Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 7

EXGSP070 – EXGSP079

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

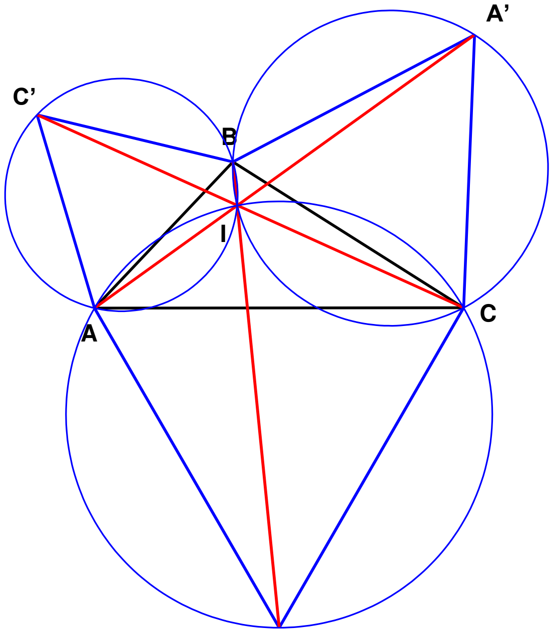
Avril 04

EXGSP070 – Liège, juillet 2003.
Théorème de Fermat

On considère un triangle ABC dont les angles sont inférieurs à 120°. On construit les triangles équilatéraux ABC', BCA' et ACB' extérieurs à ABC. On note I l'intersection de AA' et CC'

1. Démontrer que $|AA'| = |BB'| = |CC'|$
2. Démontrer que les angles BIC et BIA valent 120°
3. Démontrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes.

Figure 1



1) $\widehat{C'BA} = 60°$ car $\Delta ABC'$ est équilatéral

$\widehat{A'BC} = 60°$ car $\Delta BCA'$ est équilatéral

$\rightarrow\ \widehat{C'BA} + \widehat{ABC} = \widehat{A'BC} + \widehat{ABC}$

$\rightarrow\ \widehat{C'BC} = \widehat{ABA'}$

$\rightarrow\ \Delta C'BC = \Delta ABA'$ car un angle égal compris entre deux côtés égaux deux à deux.

$\rightarrow\ |AA'| = |CC'|$

On démontre de la même façon que les triangles ABB' et $C'AC$ sont égaux $\rightarrow\ |AA'| = |BB'| = |CC'|$

2) Puisque $\Delta C'BC = \Delta ABA' \rightarrow \widehat{BA'I} = \widehat{BIC}$

$\rightarrow$ les points $BA'CI$ sont cocycliques

$\rightarrow \widehat{BIC}$ et $\widehat{BA'C}$ sont supplémentaires $\rightarrow \widehat{BIC} = 120°$

On démontre de la même façon que $\widehat{BIA} = 120°$

3) Puisque $BIC = BIA = 120°$, $AIC = 120°$

$\rightarrow I$ est sur le cercle circonscrit au $\Delta ACB'$

$\rightarrow B'IC = B'AC = 60°$ (même arc intercepté)

$\rightarrow BIC + B'IC = 180°$

$\rightarrow AA'$, BB' et CC' sont concourantes en I

Compléments

Ce théorème est une version du théorème de Fermat ou Torricelli (Fermat l'a proposé à Torricelli qui l'a résolu).

1. *AA', BB', CC'* sont les droites de Fermat du triangle
2. *I* est le point de Fermat
3. *I* est le point du triangle sous lequel l'on voit les trois côtés du triangle *ABC* sous un angle de 120°. (Démontré ci-dessus)
4. La distance $|IA| + |IB| + |IC| = |AA'| = |BB'| = |CC'|$ et de plus on démontre que cette distance est minimale.
5. Les trois cercles circonscrits sont les cercles de Torricelli.

(Voir Géométrie – Yves Ladegaillerie, Edition Ellipses (2003) page 387)

Démontrons le point 4.

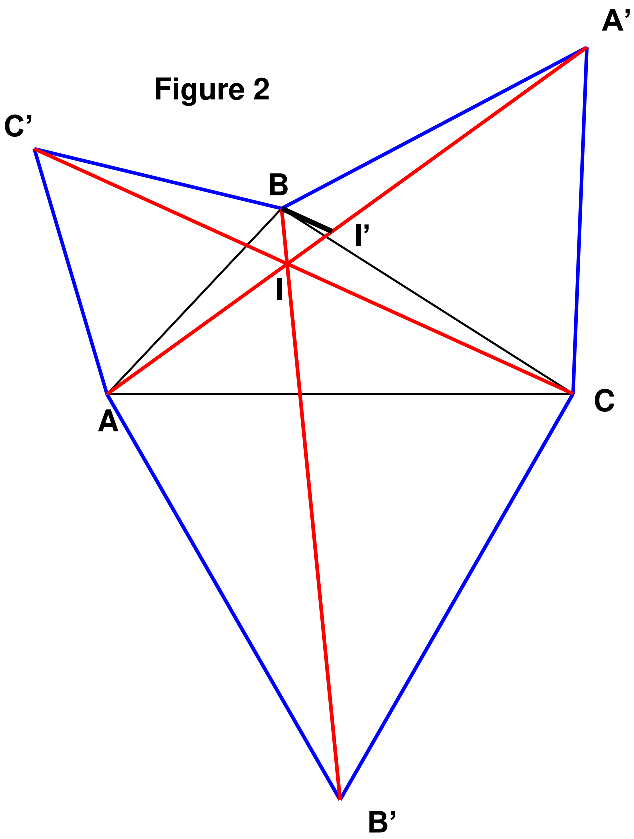


Figure 2

On veut démontrer que $|IA|+|IB|+|IC|=|AA'|=|BB'|=|CC'|$

et que cette somme est minimale

Le point qui rend la somme minimale est obligatoirement intérieur au triangle.

Soit I' obtenu par rotation de I autour de B d'un angle de 60°

$\rightarrow\ |IA|=|IA'|$

A' est aussi obtenu par rotation de C de 60° autour de B

$\rightarrow\ |I'A'|=|IC|$

Par conséquent, $|IA|+|IB|+|IC|=|IA|+|IA'|+|I'A'|$

Cette somme est minimale si les points A, I, I' et A' sont alignés.

(Le chemin le plus court est la ligne droite)

On a déjà démontré que A, I et A' sont alignés.

Reste à montrer que I' est aligné avec I et A'.

I' est l'image de I, et A' est l'image de C, donc l'angle $BI'A'$ est l'image

de l'angle BIC qui vaut 120° $\rightarrow\ \widehat{BI'A'}+\widehat{BIC}=180°$

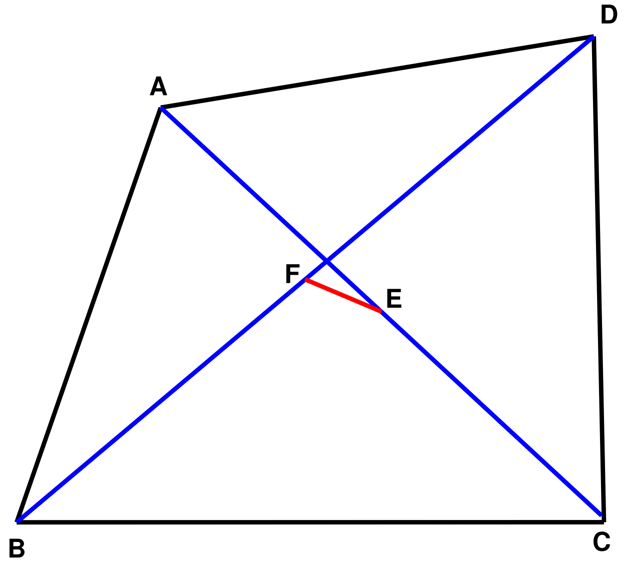
$\rightarrow I'$ est aligné avec I et A' et la somme est donc minimale.

Modifié le 6 septembre 2004

EXGSP071 – Liège, juillet 2003.
Liège, septembre 2006.

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. On note E le milieu de $[A,C]$ et F le milieu de $[B,D]$. Démontrer que

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2+4\left|\overrightarrow{EF}\right|^2$$



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

Pour ne pas se perdre dans les calculs, on peut procéder de la façon suivante :

(En tenant compte que pour tout vecteur $\overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}^2 = \left|\overrightarrow{X}\right|^2$)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{EF}\right]^2 \qquad (1)$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) - \overrightarrow{EF}\right]^2 \qquad (2)$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{EF}\right]^2 \qquad (3)$$

$$\left|\overrightarrow{DA}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right) - \overrightarrow{EF}\right]^2 \qquad (4)$$

Utilisons l'identité : $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$

$$(1)+(3) \to \left[\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right)\right]^2 + \left[\overrightarrow{EF} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right)\right]^2$$

$$= 2\left|\overrightarrow{EF}\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right)^2 \qquad (5)$$

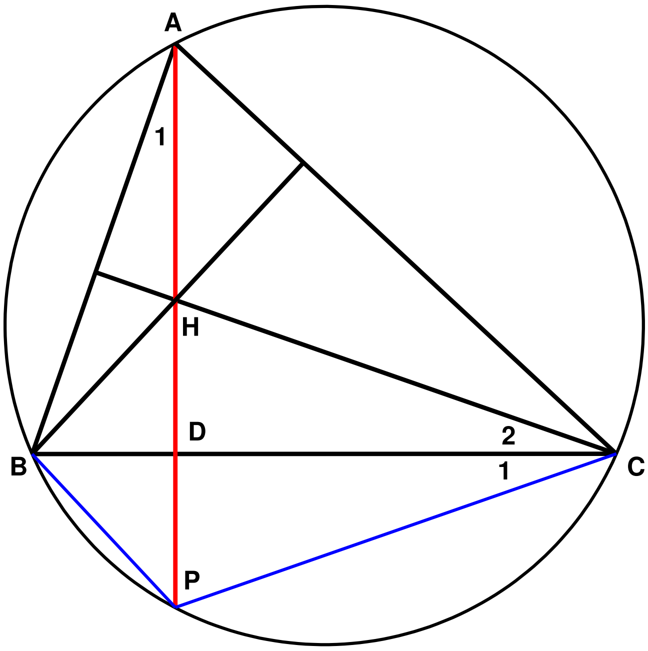
$$(2)+(4) \to \left[-\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)\right]^2 + \left[-\overrightarrow{EF} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)\right]^2$$

$$= 2\left|\overrightarrow{EF}\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)^2 \qquad (6)$$

$$(5)+(6) \to 4\left|\overrightarrow{EF}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2$$

EXGSP072 – Liège, septembre 2003.

On considère un triangle quelconque ABC. On note H son orthocentre et D le pied de la hauteur issue de A. La droite AD coupe le cercle circonscrit au triangle en P.
Démontrer que $|HD| = |DP|$



$C_1 = A_1$ Interceptent le même arc

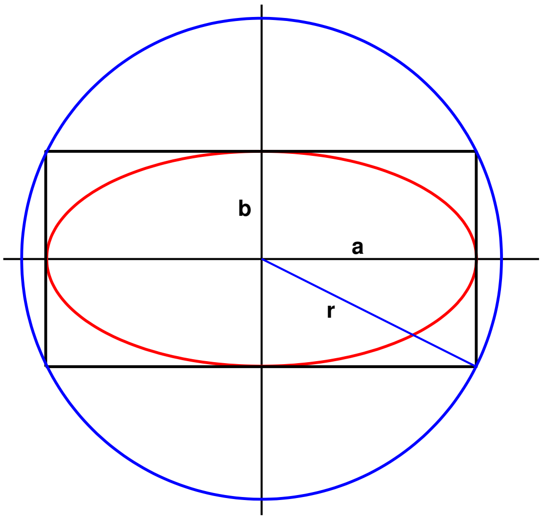
$A_1 = C_2$ Angles à côtés perpendiculaires

$\rightarrow C_1 = C_2$

$\rightarrow$ Les triangles rectangles HDC et PDC ont un côtés commun et un angle égal $\rightarrow$ Ils ont égaux $\rightarrow$ $|HD| = |DP|$

EXGSP073 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2003.

Sachant que πab est l'aire d'une ellipse dont les demi axes ont comme longueur a et b, déterminez la relation qui doit relier a et b pour que l'aire du cercle circonscrit à un rectangle de côtés $2a$ et $2b$ soit le double de l'aire de l'ellipse inscrite dans ce rectangle.



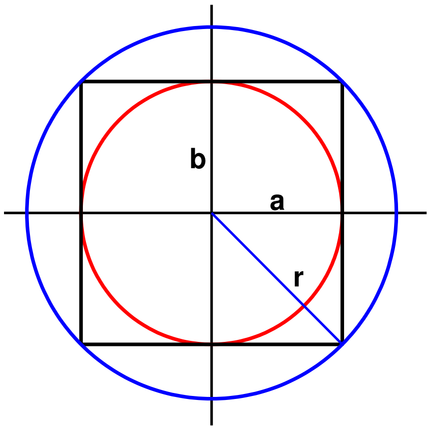
Ellipse : $A_E = \pi ab$

Cercle : $A_C = \pi r^2 = \pi\left(a^2 + b^2\right)$

Il faut : $A_C = 2A_E$

$\rightarrow \pi\left(a^2 + b^2\right) = 2\pi ab \ \rightarrow \left(a - b\right)^2$

L'ellipse est un cercle.



EXGSP074 – EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 1.

Soit un triangle rectangle variable *ABC* ayant le sommet de l'angle droit *A* fixe, le sommet *B* décrivant une circonférence et le côté *AB* ayant une longueur double de celle du côté AC, on vous demande

- De déterminer le lieu du sommet C
- D'expliquer votre raisonnement
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.

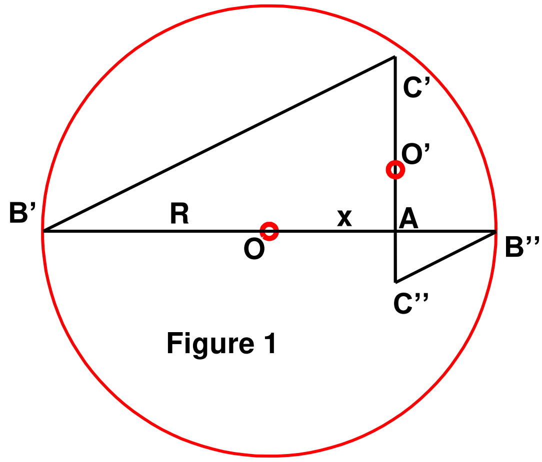


Figure 1

Considérons deux positions particulières du triangle ABC.

Soit B', O, A et B'' alignés sur le même diamètre.

Soit x la distance $|OA|$ et R le rayon du cercle de centre O.

On a : $\begin{cases} |B'A| = 2|AC'| \\ |B''A| = 2|AC''| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R + x = 2|AC'| \\ R - x = 2|AC''| \end{cases} \rightarrow |C'C''| = |AC'| + |AC''| = R$

Soit O' le milieu de $C'C''$ $\rightarrow |O'A| = |O'C''| - |C''A| = \dfrac{R}{2} - \dfrac{R-x}{2} = \dfrac{x}{2}$

Résolu le 24 juin 2004

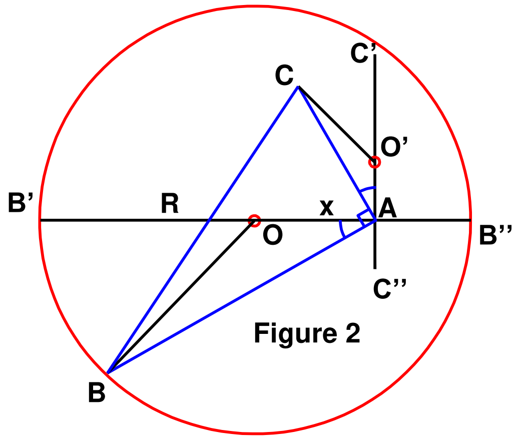


Figure 2

Considérons une position quelconque du triangle ABC.

Pour passer de la position B' à la position B, le segment AB' pivote d'un angle $B'AB$. Dans le même temps, C' est passé en position C,

Donc $\overline{B'AB} = \overline{C'AC}$.

Considérons les triangles OBA et $O'CA$. On a :

$$\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{2a}{a} \quad \text{et} \quad \frac{|OA|}{|O'A|} = \frac{x}{\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|OA|}{|O'A|} = 2$$

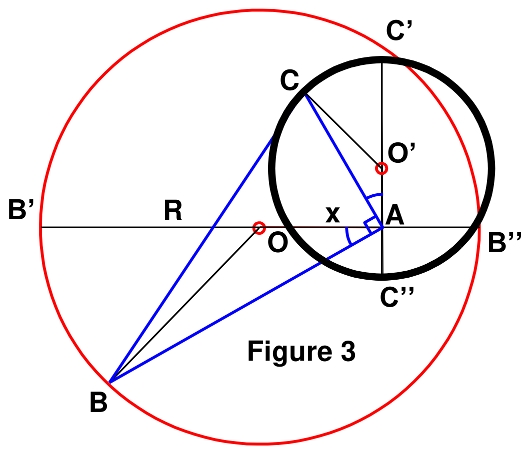
Les triangles OBA et $O'CA$ sont donc semblables puisque l'on a un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels.

$$\rightarrow \frac{|OB|}{|O'C|} = 2 \quad \rightarrow \quad |O'C| = \frac{R}{2}$$

Donc la distance $|O'C|$ est une constante

<u>Conclusion</u>

Le lieu est un cercle de centre O' et de rayon $\frac{R}{2}$



EXGSP075 – Louvain, juillet 2002, série 2.

Soient un cercle de centre O et un diamètre AB fixe sur ce cercle. On considère un rayon mobile OC et par C on abaisse la perpendiculaire CD sur AB. On porte sur le rayon OC de O une longueur $OM = CD$. On vous demande :

- De déterminer le lieu du point M
- D'expliquer votre raisonnement
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.

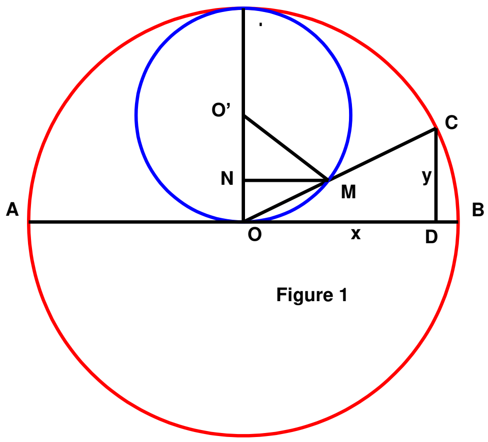


Figure 1

Considérons MN perpendiculaire abaissée sur le rayon perpendiculaire à AB.

Et soit O' le milieu de ce rayon de longueur R. Traçons aussi $O'M$

Soit : $|OD| = x$ et $|CD| = y$ avec $x^2 + y^2 = R^2$

On a : Les triangles ODC et MNO sont semblables

$$\rightarrow \frac{|OD|}{|MN|} = \frac{|DC|}{|NO|} = \frac{|OC|}{|MO|} \rightarrow \frac{x}{|MN|} = \frac{y}{|NO|} = \frac{R}{y} \rightarrow \begin{cases} |MN| = \dfrac{xy}{R} \\ |NO| = \dfrac{y^2}{R} \end{cases}$$

Considérons le triangle rectangle $O'NM$:

$$\rightarrow |O'M|^2 = |O'N|^2 + |NM|^2 = \left(|OO'| - |NO|\right)^2 + |NM|^2$$

$$= \left(\frac{R}{2} - \frac{y^2}{R}\right)^2 + \frac{x^2y^2}{R^2} = \frac{R^2}{4} - y^2 + \frac{y^4}{R^2} + \frac{x^2y^2}{R^2}$$

$$= \frac{R^2}{4} - y^2 + \frac{y^2\left(x^2 + y^2\right)}{R^2} = \frac{R^2}{4}$$

<u>Conclusion</u>

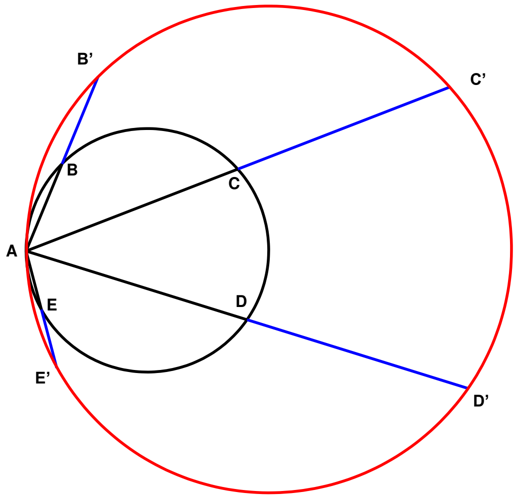
Le lieu est donc constitué de deux cercles de rayon $R/2$, l'un au-dessus et l'autre en-dessous du diamêtre AB

Résolu le 24 juin 2004

EXGSP076 – EPL, UCL, LLN septembre 2002.

D’un point donné d’une circonférence, on mène une corde quelconque que l’on prolonge d’une longueur égale à elle-même, on vous demande

- Le lieu de l’extrémité de ce prolongement de la corde
- D’expliquer votre raisonnement
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.



Soit A le point de la cironférence d'où est issu toutes les cordes.

Soit B' l'image de B.

On a $\left|\dfrac{AB'}{AB}\right| = 2$ .De même : $\left|\dfrac{AC'}{AC}\right| = \left|\dfrac{AD'}{AD}\right| = \left|\dfrac{AE'}{AE}\right| = ... = 2$

Il s'agit donc d'une homothétie de centre A et de rapport 2.

Or l'homothétie d'un cercle est un cercle.

Le lieu est donc le cercle homothétique du cercle donné, c'est à dire un cercle de diamètre double et passant par A.

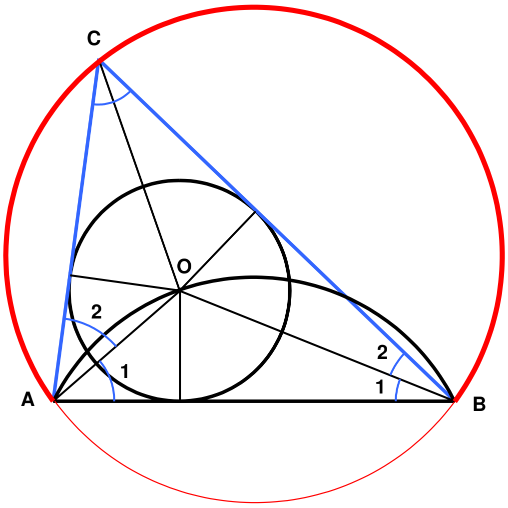
Résolu le 24 juin 2004

EXGSP077 – EPL, UCL, LLN, juillet 2003, série 1.

On considère un cercle mobile dont le centre se déplace le long d'un arc de cercle donné et qui est tangent à la corde AB de cet arc.

On vous demande :

1. De déterminer le lieu du point de concours des tangentes menées au cercle variable par les extrémités A et B de la corde en expliquant votre raisonnement.
2. De représenter le lieu sur un dessin précis.



Remarquons que le cercle donné est inscrit au triangle ABC.

Par conséquent, O est le point de rencontre des bissectrices AO, BO et CO.

$\Rightarrow A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$

Or A_1 intercepte l'arc BO et B_1 intercepte l'arc OA

$\Rightarrow \widehat{A_1 + B_1} = \text{arc } AB = \text{constante}$

$\Rightarrow 2\widehat{A_1} + 2\widehat{B_1} = \widehat{A} + \widehat{B} = \text{constante}$

$\Rightarrow \widehat{C} = 180° - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \text{constante}$

Conclusion

Le lieu de C est l'arc de cercle ABC du cercle cironscrit au triangle ABC

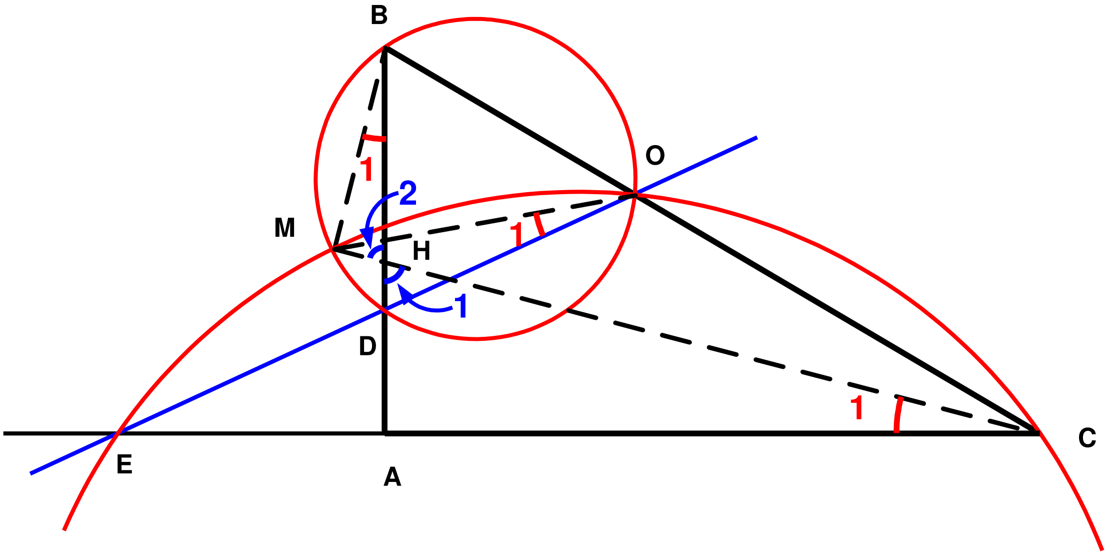
Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 4 avril 2014 (Jean Perbal)

EXGSP078 – Louvain, juillet 2003, série 2.

Par un point fixe O de l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC passe une sécante quelconque qui rencontre la droite AB en D et la droite AC en E. Les triangles OBD et OCE sont inscrits dans deux cercles qui se rencontrent en M

On vous demande:

1. De déterminer le lieu du point M en expliquant clairement votre raisonnement.
2. De représenter le lieu sur un dessin précis.



Traçons MO, MB, MC

Soit $H = MC \cap BA$

On a $C_1 = O_1$ Car interceptent le même arc

$B_1 = O_1$ Car interceptent le même arc

$\rightarrow B_1 = C_1$

De plus, ΔHAC est rectangle $\rightarrow C_1 + H_1 = 90°$

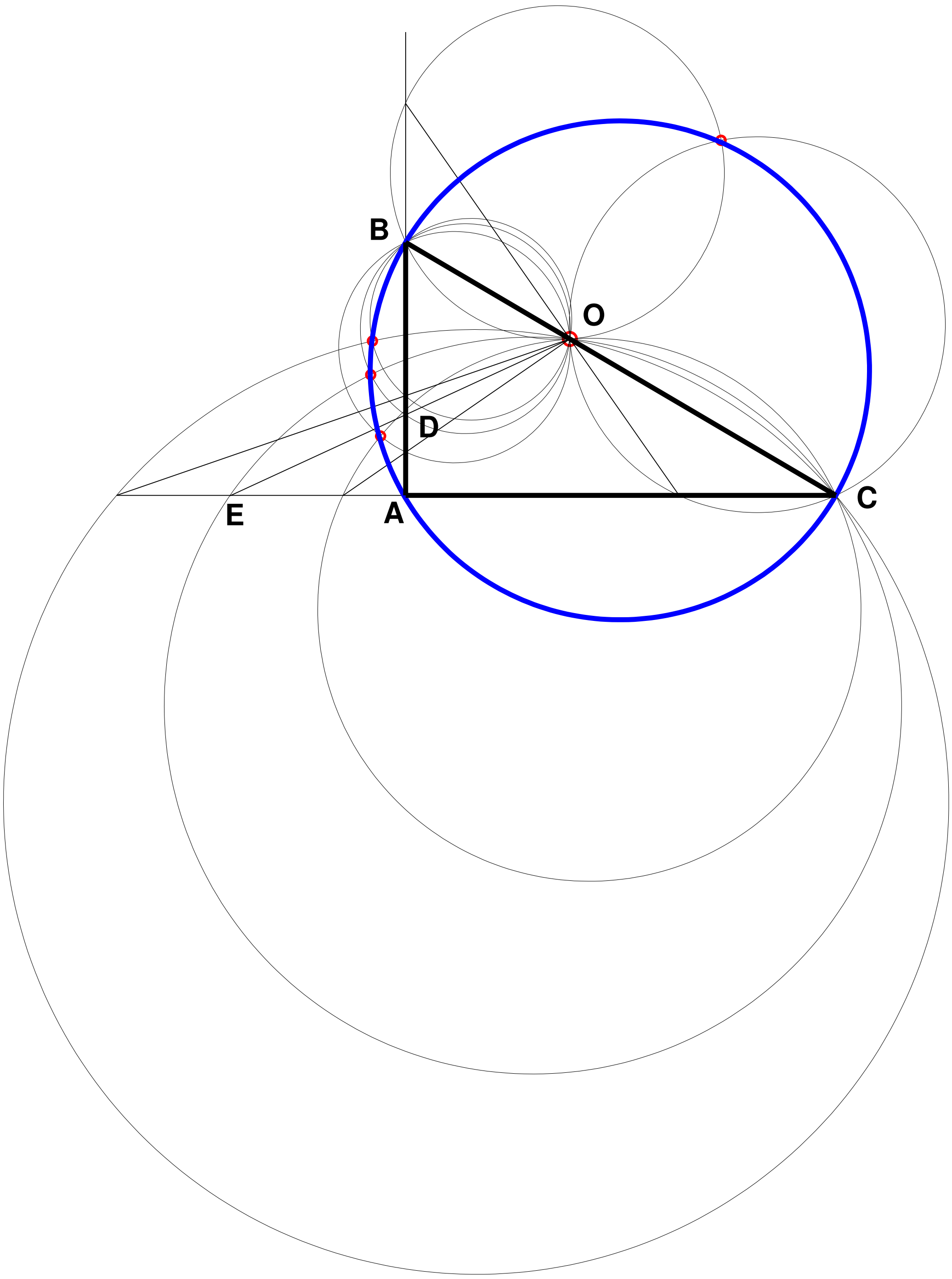
Or $H_1 = H_2$ car opposés par le sommet

$\rightarrow B_1 + H_2 = 90° \rightarrow BMC = 90°$

Donc le point M regarde toujours BC selon un angle constant.

Conclusion

Le lieu est le cercle circonscrit au triangle ABC


B
O
D
E
A
C

<u>Compléments</u> (Voir figure 3)

Le point est particulier.
Prenons un triangle quelconque *ABC* (et non plus un triangle rectangle).
Les cercles déterminés par *ABC, ADE, BDO* et *CEO* sont concourants au point *M* appelé **point de Miquel**.
De plus, les centres de tous ces cercles et le point *M* sont cocycliques et se trouvent sur le **cercle de Miquel.**

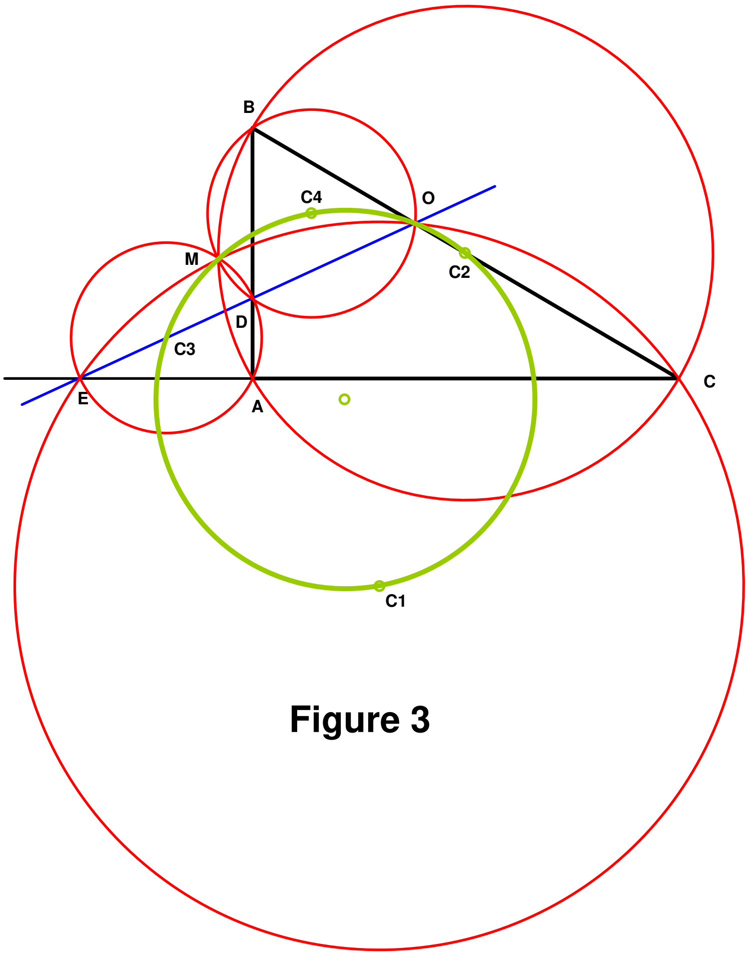


Figure 3

Résolu le 24 juin 2004

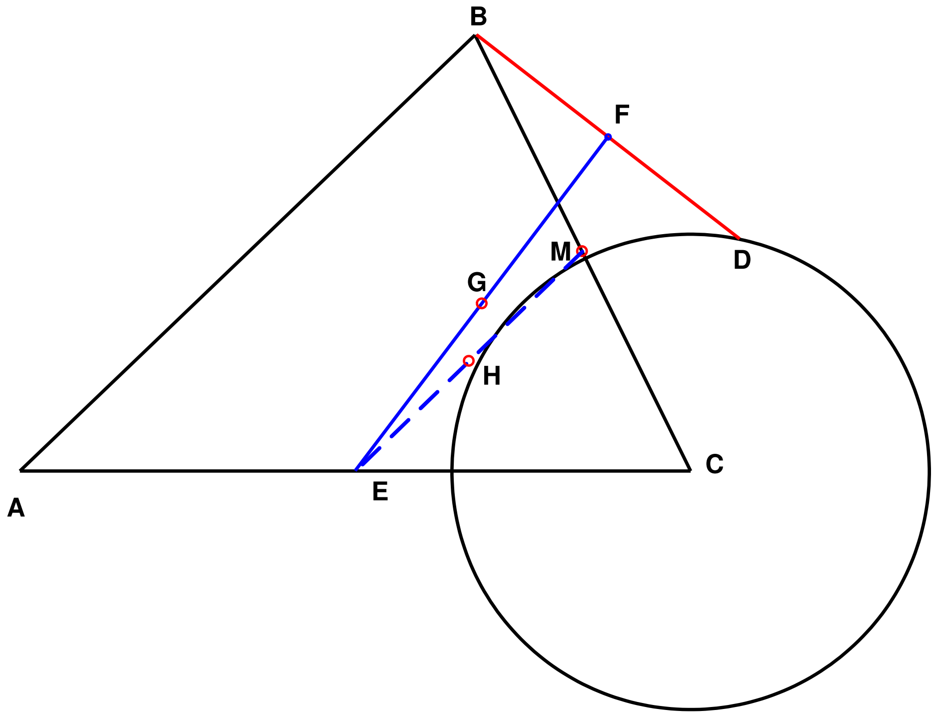
EXGSP079 – Louvain, septembre 2003.

Soit un triangle fixe *ABC* et un point *D* mobile situé à une distance constante *k* du sommet *C*. On appelle *E* le point milieu du segment *AC*.

On vous demande :

1. Le lieu géométrique du point *F* milieu du segment *BD*;
2. Un dessin précis du lieu de *F*;
3. Le lieu géométrique du point *G* milieu du segment *EF*;
4. Un dessin précis du lieu de *G* (pour la clarté un second dessin est peut être nécessaire).

NB : Pour rappel, les constructions doivent en principe, être menées uniquement à l'aide du compas et d'une règle sans utiliser ni les graduations ni les repères d'angles.



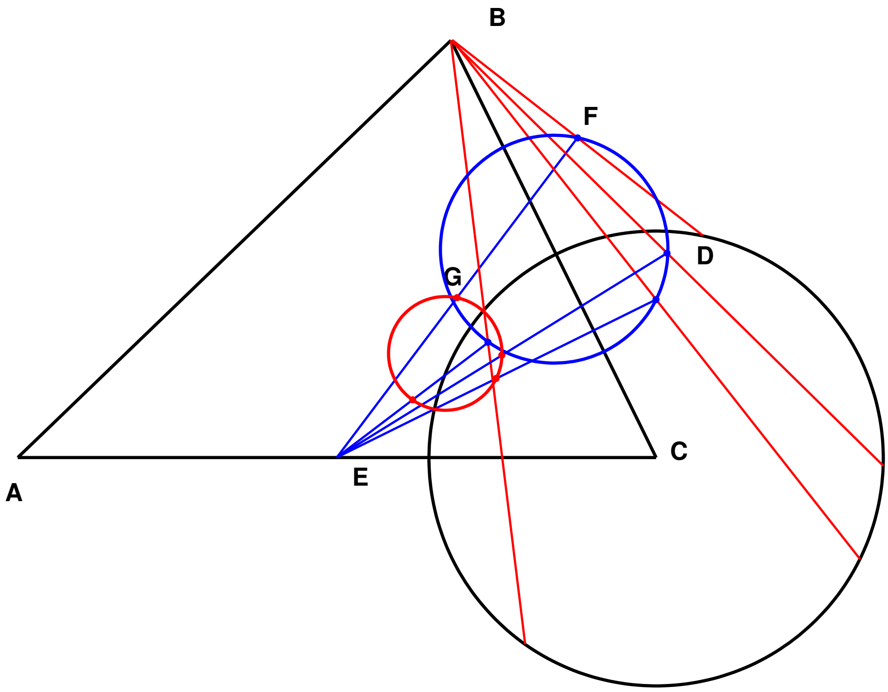
Si D est un point mobile situé à une distance k du sommet C, alors
D est situé sur le cercle de centre C et de rayon k.

F est l'image de D selon une homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

Or l'image homthétique d'un cercle est un cercle.

$\rightarrow$ Le lieu de F est un cercle dont le centre M est le milieu de AC et le rayon vaut $\frac{k}{2}$

De même, G est l'image de F selon une homothétie de centre E, et de rapport $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ Le lieu de G est un cercle de centre H, milieu de EM, et de rayon $\frac{k}{4}$



Résolu le 24 juin 2004