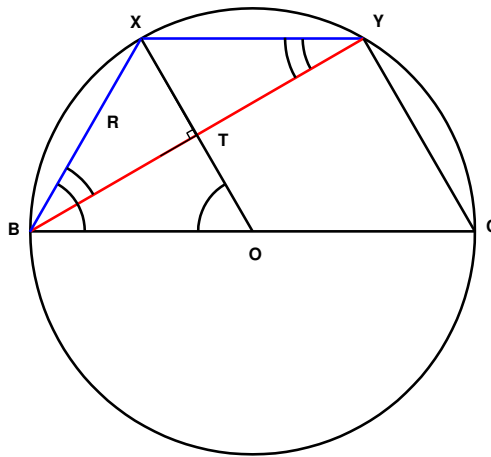
Qui est aussi indépendant de  $M$

Modifié le 1 septembre 2012

## EXGSP053 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998.

Soit un cercle de rayon  $R$  et  $BC$  un diamètre. A partir de  $B$  et de  $C$  on fixe sur le cercle et du même côté de  $BC$  les deux points  $X$  et  $Y$  tels que  $BX = CY = R$ . Du point  $X$ , on abaisse la perpendiculaire à  $BY$  qui coupe ce segment en  $T$ . On demande :

- De montrer que  $T$  est le milieu de  $BY$  ;
- D'exprimer la mesure de la distance  $BT$  en fonction de  $R$
- De calculer l'aire comprise entre le cercle et la corde  $BX$ .



- a) La construction graphique montre que  $XT$  semble passer par le point  $O$ .  
 En appelant  $S$  le point d'intersection de  $XO$  et  $BY$ , on montre d'abord que ce point  $S$  est sur le point  $T$ .  
 En effet, les triangles  $OBX$  et  $OYC$  sont équilatéraux car  $OB = BX = OX = R$  et de même  $OY = YC = OC = R$ .  
 Par ailleurs, l'angle  $BOX$  : angle au centre interceptant l'arc  $BX$ , sous-tendu par  $R$ . Il vaut deux l'angle  $YBC$  qui intercepte l'arc  $YC$  sous-tendu par  $R$ , donc angle  $YBC = 1/2$  angle  $BOX \rightarrow S \equiv T$ .  
 Comme l'angle  $XOY$  vaut  $60^\circ$ ,  $XY$  vaut également  $R$  et par suite le triangle  $BXY$  est isocèle  
 ( $BX = XY = R$ ), donc la hauteur  $XT$  est aussi médiane et médiatrice, soit  $BT = XT/2$

b) L'angle  $XBT = 30^\circ$ ,  $\rightarrow BT = BX \cos 30 = R \frac{\sqrt{3}}{2}$

- c) L'aire comprise entre le cercle et la corde  $BX =$  aire du secteur de  $60^\circ$   
 - aire du triangle  $BXO$ .

$$\rightarrow S = \frac{1}{6} \pi R^2 - \frac{R \cdot R \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = R^2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

## EXGSP054 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998.

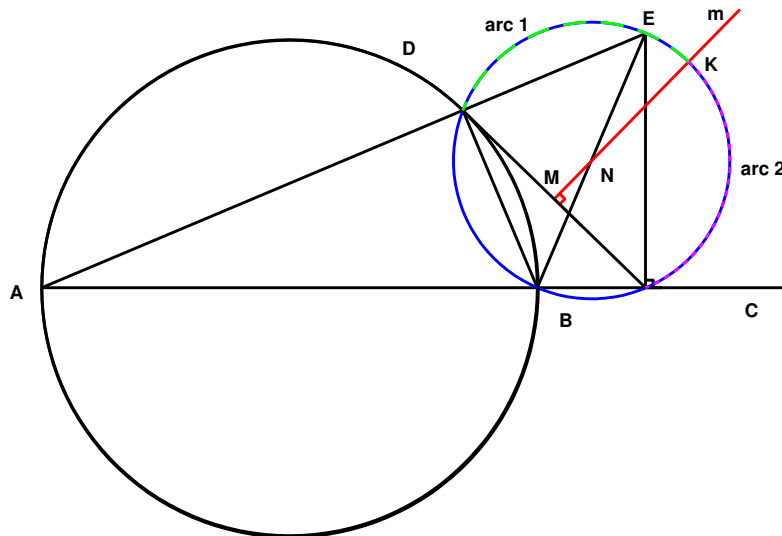
Sur une circonférence on trace un diamètre  $AB$  sur le prolongement duquel on prend un point  $C$ .

De ce point, on trace une tangente  $CD$  à la circonférence.

Par le point  $C$ , on trace enfin la perpendiculaire à  $AB$  qui coupe la droite  $AD$  en  $E$ .

On demande :

- De démontrer que la médiatrice de  $DC$  passe par le milieu de  $BE$
- De vérifier la relation  $AD \times AE = AB \times AC$
- De porter sur la médiatrice de  $DC$  un point  $X$  tel que  $BX$  soit la bissectrice de l'angle  $DBC$ .



- Le quadrilatère  $DECB$  est inscriptible car les angles  $EDB$  et  $BCE$  sont droits.  
Les angles droits  $EDB$  et  $BCE$  interceptent le diamètre  $BE$  du cercle circonscrit.  
 $N$ , milieu de  $BE$ , est centre du cercle et la médiatrice de la corde  $DC$  passe donc par  $N$ .
- Dans le quadrilatère inscriptible  $DECB$ , la somme des angles  $DEC$  et  $DBC$  vaut  $180^\circ$ .  
Il en résulte que l'angle  $ABD$  vaut l'angle  $DEC$ .  
Par suite les triangles  $ADB$  et  $AEC$  sont semblables  $\rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$   
 $\rightarrow AB.AC = AE.AD$
- Soit  $K$  l'intersection du cercle circonscrit et de la médiatrice  $m$ .  
 $m$  est la médiatrice de la corde  $DC$  donc  $\text{arc } 1 = \text{arc } 2$   
Les angles  $DBK$  et  $KBC$  interceptent des arcs égaux donc  $BK$  est bissectrice.

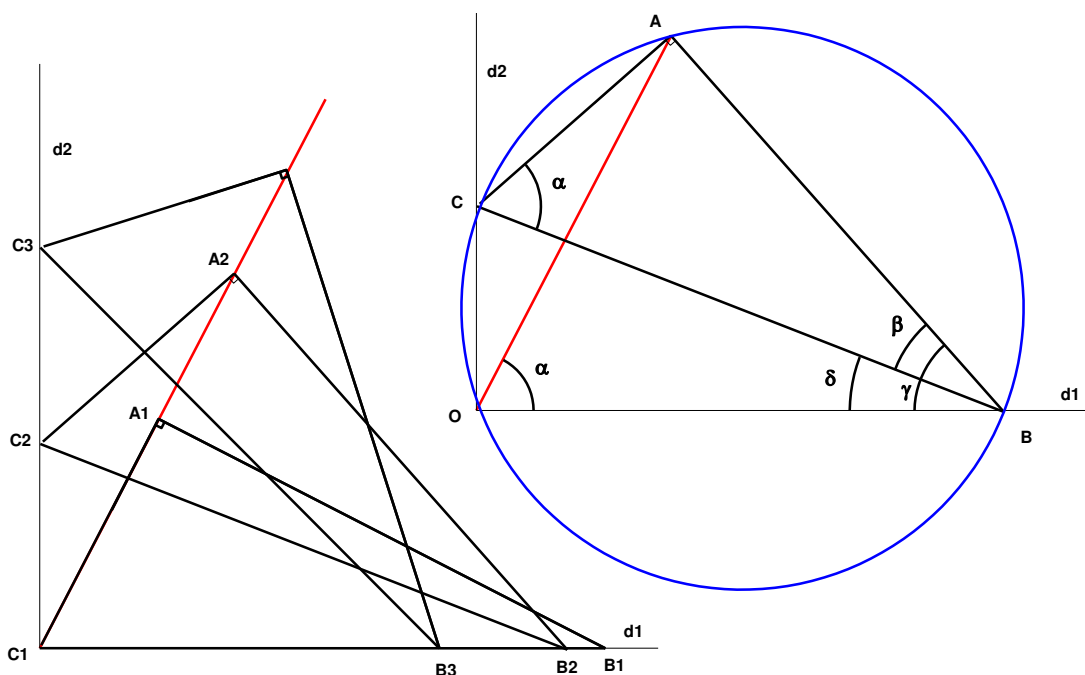
**EXGSP055 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998.  
Louvain, Juillet 2000, série 1.**

Les extrémités  $B$  et  $C$  de l'hypoténuse d'un triangle rectangle  $ABC$  glissent respectivement sur 2 droites  $d_1$  et  $d_2$  perpendiculaires entre elles.

a) Quel est le lieu du point  $A$ .

En définir les limites dans les cas suivants :

- b) Le triangle  $ABC$  est astreint à être situé dans le 1er quadrant du repère formé par  $d_1$  et  $d_2$
- c) Le triangle  $ABC$  peut évoluer dans les 4 quadrants.





a) La construction expérimentale du lieu de  $A$  pour trois triangles  $ABC$  distincts montre que le lieu est une droite passant par l'origine ( $O \equiv C1$ )  
 En effet, considérons une position du triangle  $ABC$  représentée à la figure de droite.  
 On observe que la quadrilatère  $OCAB$  est inscriptible.  
 Si on appelle  $\alpha$  l'angle du triangle  $ABC$  opposé au côté  $AB$ , on note que cet angle  $AOB$  interceptent tous les deux l'arc  $AB$ .  
 → L'angle  $AOB$  est constant et le lieu du point  $A$  est une droite inclinée de  $\alpha$  sur  $d_1$ .

b) Dans le triangle  $AOB$ , on a :  $\frac{OA}{AB} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$

Or la mesure de  $AB$  est constante et  $\sin \alpha$  est également constant.

$OA$  sera maximum lorsque  $\sin \gamma$  sera maximum soit  $\gamma=90^\circ$ .

Comme  $\gamma = \delta + \beta$  et  $\beta = 90^\circ - \alpha$

→  $\gamma = 90^\circ = \delta + 90^\circ - \alpha$  →  $\delta = \alpha$ .

$OA$  vaut alors  $\frac{AB}{\sin \alpha} = BC$ .

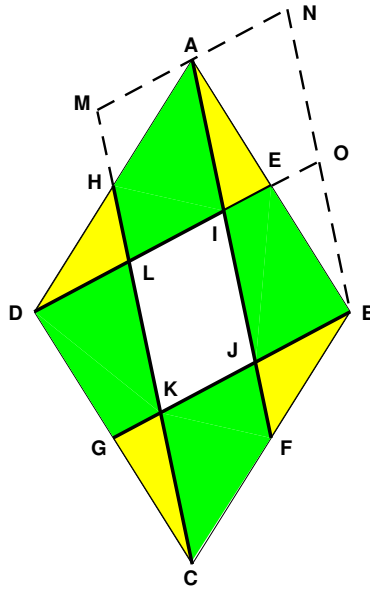
$OA$  sera minimum quand l'angle  $\delta$  est égal à 0 →  $OA = BC \cos \alpha$

c) Lorsque le triangle évolue dans les autres quadrants le point  $A$  se déplace sur les diagonales d'un rectangle.

## EXGSP056 – Bruxelles, septembre 2000.

On donne le losange de sommets consécutifs  $A, B, C$  et  $D$ . Soient  $E, F, G$  et  $H$  les milieux des côtés  $AB, BC, CD$  et  $DA$  respectivement. Les droites  $AG, BH, CE$  et  $DF$  déterminent un quadrilatère.

1. Établissez que ce quadrilatère est un parallélogramme.
2. Déterminer l'aire du parallélogramme sachant que celle du losange vaut  $S$ .



- a)  $\triangle ADE = \triangle CBG$  car un angle égal compris entre deux côtés égaux.  
 $\rightarrow DE = GB \rightarrow DEBG$  est un parallélogramme  $\rightarrow DE \parallel GB$   
 De même  $AF \parallel CH \rightarrow IJKL$  est un parallélogramme.

- b) Prolongeons  $DE$  et  $KH$ . Traçons  $MN \parallel DE$  et  $BN \parallel KH$   
 Regardons les aires. Soit  $P$  l'aire du parallélogramme  $IJKL$ .

$$\triangle AEI = \frac{1}{4} \triangle ANDI = \frac{P}{4} \quad \triangle HMA = \frac{1}{4} \triangle MAIL = \frac{P}{4}$$

$$\text{or } \triangle HMA = \triangle DHL$$

$$\rightarrow \triangle AEI = \triangle BFJ = \triangle CGK = \triangle DHL = \frac{P}{4}$$

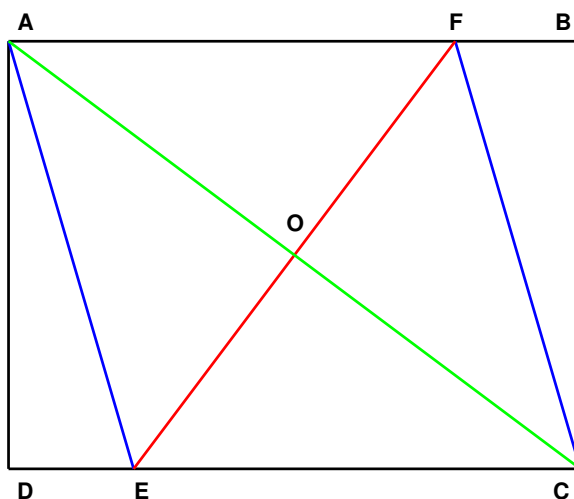
$$\text{On a aussi : } \triangle AILH = \triangle EBJI = \triangle FCKJ = \frac{3}{4}P$$

$$\rightarrow P + 4 \frac{3}{4}P + 4 \frac{1}{4}P = S \rightarrow 5P = S \rightarrow \boxed{P = \frac{S}{5}}$$

## EXGSP057 – Bruxelles, juillet 2001.

Sur les côtés  $AB$  et  $DC$  du rectangle  $ABCD$ , on place les points  $F$  et  $E$  de façon à ce que  $AFCE$  soit un losange.

Calculer la longueur  $EF$  si  $AB = 16$  et  $BC = 12$ .



$$AF = 16 - FB$$

$$FC = \sqrt{FB^2 + CB^2} = \sqrt{FB^2 + 12^2}$$

$$AF = FC \rightarrow 16 - FB = \sqrt{FB^2 + 12^2} \rightarrow FB = 3.5 \rightarrow AF = 12.5$$

$$AO = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 16^2} = 10$$

$$EF = 2 OF = 2 \sqrt{AF^2 - AO^2} = 2 \sqrt{12.5^2 - 10^2} = 15$$

## EXGSP058 – Bruxelles, septembre 2001.

Déterminer le barycentre  $G$  de trois points non alignés,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , affectés de masses égales ainsi que le barycentre  $G'$  de ces mêmes points si on leur affecte les masses respectives 1, 1, - 1.

Faites une figure.

$$\text{Le barycentre est donné par : } \overline{OG} = \frac{\sum m_i \cdot \overline{OA_i}}{\sum m_i} \rightarrow \begin{cases} \overline{OG}_x = \frac{\sum m_i \cdot \overline{OA}_x}{\sum m_i} \\ \overline{OG}_y = \frac{\sum m_i \cdot \overline{OA}_y}{\sum m_i} \end{cases}$$

$$\text{Si : } m_1 = m_2 = m_3 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

$$\text{Si : } m_1 = m_2 = 1, m_3 = -1 \rightarrow \begin{cases} x_{G'} = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_{G'} = y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

Essayons d'aller plus loin,

$$\text{Si : } m_1 = m_2 = m_3 = 1 \rightarrow \overline{OG} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}}{3}$$

Et comme le point  $O$  est quelconque prenons  $O \equiv A$ ,

$$\text{Ce qui nous donne une façon simple de déterminer } G : \overline{AG} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{3}$$

$$\text{Si : } m_1 = m_2 = 1, m_3 = -1$$

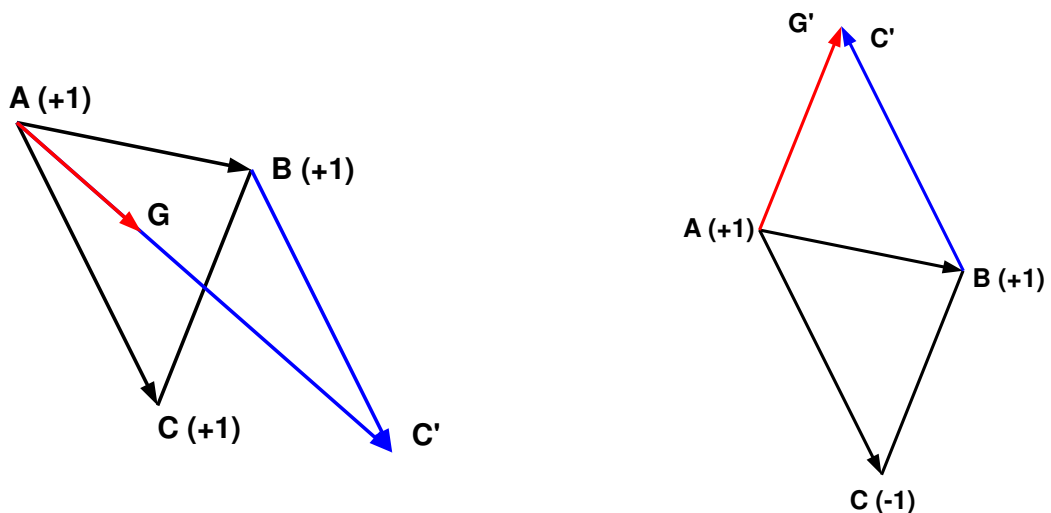
$$x_{G'} = x_1 + x_2 - x_3 = 3 \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right) - 2x_3$$

$$\text{Et } y_{G'} = y_1 + y_2 - y_3 = 3 \left( \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) - 2y_3$$

$$\rightarrow \overline{OG'} = 3 \overline{OG} - 2 \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - 2 \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}$$

$$\text{Si } O \equiv A \rightarrow \overline{AG'} = \overline{AB} - \overline{AC}$$

Ce qui nous donne les figures suivantes :

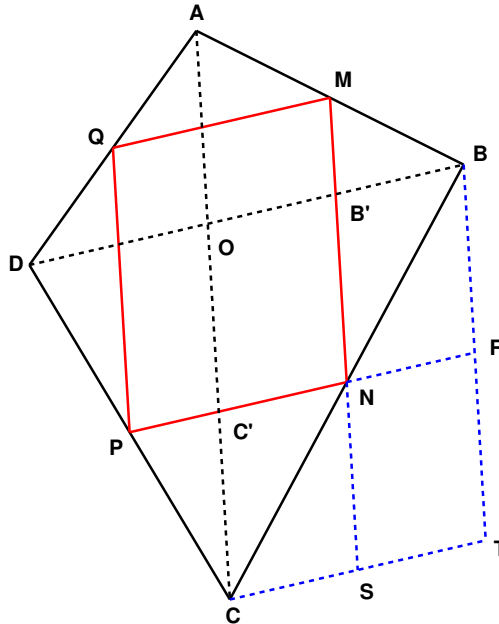


## EXGSP059 – Bruxelles, juillet 2002.

Soit un quadrilatère quelconque  $ABCD$ . On appelle  $M, N, P$  et  $Q$  les milieux respectifs des côtés  $AB, BC, CD$  et  $DA$ .

Démontrer

1. Que la quadrilatère  $MNPQ$  est un parallélogramme.
2. Que l'aire du quadrilatère  $ABCD$  vaut deux fois celle de  $MNPQ$ .



1) Traçons les diagonales  $AC$  et  $DB$  qui se coupent en  $O$

Dans le triangle  $DBC$ ,  $PN$  est parallèle à  $DB$  car  $PN$  joint le milieu de  $CD$  et  $BC$ .

Dans le triangle  $DAB$ ,  $QM$  est parallèle à  $DB \rightarrow QM \parallel PN$

On montre également que  $QP \parallel MN \rightarrow MPNQ$  est un parallélogramme.

2) Traçons  $BT \parallel OC$ ,  $CT \parallel OB$ . Prolongeons  $PN$  qui coupe  $BT$  en  $R$ , et

$MN$  qui coupe  $CT$  en  $S$ . Soit  $B' = MN \cap OB$ , et  $C' = PN \cap OC$

$OBTC$  est un parallélogramme.

On voit immédiatement que les triangles  $CC'N$  et  $NB'B$  sont égaux

(Un côté égal compris entre deux angles égaux)

$$\rightarrow \text{Aire } OB'C'N = \frac{1}{2} \text{ Aire triangle } OBC.$$

Idem pour les triangles  $AOB$ ,  $DOC$  et  $DOA$

$$\rightarrow \text{Aire } MNPQ = \frac{1}{2} \text{ Aire } ABCD$$