Exercices résolus de mathématiques.

Suites - Combinaisons Probabilités

PRO 1

EXPRO010 – EXPRO019

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXPRO010W

Une urne contient n boules blanches (n ≥ 4) et 10 boules noires.
On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1) Calculer la probabilité Pn de tirer 5 boules noires et 5 seulement.
2) Etudier le sens des variations de Pn lorsque n croît (Calculer le rapport Pn+1/Pn)

a)

Type de boule	Nbre de boule	Nbre de cas	
Noires	10	C_{10}^{5}	(On prend 5 boules noires)
Blanches	n	C_{n}^{5}	(On prend 5 boules blanches)
Total	$n+10$	C_{n+10}^{10}	

$$\rightarrow \quad P_n = \frac{C_{10}^{5}\, C_{n}^{5}}{C_{n+10}^{10}}$$

b) De même : $P_{n+1} = \dfrac{C_{10}^{5}\, C_{n+1}^{5}}{C_{n+11}^{10}}$

$$\rightarrow \quad \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{C_{10}^{5}\, C_{n+1}^{5}}{C_{n+11}^{10}}}{\dfrac{C_{10}^{5}\, C_{n}^{5}}{C_{n+10}^{10}}} = \frac{C_{n+1}^{5}\, C_{n+10}^{10}}{C_{n}^{5}\, C_{n+11}^{10}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-5)!\,5!}\,\frac{(n+10)!}{(n+10-10)!\,10!}\,\frac{(n-5)!\,5!}{n!}\,\frac{(n+1)!\,10!}{(n+11)!}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n-4)(n+11)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+7n-44}$$

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ est inférieur à 1 quand : $n^2+2n+1 < n^2+7n-44 \rightarrow \; n>9$

Donc dès que $n>9$; P_{n+1} devient plus petit que P_n qui continue à décroitre avec n

Résolu le 27 février 2004

EXPRO011W

Le clavier d'une machine comporte 42 touches, dont 8 chiffres et 26 lettres. On frappe au hasard. Sachant que les touches sont équiprobables, calculer les probabilités suivantes :

a) De taper une lettre.
b) De taper une suite de 5 lettres.
c) De taper le mot espoir.

$a)\quad P = \dfrac{26}{42} = 0.62$

$b)$ On admet que l'on peut frapper plusieurs fois la même touche :

$$P = \left(\frac{26}{42}\right)^6 = 0.09$$

$c)$ Probabilité de taper une lettre déterminée : $P = \dfrac{1}{42}$

Donc la probabilité de taper le mot espoir est : $P = \left(\dfrac{1}{42}\right)^6 = 1.82\,10^{-10}$

C'est très peu probable.

Résolu le 27 février 2004

EXPRO012W

Un cinéma bruxellois prévoit, pour l'année 2000, 365 spectacles différents dont 73 films policiers.

A) Quelles seront respectivement les probabilités p et q pour qu'une personne entrant un jour, au hasard, dans ce cinéma assiste à
   a. un film policier
   b. un autre film

B) M Dupont va à ce cinéma une fois par mois, sans connaître à l'avance le programme. Quelles seront respectivement les probabilités p1, p2, p3, et p4 pour qu'il voie durant une année.
   a. un film policier et un seul ?
   b. douze films non policiers ?
   c. au moins deux films policiers ?
   d. quatre films non policiers et quatre seulement ?

On a deux évènements contraires, c'est donc une loi binomiale.

$$A)\quad a)\quad p=\frac{73}{365}=0.2$$

$$b)\quad q=1-p=0.8$$

$$B)\quad f\left(x_i\right)=P(X=x_i)=C_n^{x_i}\,p^{x_i}\left(1-p\right)^{n-x_i}$$

$$a)\quad p_1=C_{12}^{1}pq^{11}=12\times 0.2\times 0.8^{11}=0.21$$

$$b)\quad p_2=q^{12}=0.07$$

$c)$ Il est plus simple de calculer la probabilité de l'évènement contraire :

$$1-p_3=p_1+p_2$$

$$p_3=1-\left(p_1+p_2\right)=0.72$$

$$d)\quad p_4=C_{12}^{4}p^8q^4=495\times 0.41\times 2.56\,10^{-6}=5.19\,10^{-4}$$

C' est donc très peu probable.

Résolu le 27 février 2004

EXPRO013W

On jette un dé.
Si on obtient un 6, on gagne 5 Euro
Si on obtient un 5 ou un 4, on gagne 1 Euro
Si on obtient un 3 ou un 2, on gagne 0 Euro
Si on obtient un 1, on perd 0.5 Euro

Calculer

a) L'espérance mathématique
b) La variance
c) L'écart type

$a)$ Etablissons le tableau :

X	-0.5	0	1	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\rightarrow \quad E(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{6} + 0\frac{2}{6} + 1\frac{2}{6} + 5\frac{1}{6} = 0.917$$

$$b) \quad V(x) = \frac{1}{6}(-0.5-0.917)^2 + \frac{2}{6}(-0.917)^2 + \frac{2}{6}(1-0.917)^2 + \frac{1}{6}(5-0.917)^2$$
$$= 3.3957$$

$$c) \quad \sigma = \sqrt{V(x)} = 1.8427$$

Résolu le 27 février 2004

EXPRO014W

On tire au hasard un échantillon de trois articles dans une boîte de 12 articles dont trois sont défectueux.

Calculer l'espérance mathématique d'obtenir des articles bons, ainsi que la variance et l'écart type.

Soit n = nombre d'articles bons comme variable aléatoire.

C'est une loi binomiale de degré 3 avec $p = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{1}{4}$

n	3	2	1	0
p	$C_3^0\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$C_3^1\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$	$C_3^2\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$$E(x) = 0.04219 \times 3 + 0.4219 \times 2 + 0.1406 \times 1 = 2.2501$$

<u>Mais</u> comme il s'agit d'une loi binomiale ce résulat pouvait être directement obtenu par

$$\mathrm{E}(\mathrm{x}) = np = 3 \times 0.75 = 2.25$$

$$V(x) = 0.04219 \times (3 - 2.25)^2 + 0.4219 \times (2 - 2.25)^2 + 0.1406 \times (1 - 2.25)^2$$
$$+ 0.0157 \times (0 - 2.25)^2 = 0.563$$

On vérifie : $V(x) = np(1 - p) = 2.25 \times 0.25 = 0.563$

$\rightarrow \quad \sigma(x) = 0.75$

Note : pour les articles défectueux, on a :

$\mathrm{E}(\mathrm{x}) = np = 3 \times 0.25 = 0.75$

$V(x) = 0.75 \times 0.75 = 0.563$ (La même)

$\sigma(x) = 0.75$ (Le même)

Résolu le 27 février 2004

EXPRO015W

a) Dans un jeu de pile ou face, on gagne 1 Euro si on fait pile, et on perd 2 Euro si on fait face.

Calculer l'espérance mathématique d'obtenir des articles bons, ainsi que la variance et l'écart type.

b) Mêmes questions pour un jeu de dé où on gagne 5 Euro si on fait un 5 et si dans les autres cas on perd 2 Euro.

$a)$ Variable aléatoire : $x =$ le gain

x	-2	1
p	$1/2$	$1/2$

$$E(x) = \sum_i x_i p_i = -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$V(x) = \sum_i p_i \left(x_i - E(x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 1.5$$

$b)$ Variable aléatoire : $x =$ le gain

x	-2	5
p	$5/6$	$1/6$

$$E(x) = \sum_i x_i p_i = -2\frac{5}{6} + 5\frac{1}{6} = -0.833$$

$$V(x) = \sum_i p_i \left(x_i - E(x)\right)^2$$

$$= \frac{5}{6}(1 + 0.833)^2 + \frac{1}{6}(-2 + 0.833)^2 = 4.028$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 2.005$$

Résolu le 27 février 2004

EXPRO016W

Dans une urne se trouvent 12 boules noires et 8 blanches. Si on tire une noire, on perd 3 Euro et si on tire une blanche, on gagne 5 Euro.

Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type.

Variable aléatoire : $x =$ le gain

$$\begin{array}{ccc} & N & B \\ X & -3 & 5 \\ p & 12/20 & 8/20 \end{array}$$

$$E(x) = \sum_i x_i p_i = -3\frac{12}{20} + 5\frac{8}{20} = \frac{1}{5}$$

$$V(x) = \sum_i p_i \left(x_i - E(x)\right)^2$$

$$= \frac{12}{20}\left(-3 - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{8}{20}\left(5 - \frac{1}{5}\right)^2 = 15.77$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 3.971$$

Résolu le 27 février 2004

EXPRO017W

Un examen propose 20 questions. L'élève a le choix parmi 5 réponses dont une seule est juste.
Soit un élève qui choisit ces réponses au hasard.

Calculer le résultat le plus probable et la probabilité de faire la moitié des points.

C'est une loi binomiale avec les probabilités

$$p\ (\text{vrai}) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad q\ (\text{faux}) = \frac{4}{5}$$

Le résultat le plus probable, il suffit de calculer l'espérance mathématique

$E(x) = np = 20 \times \frac{1}{5} = 4.$ C'est-à-dire 4 réponses justes.

On peut le vérifier en effectuant un calcul plus détaillé.

Développons les premiers termes de : $\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{20} = \sum_n C_{20}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^{20-n}$

n	1	2	3	4	5	6
C_{20}^{n}	20	190	1140	4845	15504	38760
$\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$	0.2	0.04	0.08	0.00616	0.00032	0.000064
$\left(\frac{4}{5}\right)^{20-n}$	0.0144	0.018	0.0225	0.0281	0.0352	0.0439
p_1	0.0576	0.1368	0.2052	0.2178	0.1746	0.1080

On voit bien que le maximum correspond à n = 4

La probabilité de faire 10/20 est de :

$$C_{20}^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \frac{2}{1000}$$

Il est donc préférable d'étudier plutôt que de compter sur sa chance.

Résolu le 27 février 2004

EXPRO018 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2001

Cinq nombres entiers sont des termes consécutifs d'une progression arithmétique. Leur somme vaut 20 et la somme de leurs inverses vaut 29/20.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Soit r la raison de la suite, et notons les cinq nombres comme u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. Les calculs sont plus faciles si nous choisissons la représentation la plus symétrique possible :

$$u_1 = u_3 - 2r\,, u_2 = u_3 - r\,, u_3\,,\ u_4 = u_3 + r\,, u_5 = u_3 + 2r$$

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 5u_3 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 = 4$

$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = \frac{29}{20} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4-2r} + \frac{1}{4-r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4+r} + \frac{1}{4+2r} = \frac{29}{20}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4(16-r^2)(4+2r)+4(16-4r^2)(4+r)+(16-r^2)(16-4r^2)+4(16-4r^2)(4-r)+4(16-r^2)(4-2r)}{4(16-r^2)(16-4r^2)} = \frac{29}{20}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1280-240r^2+4r^4}{(16-r^2)(16-4r^2)} = \frac{29}{5}$

$\Leftrightarrow \quad 5(4r^4 - 240r^2 + 1280) = 29(4r^4 - 80r^2 + 256)$

$\Leftrightarrow \quad 96r^4 - 1120r^2 - 1024 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3r^4 - 35r^2 + 32 = 0$

Posons $x = r^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{x}$ avec $x > 0$; l'équation en x est donc :

$$3x^2 - 35x + 32 = 0$$

$$\Delta = 1225 - 4.3.32 = 841 \quad \sqrt{\Delta} = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{6}(35 \pm 29) = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} = \frac{2}{3}.16 \end{cases}$$

(1) Avec $x_1 = 1$, on trouve $r_{1,2} = \pm 1$, et donc deux suites des mêmes 5 nombres dans l'ordre opposé :

2, 3, 4, 5, 6 et **6, 5, 4, 3, 2**

Contrôle : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30+20+15+12+10}{60} = \frac{7}{60} = \frac{29}{20}$

(2) Avec $x_2 = \frac{2}{3}.16$, on trouve $r_{3,4} = \pm 4.\sqrt{\frac{2}{3}}$ et donc deux autres suites :

$$\mathbf{4 - 8\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 4 - 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 4, 4 + 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 4 + 8\sqrt{\tfrac{2}{3}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{4 + 8\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 4 + 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 4, 4 - 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 4 - 8\sqrt{\tfrac{2}{3}}}$$

ou bien, à cinq décimales :

-2,53197 ; 0,73401 ; 4 ; 7,26599 ; 10,53197 et **10,53197 ; 7,26599 ; 4 ; 0,73401 ; -2,53197**

Contrôle :

$$\frac{1}{4-8\sqrt{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{4-4\sqrt{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4+4\sqrt{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{4+8\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{8}{16-\frac{2}{3}.64} + \frac{8}{16-\frac{2}{3}.16} + \frac{1}{4} = \frac{24}{-80} + \frac{24}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{10} = \frac{5+30-6}{20} = \frac{29}{20}$$

Résolu le 27 février 2004. Modifié le 4 février 2012 (Jan Frans Broeckx)

EXPRO019 – Bruxelles, septembre 2002

Trouver les 10 termes d'une progression arithmétique sachant que la somme des termes vaut 245 et la différence des extrêmes 45

$$t_{10} = t_1 + 9r \quad \rightarrow \quad t_{10} - t_1 = 9r = 45 \quad \rightarrow \quad r = 5$$

$$S = \frac{t_1 + t_1 + 9r}{2}.10 = 245 \quad \rightarrow 2t_1 + 45 = 49 \quad \rightarrow \quad t_1 = 2$$

Les 10 termes sont donc :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	2	7	12	17	22	27	32	37	42	47

Résolu le 27 février 2004