Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 8

EXGSP080 – EXGSP089

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

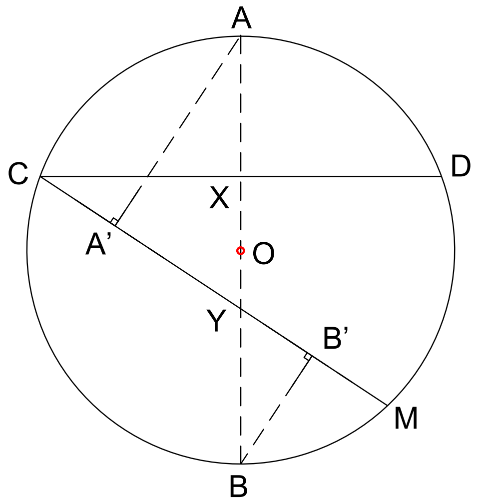
Novembre 04

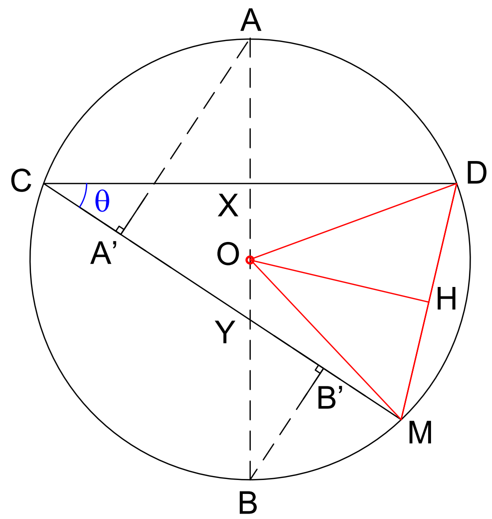
EXGSP080 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2004.

On considère un cercle C de centre O et de rayon R. On considère un diamètre AB et une corde CD perpendiculaire à AB, qui intercepte $[A,\ O]$ en X.
Soit M un point de C tel que CM intersecte $[A,\ B]$ en Y. On note A' la projection orthogonale de A sur CM, B' la projection orthogonale de B sur CM et θ l'angle $\widehat{DCM}$.

a) Exprimer $|A'B'|$ en fonction de R et θ.

b) Démontrer que $|A'B'| = |MD|$





a) On a $\begin{cases} A'AY = \theta & \text{car angles à côtés perpendiculaires} \\ A'AY = B'BY & \text{car angles alternes-internes } (AA' // BB') \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Dans le triangle } A'AY \ : \left| \overrightarrow{A'Y} \right| = \left| \overrightarrow{AY} \right| \sin\theta \quad (1) \\ \text{Dans le triangle } B'BY \ : \left| \overrightarrow{B'Y} \right| = \left| \overrightarrow{YB} \right| \sin\theta \quad (2) \end{cases}$$

On additionne (1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\left\| \overrightarrow{A'B'} \right| = 2R\sin\theta}$

b) $\overline{DOM} = 2\theta\,(\text{angle au centre})$

$\left| \overrightarrow{OD} \right| = \left| \overrightarrow{OM} \right| = R \Rightarrow \overline{ODM} = \overline{OMD} \Rightarrow \overline{ODM} + \overline{OMD} = \pi - 2\theta$

$\Rightarrow \overline{ODM} = \overline{OMD} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

Soit H milieu de $[M, D] \Rightarrow OH$ hauteur du triangle OMD

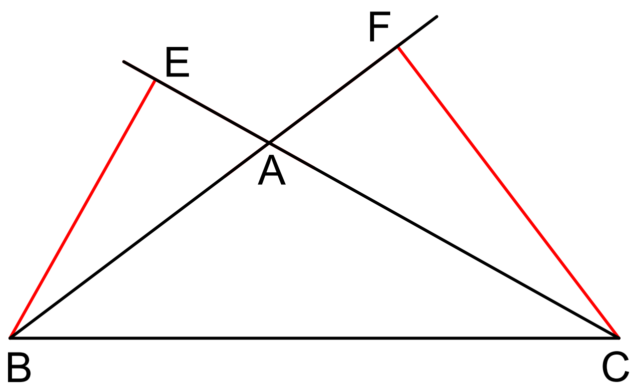
$\Rightarrow \left| \overrightarrow{DH} \right| = R\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = R\sin\theta \Rightarrow \boxed{\left\| \overrightarrow{DM} \right| = 2R\sin\theta = \left| \overrightarrow{A'B'} \right\|}$

Publié le 12 novembre 2004

EXGSP081 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2004.

Soit ABC tel que l'angle A soit obtus. On note E la projection orthogonale de B sur AC et F la projection orthogonale de C sur AB ?

Démontrer que : $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BF}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CE}\right|$



Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont parallèles et de sens contraire

et comme $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont aussi parallèles et de sens contraire

$\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BF}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CE}\right| = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}$

$= -\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}\right)$

$= -\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

Publié le 1é novembre 2004.

EXGSP082 – Bruxelles, septembre 2004.

On donne un cercle et un point fixe A, fixes. Déterminez le lieu géométrique du point milieu M du segment AB si B est un point quelconque du cercle

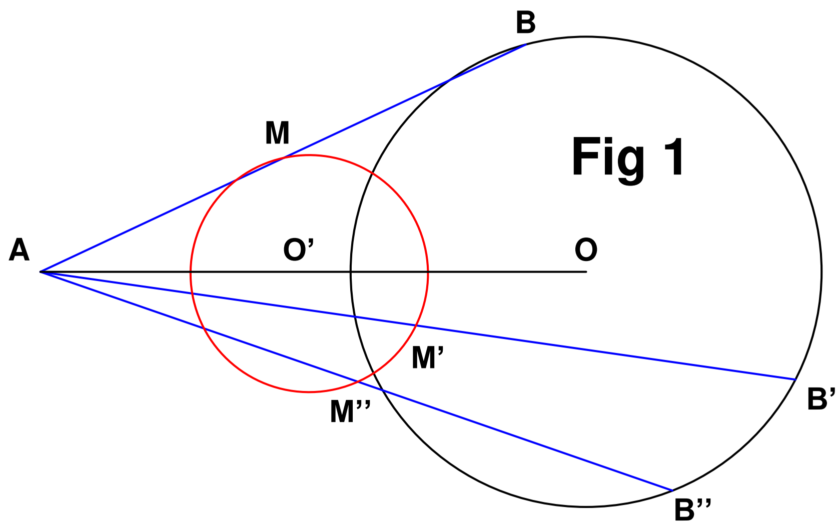
---

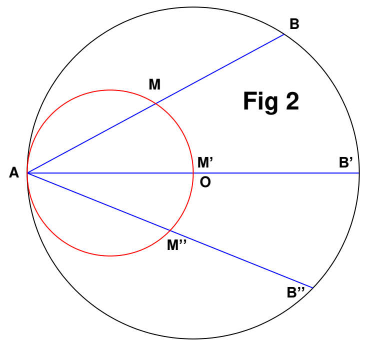
Quelque soit le point B, on a $\dfrac{|AM|}{|AB|} = cste$

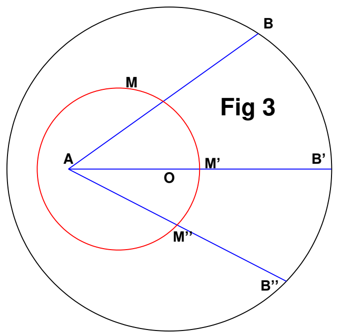
Par conséquent, le point M est le point homothétique du point B, selon le rapport $\dfrac{1}{2}$, et de centre d'homothétie A.

Or l'homothétie d'un cercle est un cercle. Donc le lieu de M est le cercle de rayon $\dfrac{R}{2}$ et dont le centre O' est situé au milieu de AO.

Il existe trois cas selon que A est situé en dehors, sur ou dans le cercle donné.



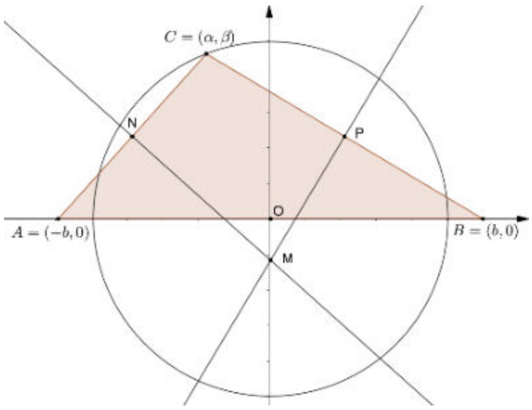




Issu le 30 décembre 2004

EXGSP083 – EPL, LLN, Louvain, juillet 2004, série 1.

Soit un triangle ABC dont le côté AB est fixe. Le sommet C est situé à une distance R du milieu du segment AB. On appelle M l'intersection des médiatrices des segments AC et BC. On vous demande de déterminer et de décrire avec précision le lieu de M en expliquant votre raisonnement sur base d'un dessin.



Soit O le milieu de AB. Si $\overline{CO} = R$, alors C se déplace sur un cercle de rayon R et de centre O.

Les médiatrices de MN et MP se coupent en M. La médiatrice de AB passe aussi par M et cette médiatrice est fixe.

$\Rightarrow$ Par conséquent, le lieu de M est donc la médiatrice AB.

Il convient de se poser la question de savoir si toute la médiatrice de AB fait partie du lieu.

Travaillons en géométrie analytique. Plaçons un repère en O. Soient alors $A = (-b, 0)$; $B = (b, 0)$, $C = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$

On obtient facilement l'équation de la médiatrice Δ_{CB} de CB :

$$P = \left(\frac{\alpha + b}{2}, \frac{\beta}{2}\right); m_{CB} = \frac{\beta}{\alpha - b} \Rightarrow \Delta_{CB} \equiv y - \frac{\beta}{2} = \frac{b - \alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha + b}{2}\right)$$

Pour $x = 0$, on a l'ordonnée de M : $y = \frac{\beta}{2} - \frac{b - \alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha + b}{2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - b^2}{2\beta} = \frac{R^2 - b^2}{2\beta}$

En remarquant que $\beta \in [-R, R]$, on obtient les cas suivants.

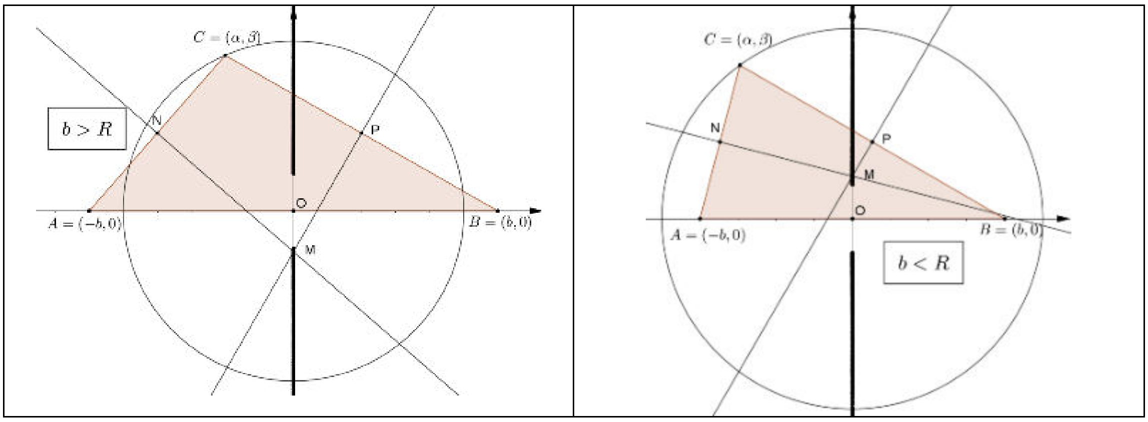
1) $b < R$ Si $\beta > 0$ $y \in \left[\frac{b^2 - R^2}{2R}; \rightarrow\right.$

Si $\beta > 0$ $y \in \left.\leftarrow; \frac{b^2 - R^2}{2R}\right]$

2) $b = R$ $y = 0$ Confondu avec O

3) $b > R$ Si $\beta > 0$ $y \in \left.\leftarrow; \frac{b^2 - R^2}{2R}\right]$

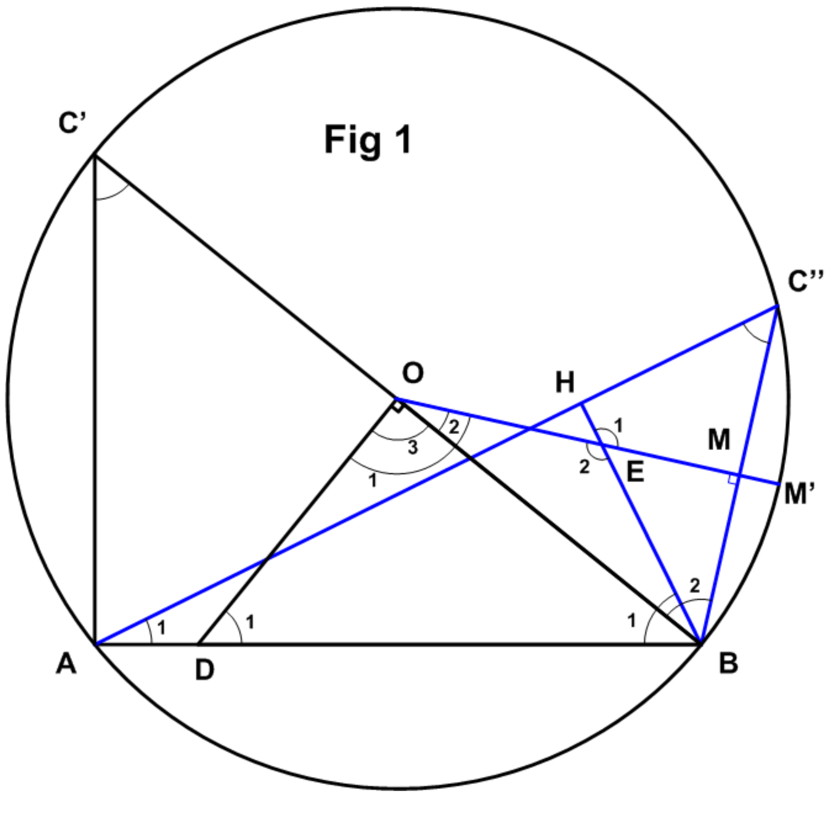
Si $\beta > 0$ $y \in \left[\frac{b^2 - R^2}{2R}; \rightarrow\right.$



Modifié le 21 juin 2018 (Robert Moulan)

EXGSP084– Louvain, juillet 2004, série 2.

Soit un triangle *ABC* dont le côté *AB* est fixe. L'angle correspondant au sommet *C* est constant. Le point *E* est défini comme l'intersection de la médiatrice du côté *BC* et de la hauteur correspondant au côté *AC* (c'est à dire émanant du sommet *B*). On demande de déterminer le lieu de *E* en expliquant clairement le raisonnement sur base d'un dessin. Pour améliorer, la lisibilité, il est peut être utile de réaliser deux dessins, l'un représentant le problème et l'autre la construction finale du lieu.



Si C regarde AB selon alors un angle constant, alors C se déplace sur un cercle de centre O

Soit C' une postion particulière de C telle que le triangle $C'AB$ soit retangle en A. Dans ce cas, le point D, intersection de AB et OD qui est médiatrice de $C'B$ est un point du lieu.

Soit C'' une position quelconque de C. Notons que la médiatrice de BC'' passe par le centre O et coupe le cercle en M'.

On a $\widehat{C'} = \widehat{D_1}$: angles à côtés perpendiculaires $\rightarrow \widehat{C''} = \widehat{D_1}$.

$\widehat{E_1}$ et $\widehat{C''}$ sont supplémentaires car angles à côtés perpendiculaires.

$\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$: angles opposés par le sommet. $\rightarrow \widehat{D_1}$ et $\widehat{E_2}$ sont supplémentaires.

On a $arc\ BM' = \frac{1}{2}\ arc\ BC' \rightarrow \widehat{O_2}$ (angle au centre) = $\widehat{A_1}$ (angle inscrit)

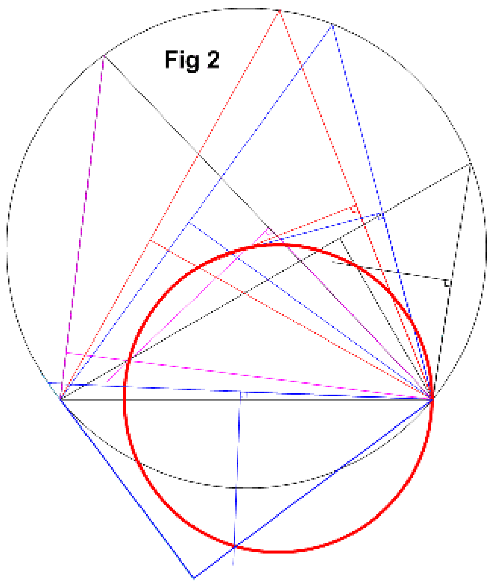
or $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont complémentaires $\rightarrow \widehat{O_2}$ et $\widehat{B_1}$ sont complémentaires

$\rightarrow \widehat{O_3} + \widehat{O_2} + \widehat{B_1} = 180° \rightarrow \widehat{O_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont supplémentaires.

Conclusion : les points $DOEB$ sont cocycliques. Le lieu de E est donc un cercle de diamètre DB.

Calculons le rayon r de ce cercle. Soit R le rayon du cercle sur lequel se déplace C.

On a : $AB = 2R\sin C$ et $R = |\ DB\ |.\sin C = 2r\sin C \rightarrow r = \dfrac{|\ AB\ |}{4\sin^2 C}$



EXGSP085– Louvain, septembre 2004.

Soit un cercle fixe, un point *P* fixe sur la circonférence et un angle constant. On fait pivoter l'angle autour du point *P*. Les deux segments formant l'angle rencontrent la circonférence respectivement en *A* et *B*. On construit sur base des côtés *PA* et *PB*, un parallélogramme *APBM*. On demande de trouver (ce compris de représenter sur un dessin précis les données du problème et la solution) :

- Le lieu décrit par le point d'intersection des diagonales du parallélogramme *APBM* lorsque l'angle pivote autour de *P*.
- Le lieu décrit par le point *M*.

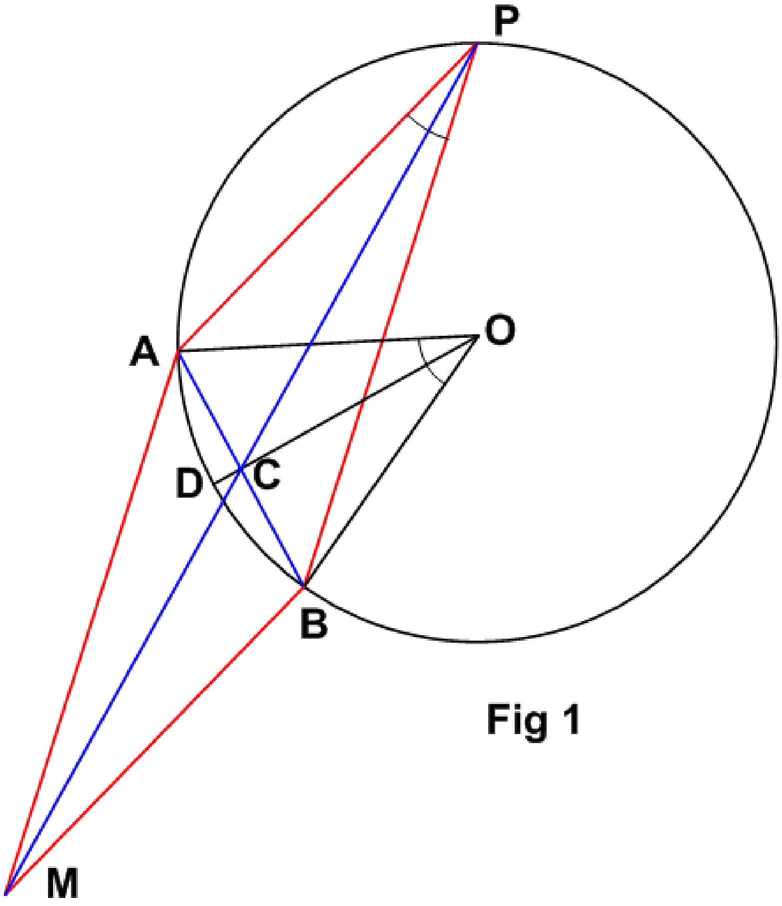


Fig 1

Figure 1

a) Soit O le centre du cercle donné. On remarque que $P(\text{angle inscrit}) = \frac{1}{2}O(\text{angle au centre})$

Donc si P est constant, O l'est aussi. De plus la corde $[AB]$ est de longueur constante.
Soient C le point d'intersection des diagonales AB et PM et D l'intersection de OC avec le cercle.

Le triangle ACO est constant puisque $\overline{AOC} = \frac{1}{2}\overline{O}$ et que C est le milieu de $[AB]$.

Considérons le rapport $\frac{|CO|}{|DO|} = \frac{|CO|}{R} = k = Cst.$

Autrement dit, le point C est donc homothétique de D selon le rapport $\frac{|CO|}{R}$.
Comme D se déplace sur le cercle, le lieu cherché est un cercle centré en O et de rayon : $r = k.R$

b) De même $\frac{|PM|}{|CM|} = 2$ puisque C est le point d'intersection des diagonales.

M est donc homothétique de C selon un rapport 2 et comme C se déplace sur un cercle, le lieu de M est un cercle de rayon : $r' = 2k.R$
La figure 2 représente les lieux.

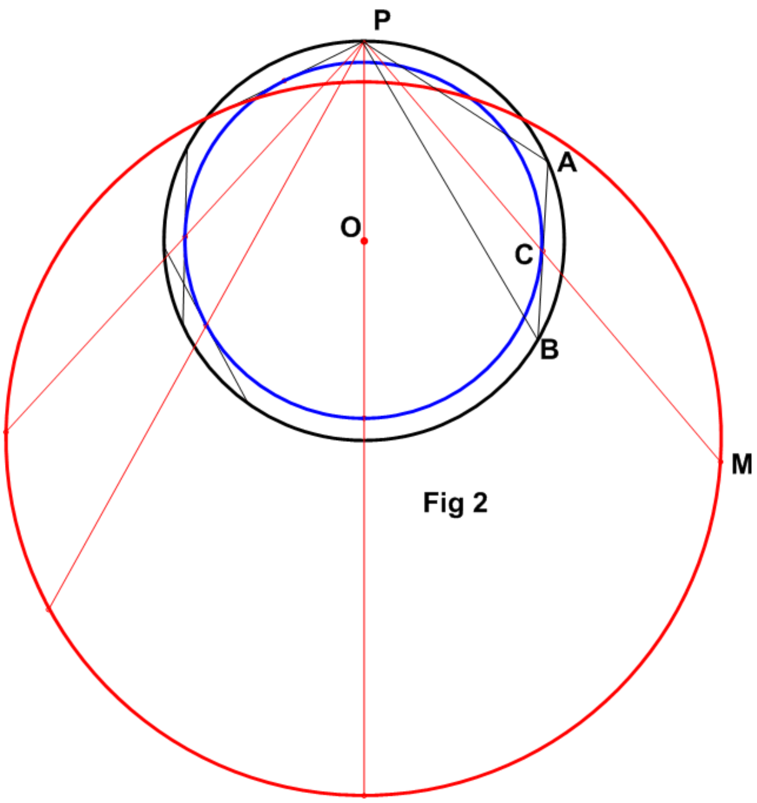


Fig 2

c) Définissons de manière plus précise les lieux de C et M en fonction de R le rayon du cercle donné et α l'angle donné.

Soit une position particulière de C telle que C se trouve sur le diamètre issu de P.

Voir figure 3

- Pour C, le centre du cercle est en O et le rayon est donné par : $r = R.\cos\alpha$
- Pour M, le rapport d'homothétie étant de 2, l'image O' de O est située sur la circonférence du cercle donné $\left(\dfrac{|O'P|}{|OP|} = 2\right)$ et le rayon vaut : $r' = 2R\cos\alpha$

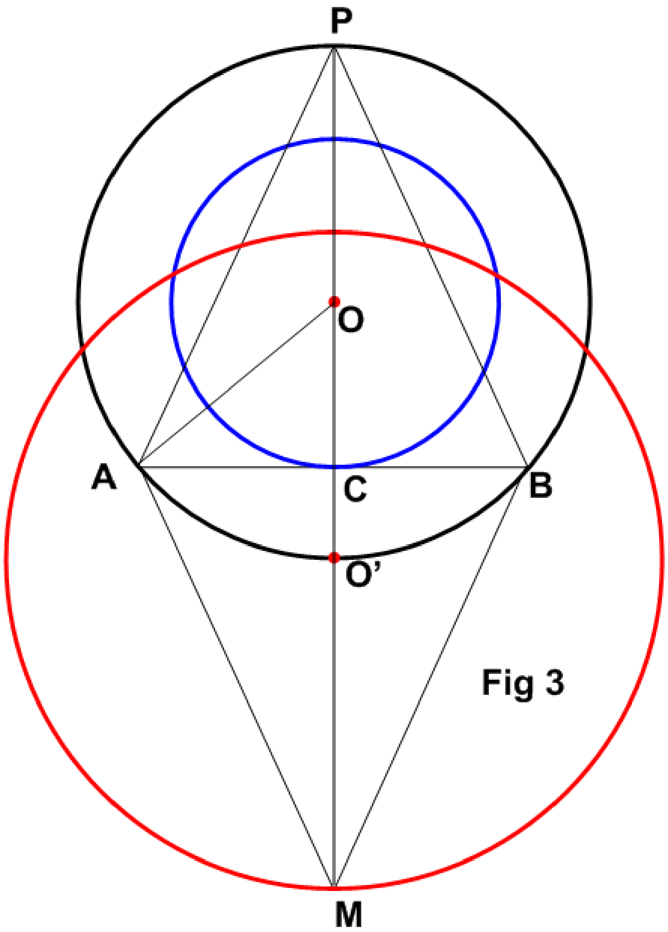


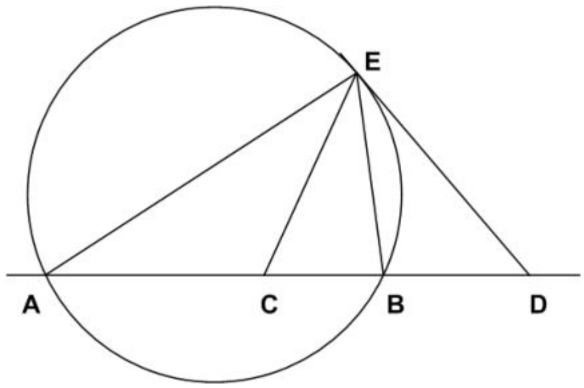
Fig 3

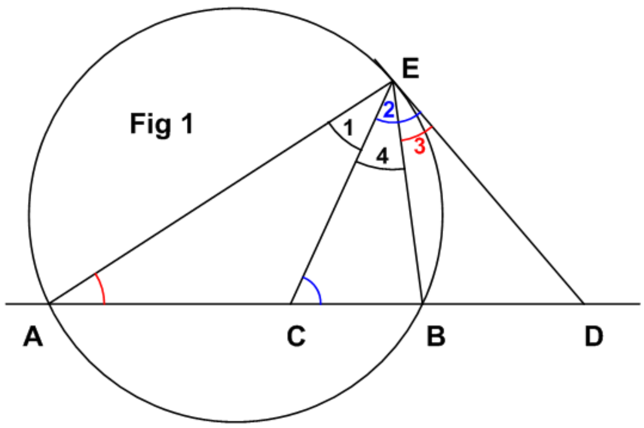
Issu le 3 mars 2005

EXGSP086 – Liège, septembre 2004.

On considère un cercle C et un point D extérieur au cercle. Par D, on trace une droite qui coupe C en deux points distincts A et B et une tangente au cercle dont on note E le point de contact. On construit un point C sur AB tel que $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DE}\right|$ et tel que C soit intérieur au cercle.

Montrer que la droite EC est bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$





$C = E_2$ car ΔECD est isocèle par hypothèse

$A = E_3$ car angle inscrit et angle tangentiel qui interceptent le même arc

$C = A + E_1$ La somme des angles d'un triangle égal 180°

$E_2 = E_3 + E_4$ Voir figure

$\Rightarrow C - E_2 = A + E_1 - E_3 - E_4 = 0K \Rightarrow = E_4$

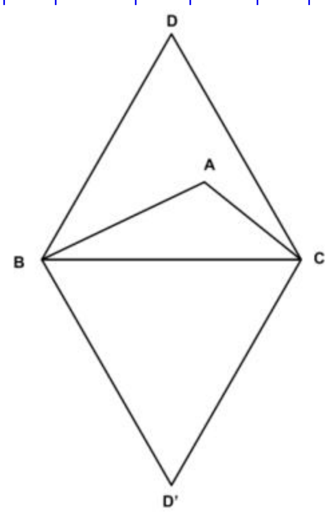
$\Rightarrow EC$ est bissectrice de $\widehat{AEB}$

EXGSP087 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2004.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2012

Enoncé de 2004

On considère un triangle ABC $\left(\text{non isocèle}\right)$ du plan. On construit sur le côté BC et dans le plan du triangle ABC deux triangles équilatéraux BDC et $BD'C$.
Démontrer la relation :

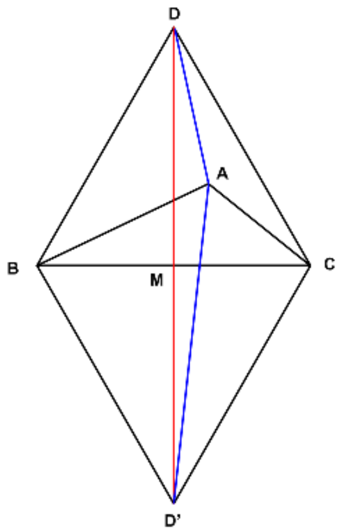
$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD'}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$



Enoncé de 2012

On considère deux triangles équilatéraux ABC et ABD partageant le même côté $[AB]$ (les points C et D étant situés de part et d'autre de la droite AB) et un point quelconque P du plan. Démontrer la relation :

$$|PC|^2+|PD|^2=|PA|^2+|PB|^2+|AB|^2$$



<u>Méthode 1</u>

Nous reprenons ici la méthode donnée par l'université

Notons M le milieu de $[B,C]$. Par hypothèse, le quadrilatère $DCD'B'$ est un losange.

Ses diagonales se soupent donc en leur milieu et M est le milieu de $[D,D']$

Pour exprimer le membre de gauche de l'égalité à démontrer, on utilise la relation de Chasles : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD'}$

Cela conduit à $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MD}$

et $\left|\overrightarrow{AD'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MD'}\right|^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MD'}$

En sommant les deux égalités et en tenant compte de : $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$

On obtient : $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MD'}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AM}\right|^2$

Ceci pouvait être obtenu directement par le théorème de la médiane dans le triangle ADD'

La thèse s'écrit donc : $\left|\overrightarrow{MD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MD'}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 \qquad (1)$

Il est donc naturel de procéder comme plus haut, mais dans le triangle ABC, pour obtenir

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{MB}\right|^2$

La thèse (1) devient alors : $\left|\overrightarrow{MD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MD'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{MB}\right|^2$

ou $2\left|\overrightarrow{MD}\right|^2 = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 \qquad (2)$

D'après le théorème de Pythagore, dans DMC, on a $\left|\overrightarrow{MD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

donc $\left|\overrightarrow{MD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \frac{3}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

Ce qui démontre (2)

Méthode 2

Puisque $BDCD'$ est un losange construit avec des triangles équilatéraux

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{BD'}\right| = \left|\overrightarrow{D'C}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

et $\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BD'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{D'C}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

On a $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD'}\right|^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD'}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'}\right)^2$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD'} + \left|\overrightarrow{D'C}\right|^2$$

En comparant avec la thèse, il nous reste donc à démontrer :

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD'} + \left|\overrightarrow{D'C}\right|^2$$

En effet, $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD'} + \left|\overrightarrow{D'C}\right|^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD'} + 2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

$= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + 2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ car $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD'}$

$= 2\,\overrightarrow{BD}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) + 2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

$= 2\,\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CB} + 2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

$= -\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ car $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = -\left|\overrightarrow{BD}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 60 = -\dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2}$

$= \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$

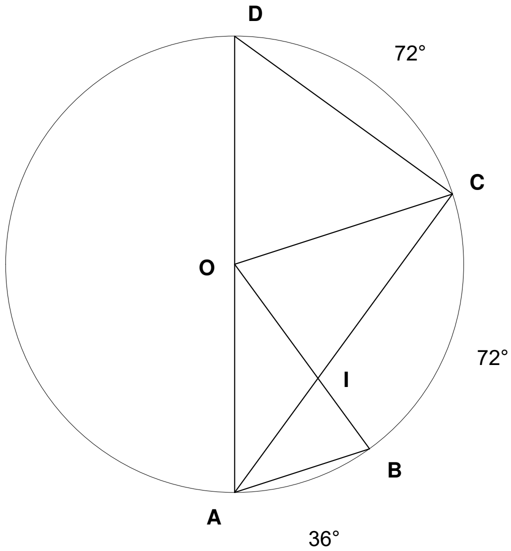
Modifié le 11 octobre 2013

EXGSP088 - Compléments

CONSTRUCTION DU DODECAGONE ET DU PENTAGONE

Il existe de nombreuses méthodes pour construire le pentagone et le dodécagone. En voici deux :

Méthode 1 : Triangles semblables



Soit $AOB = 36°, BOC = COD = 72°$ et soit R le rayon du cercle $\rightarrow DOA = 180°$

$$\text{Donc} \begin{cases} AB = d_1 \text{ côté du dodécagone convexe} \\ DC = d_2 \text{ côté du pentagone convexe} \\ AC = d_3 \text{ côté du pentagone étoilé} \end{cases}$$

ΔOBC est isocèle $\rightarrow OAB = OBA = 72°$

$\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = 36° \rightarrow \widehat{AIB} = 72° \rightarrow$ Les triangles COI et AIB sont isocèles

$\rightarrow AI = d_1$ et $IC = R$ or $AI + IC = AC \rightarrow d_3 - d_1 = R \quad (1)$

D'autre part, $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\widehat{DOC} = 36° \rightarrow$ Les triangles OIA et AOC sont isocèles et semblables

$$\rightarrow \frac{IA}{OA} = \frac{OA}{CA} \rightarrow \frac{d_1}{R} = \frac{R}{d_2} \rightarrow d_1 d_3 = R^2 \quad (2)$$

$$\text{De } (1) \text{ et } (2) \rightarrow \begin{cases} d_1 = R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ d_3 = R\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

D'où on déduit facilement que $d_2 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ car ΔDCA est rectangle

Méthode 2 : Racines n-ièmes de l'unité

Soit à résoudre dans le plan complexe, l'équation $x^5 - 1 = 0,$ ou encore $x^5 = 1$

En travaillant avec les complexes, on a :

$x^5 = e^{2k\pi i} \rightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ avec $k = 0,1,2,3,4$

Or nous savons que la somme des racines est nulle. $($Voir note en bas de page$)$

Ce qui pour les parties réelles donne : $\sum_{\mathrm{k}=0}^{4} x_k = \sum_{k=0}^{4} \cos\frac{2k\pi}{5}$

Ou encore : $1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$

$$\rightarrow 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Posons : $X = \cos\frac{2\pi}{5}$ et compte tenu que $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1,$ on obtient :

$4X^2 + 2X - 1 = 0$ que l'on résoud. $\rightarrow \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \rightarrow \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Nous utiliserons ces valeurs pour construire notre pentagone.

Construction

Méthode 1

Soit $R = 1.$ Soient OB et OA deux diamètres perpendiculaires

On détermine D milieu de OC. On trace l'arc de cercle de centre D et de rayon DA qui coupe OB en E. Soit F milieu de OE

On montre facilement que :

$OD = \frac{1}{2},\quad AD = \frac{\sqrt{5}}{2},$

$OE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c'est le côté du dodécagone,

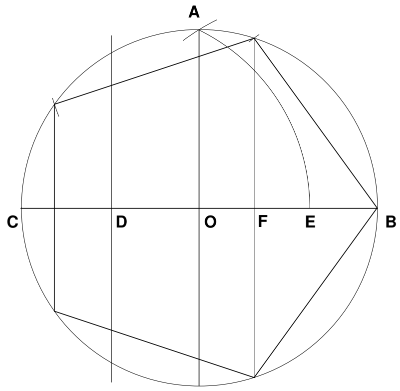
$OF = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ c'est $\cos\frac{2\pi}{5}$

$CE = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ c'est le côté du pentagone étoilé,

$AE = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ c'est le côté du pentagone convexe.

Pour tracer le pentagone convexe,

- on reportera la distance AE à partir de B,
- ou bien on élève la perpendiculaire en F,



Méthode 2

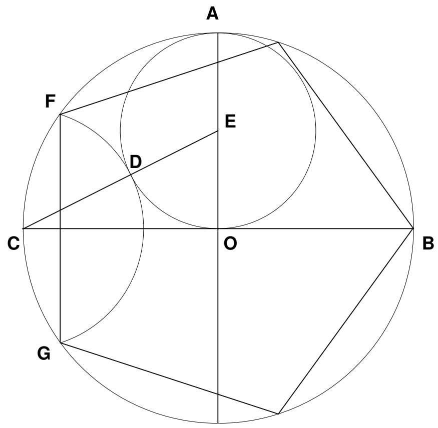
Soit E le milieu de AO.

Soit D l'intersection de CE et du cercle de centre E et de rayon $1/2$

Le cercle de centre C et de rayon CD détermine les points F et G sur le cercle.

On montre facilement que $CE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $CD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ c'est le côté du dodécagone

La corde FG est le côté du pentagone qu'il suffit de reporter.



Note sur les racines n-ièmes de l'unité.

Soit le polynôme $P(x) \equiv x^n - 1 = 0,$ dont les racines sont $x_k = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ avec $k = 0, 1, \ldots n-1$

A partir des racines le polynôme s'écrit : $P(x) \equiv \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$

Si on développe et qu'on identifie avec $x^n - 1,$ on en déduit que

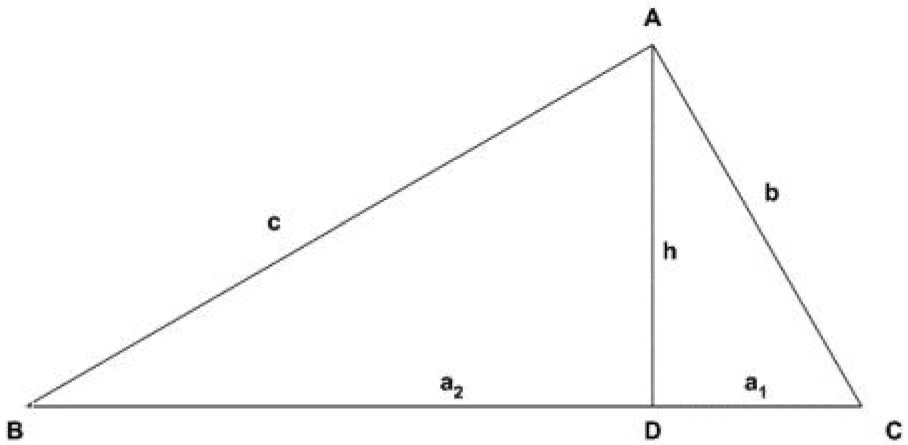
- la somme des racines $\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ est nulle puisque le terme en x^{n-1} est nul $(\text{si } n \geq 2)$
- le produit des racines vaut $(-1)^{n-1}$

Enfin, pour $n \geq 2,$ les points images Ω_k des n racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité

Le 20 mai 2005

EXGSP089 – Compléments, Théorème de Pythagore

a) Démontrer le théorème de Pythagore en par la méthode des triangles semblables.
b) Démontrer que la hauteur issue de l'angles droit est moyenne proportionnelle avec les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



a) Les triangles ABC et DAC sont semblables car ce sont des triangles rectangles qui ont un angle commun. $\rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \rightarrow \frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a_2} \rightarrow aa_2 = b^2 \quad (1)$

De même les triangles ABC et DBA sont semblables

$\rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DA}} \rightarrow \frac{c}{a_1} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow aa_1 = c^2 \quad (2)$

On additionne (1) et (2) membre à membre $\rightarrow a(a_1 + a_2) = b^2 + c^2 \rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

b) De $\frac{c}{h} = \frac{b}{a_2}$ et $\frac{c}{a_1} = \frac{b}{h}$ on tire également : $h = \frac{ca_2}{b}$ et $h = \frac{a_1 b}{c} \rightarrow \boxed{h^2 = a_1 a_2}$

Le 20 mai 2005