

Exercices résolus de mathématiques.

Suites - Combinaisons

Probabilités

PRO 0

EXPRO000 – EXPRO009

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 avril 03

EXPRO001 – Liège, septembre 2000.

A) Démontrer les formules

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad n \in N_0$$

On pourra éventuellement utiliser la méthode par récurrence.

B) Dédurre de A) la valeur de la somme :

$$mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \dots + 1 \cdot (n-m+1) \quad m, n \in N_0 \quad (m < n)$$

C) calculer pour $m = 7$ et $n = 10$.

$$A) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Soit } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^n k = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad 2 \sum_{k=1}^n k &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Par récurrence :

$$\text{On vérifie pour } n = 1 \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

On suppose la formule vraie pour $(n-1)$.

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Démontrons qu'elle est vraie pour n

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 \\ &= \frac{2n^3 - 2n^2 - n^2 + n + 6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\begin{aligned} B) \quad & mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \dots + 1 \cdot (n-m+1) \\ &= mn + (mn - m - n + 1) + (mn - 2m - 2n + 4) + (mn - 3m - 3n + 9) + \dots \\ &= m(mn) - (m+n)(1+2+3+\dots+m-1) + (1+4+9+\dots+(m-1)^2) \\ &= m^2n - (m+n) \sum_{k=1}^{m-1} k + \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \\ &= m^2n - (m+n) \frac{(m-1)m}{2} + \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} \\ &= \frac{m}{6} [6mn + 3(m+n)(m-1) + (m-1)(2m-1)] \\ &= \boxed{\frac{m}{6} [6mn - (m-1)((3n+m+1))]} \end{aligned}$$

C) Vérifions pour $m = 7$ et $n = 10$

$$\begin{aligned} 1) \quad & 7 \times 10 + 6 \times 9 + 5 \times 8 + 4 \times 7 + 3 \times 6 + 2 \times 5 + 1 \times 4 \\ &= 70 + 54 + 40 + 28 + 18 + 10 + 4 \\ &= 224 \end{aligned}$$

2) Formule

$$\begin{aligned} & \frac{m}{6} [6mn - (m-1)((3n+m+1))] \\ &= \frac{7}{6} [6 \times 7 \times 10 - (7-1)((3 \times 10 + 7 + 1))] \\ &= 224 \end{aligned}$$

METHODE ALTERNATIVE

Voici une méthode alternative. Proposons-nous de trouver les formules donnant les sommes suivantes

$$\sum_1^n k^2, \quad \sum_1^n k^3, \quad \sum_1^n k^4 \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\sum_1^n k^2$$

1) Démontrons qu'il existe un unique polynôme $P(x)$ de degré 3 tel

$$\forall x \rightarrow P(x+1) - P(x) = x^2 \text{ et que } P(1) = 0$$

$$\text{Soit ce polynôme } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

$$\text{Comme } P(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$$

De plus ,

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a \\ &\quad + bx^2 + 2bx + b \\ &\quad + cx + c \\ &\quad + d \\ &\quad - ax^3 - bx^2 - cx - d \\ &= 3ax^2 + (3a + 2b)x^2 + a + b + c \end{aligned}$$

Qui doit être égale à x^2 . Or deux polynômes sont identiques si les coefficients des mêmes puissances sont égaux. On identifie les coefficients et on obtient

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6} \right\} \rightarrow d = 0$$

La solution de ce système étant unique le polynôme $P(x)$ est unique

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{x}{6}(2x^2 - 3x + 1) = \frac{x}{6}(x-1)(2x-1)$$

2) Calculons maintenant la somme des carrés, en appliquant $P(x+1) - P(x) = x^2$

$$1^2 = P(2) - P(1)$$

$$2^2 = P(3) - P(2)$$

.....

$$(n-1)^2 = P(n) - P(n-1)$$

$$n^2 = P(n+1) - P(n)$$

En additionnant membre à membre, on obtient, compte tenu que $P(1) = 0$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_1^n k^2 = P(n+1)$$

Il suffit maintenant de développer le polynôme

$$\boxed{\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\underline{\sum_1^n k^3}$$

1) On applique la même méthode, mais cette fois on cherche un polynôme de degré 4

$$P(x+1) - P(x) = x^3 \quad \text{avec } P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{et } P(1) = 0$$

$$P(x+1) - P(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e - (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

$$= ax^4 + 4ax^3 + 6ax^2 + 4ax + a$$

$$+ bx^3 + 3bx^2 + 3x + b$$

$$+ cx^2 + 2cx + c$$

$$+ dx + d$$

$$+ e$$

$$- ax^3 - bx^3 - cx^2 - dx - e$$

$$= 4ax^3 + (6a + 3b)x^2 + (4a + 3a + 2c)x + a + b + c + d = 0$$

$$\text{Ce qui donne le système : } \begin{cases} 4a = 1 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3a + 2c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = 0 \rightarrow e = 0 \right.$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2}{4}(x-1)^2$$

2) Calculons maintenant la somme des cubes, en appliquant $P(x+1) - P(x) = x^3$

$$1^3 = P(2) - P(1)$$

$$2^3 = P(3) - P(2)$$

.....

$$(n-1)^3 = P(n) - P(n-1)$$

$$n^3 = P(n+1) - P(n)$$

En additionnant membre à membre, on obtient, compte tenu que $P(1) = 0$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_1^n k^3 = P(n+1)$$

Il suffit maintenant de remplacer x par $n+1$ dans $P(x)$

$$\boxed{\sum_1^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_1^n k\right)^2}$$

$$\underline{\sum_1^n k^4}$$

1) On cherche maintenant un polynôme du 5ème degré

$$P(x+1) - P(x) = x^4 \quad \text{avec} \quad P(1) = 0$$

En partant de $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, on arrive au système

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ 10a + 4b = 0 \\ 10a + 6b + 3c = 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d = 0 \\ a + b + c + d + e = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, d = 0, e = -\frac{1}{30} \rightarrow f = 0 \right.$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{x}{30} (6x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 1) \xrightarrow{\text{Horner}} P(x) = \frac{x}{30} (x-1)(2x-1)(3x^2 - 3x - 1)$$

2) Calculons maintenant la somme des puissance 4, en appliquant $P(x+1) - P(x) = x^4$

$$1^4 = P(2) - P(1)$$

$$2^4 = P(3) - P(2)$$

.....

$$(n-1)^4 = P(n) - P(n-1)$$

$$n^4 = P(n+1) - P(n)$$

En additionnant membre à membre, on obtient, compte tenu que $P(1) = 0$

$$1^4 + 2^4 + \dots + (n-1)^4 + n^4 = \sum_1^n k^4 = P(n+1)$$

Il suffit maintenant de remplacer x par $n+1$ dans $P(x)$

$$\boxed{\sum_1^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

Résolu le 15 janvier 2002, Modifié le 8 octobre 06

EXPRO002 – Liège, septembre 1996.

A) Démontrer la relation

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \quad \text{si } n \geq k \geq 1$$

B) En déduire la valeur de la somme :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$$

$$A) C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \rightarrow \quad k C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad \rightarrow \quad n C_{n-1}^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$\rightarrow \boxed{k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}}$$

$$\begin{aligned} B) C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots + nC_n^n \\ = n C_{n-1}^0 + n C_{n-1}^1 + n C_{n-1}^2 + \dots \\ = n (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) \end{aligned}$$

Le facteur entre parenthèses est une ligne du triangle de Pascal.

La somme des termes d'une ligne de rang $(n-1)$ est égale à 2^{n-1}

$$\rightarrow \boxed{n 2^{n-1}}$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO003 – Liège, juillet 1998. Bruxelles, juillet 2002.

Calculer l'expression

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - C_n^{10} + \dots$$

Vérifier le résultat obtenu pour $n = 9$.

Suggestion calculer $(1 + i)^n$ de deux façons différentes.

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - C_n^{10} + \dots$$

Appliquons le binôme de Newton

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= C_n^0 1^n i^0 + C_n^1 1^{n-1} i^1 + C_n^2 1^{n-2} i^2 + C_n^3 1^{n-3} i^3 + C_n^4 1^{n-4} i^4 + \dots \\ &= C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + \dots \\ &= C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 \dots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'autre part : } 1+i &= \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \rightarrow (1+i)^n = (\sqrt{2})^n \operatorname{cis} n \frac{\pi}{4} \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 \dots = (\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4}}$$

Vérification pour $n = 9$

$$\begin{aligned}C_9^0 - C_9^2 + C_9^4 - C_9^6 + C_9^8 &= \frac{9!}{9!0!} - \frac{9!}{7!2!} + \frac{9!}{5!4!} - \frac{9!}{3!6!} + \frac{9!}{1!8!} \\ &= 1 - 36 + 126 - 84 + 9 = 16\end{aligned}$$

$$(\sqrt{2})^9 \cos 9 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

EXPRO004 – Liège, Juillet 1996.

Calculer l'expression

Vérifier le résultat obtenu pour $n = 9$. Suggestion : calculer $(1 + i)^n$ de deux façons différentes.

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 - C_n^{11} + \dots$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 - C_n^{11} + \dots$$

Appliquons le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= C_n^0 1^n i^0 + C_n^1 1^{n-1} i^1 + C_n^2 1^{n-2} i^2 + C_n^3 1^{n-3} i^3 + C_n^4 1^{n-4} i^4 + \dots \\ &= C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + C_n^4 i^4 + \dots \\ &= C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'autre part : } 1+i &= \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \rightarrow (1+i)^n = (\sqrt{2})^n \operatorname{cis} n \frac{\pi}{4} \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \dots = (\sqrt{2})^n \sin n \frac{\pi}{4}}$$

Vérifions pour $n = 9$:

$$\begin{aligned}C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 &= \frac{9!}{8!1!} - \frac{9!}{6!3!} + \frac{9!}{4!5!} - \frac{9!}{2!7!} + \frac{9!}{0!9!} \\ &= 9 - 84 + 126 - 36 + 1 = 16\end{aligned}$$

$$(\sqrt{2})^9 \sin 9 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO005 – Liège.

Démontrer par récurrence :

$$\sum_{n=1}^M C_{n+1}^2 = C_{M+2}^3$$

$$\sum_{n=1}^M C_{n+1}^2 = C_{M+2}^3$$

a) On vérifie que la relation est vraie pour $M = 1$ car $C_2^2 = C_3^3 = 1$

b) Supposons que la relation est vraie, démontrons qu'elle est vraie pour $M + 1$

$$\sum_{n=1}^{M+1} C_{n+1}^2 = \sum_{n=1}^M C_{n+1}^2 + C_{M+2}^2 = C_{M+2}^3 + C_{M+2}^2 = C_{M+3}^3$$

Rappel : Dans le triangle de Pascal, on vérifie que : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO006 – Espace Math 66.

Résoudre :

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 - 387n = 0$$

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 - 387n = 0$$

$$2n + C_{2n+1}^3 = 387n$$

$$C_{2n+1}^3 = 385n$$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n+1-3)!3!} = 385n$$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!} = 2310n$$

$$(2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1) = 2310n$$

$$4n^2 = 1156$$

$$n = 17$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO007 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une famille de cinq enfants et l'on suppose que pour chacun d'eux, la probabilité d'être un garçon ou une fille est de $\frac{1}{2}$

On demande :

- la probabilité qu'il y ait exactement deux garçons et trois filles dans la famille.
- la probabilité qu'il y ait au moins un garçon et au moins deux filles dans la famille.

a) Le nombre total de possibilités est de $2^5 = 32$

Construisons le tableau :

F	G	C_n^p
5	0	1
4	1	5
3	2	10
2	3	10
1	4	5
0	5	1

La possibilité $2G + 3F$ correspond à 10 cas.

La probabilité est donc de : $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

b) La possibilité au moins 1G et au moins 2 F correspond à la somme des lignes 2, 3 et 4

du tableau : $\rightarrow 5 + 10 + 10 = 25$

La probabilité est donc de : $\frac{25}{32}$

EXPRO008 – BAC France.

Un aquarium contient :

- a. 6 poissons rouges, coûtant 15 F pièces
- b. 4 poissons jaunes, coûtant 20 F pièces

Un client achète 3 poissons qu'il sort au hasard de cet aquarium. On considère la variable aléatoire X désignant le prix total des 3 poissons.

- a) Calculer la probabilité de tirer 2 poissons rouges et 1 jaune, et le prix alors payé.
- b) Calculer la probabilité de payer 55 francs pour 3 poissons tirés au hasard.
- c) Calculer le prix moyen $E(X)$
- d) Calculer l'écart-type sigma (X) du prix payé.

a) La probabilité de tirer un poisson rouge est $\frac{3}{5}$

La probabilité de tirer un poisson jaune est $\frac{2}{5}$

C'est une distribution binomiale. La probabilité de tirer 2 R et 1 J est donc

$$C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = 0.432$$

b) La seule combinaison permettant de payer 55 F est 1R + 2J

$$\text{Probabilité : } C_3^1 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.288$$

c) Calculons:

$$C_3^0 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.064 \quad \text{et} \quad C_3^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 0.216$$

Etablissons le tableau suivant :

R	0	1	2	3
J	3	2	1	0
p_i	0.064	0.288	0.432	0.216
X	60	55	50	45
$p_i X_i$	3.84	15.84	21.6	9.72

→ le prix moyen est $E(X) = \sum p_i X_i = 51 F$.

d) On calcule la variance :

$$V(x) = 0.065(60 - 51)^2 + 0.288(55 - 51)^2 + 0.432(50 - 51)^2 + 0.216(45 - 51)^2 = 18$$

$$\text{D'où l'écart-type : } \sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 4.24 F$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO009 – Exemple.

On forme un comité de 4 membres choisi au hasard parmi 7 personnes dont 2 frères.

- Calculer la probabilité que les 2 frères soient choisis
- Calculer la probabilité qu'un frère soit choisi
- Calculer la probabilité pour qu'au moins un frère soit choisi
- Calculer la probabilité pour qu'aucun frère ne soit choisi

a) Nombre de frères : 2

Autres personnes : 5

Nombre total : 7

Il faut 2 frères et 2 autres personnes : $p = \frac{C_2^2 C_5^2}{C_7^4} = 0.286$

$$b) p = \frac{C_2^1 C_5^3}{C_7^4} = 0.571$$

c) Soit on considère que c'est la somme de a) et b) : $p = 0.286 + 0.571 = 0.857$

Soit on considère que c'est le complément de d) : $p = 1 - 0.143 = 0.857$

$$d) p = \frac{C_5^4}{C_7^4} = 0.143$$

Note : on vérifie que

p 2 frères	0.286
p 1 frère	0.571
p aucun frère	0.143
<hr/>	
total	1.000

Résolu le 15 janvier 2002